

Правило параллелепипеда: сложение векторов в пространстве

Как геометрически сложить два вектора с общим началом?

Зачем складывать векторы



Сложение векторов помогает описывать движение, силы и перемещения, а в геометрии — наглядно находить общий результат двух направленных отрезков в пространстве.

Что такое вектор

Направленный отрезок

Вектор — это отрезок, у которого есть длина и направление. Именно эти два признака отличают его от обычного отрезка на чертеже.

Как обозначают

Векторы записывают со стрелкой или выделяют жирным шрифтом, например $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Такое обозначение сразу показывает, что речь идёт о направленной величине.

Модуль вектора

Длина вектора называется модулем. Она показывает, насколько велик вектор, но не заменяет его направление: два вектора могут иметь одинаковый модуль и разное направление.

Равные векторы

Векторы считаются равными, если у них совпадают длина и направление. При этом они могут быть начерчены в разных местах и всё равно оставаться одинаковыми.

Нулевой вектор

Нулевой вектор имеет длину 0 и не имеет направления. Он нужен как удобная точка отсчёта в задачах на сложение и сравнение векторов.

Два вектора с общим началом и параллелепипед

Общее начало

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ откладывают из одной точки. Это важное условие: именно от общего начала строится фигура, показывающая их сумму.

Параллельные стороны

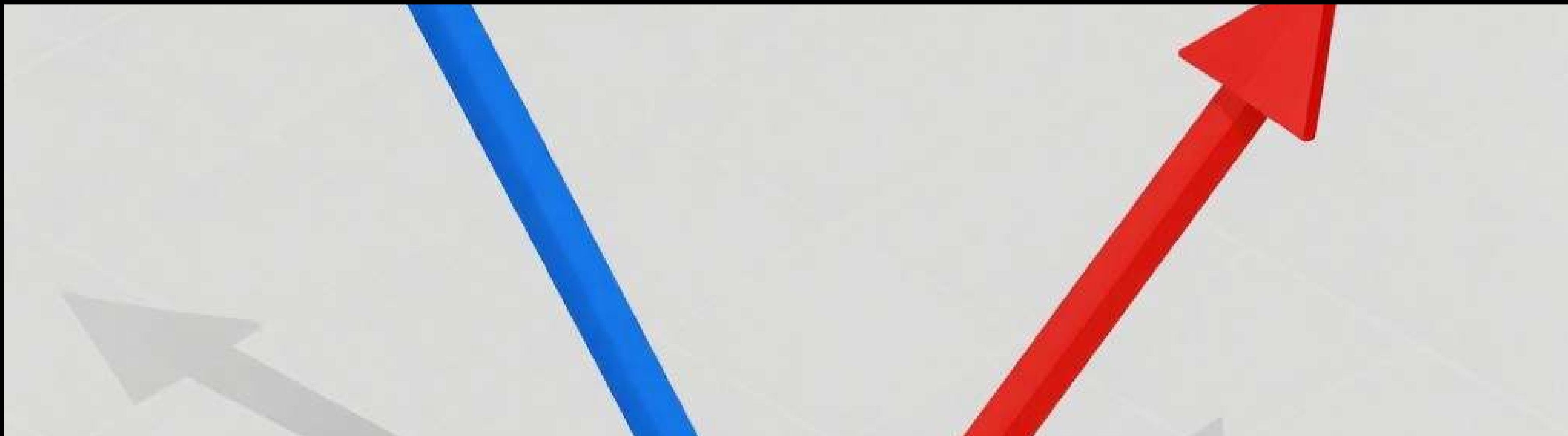
Через конец каждого вектора проводят прямую, параллельную другому вектору. Так возникают рёбра будущего параллелепипеда, которые сохраняют направление и длину исходных векторов.

Объёмная фигура

Получается параллелепипед — пространственная фигура с параллельными противоположными рёбрами. Она позволяет увидеть сложение векторов не только на плоскости, но и в пространстве.

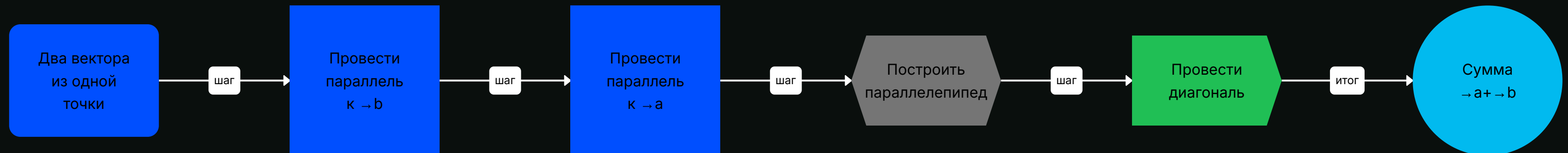
Диагональ суммы

Диагональ, выходящая из общей начальной точки, показывает результат сложения $\vec{a} + \vec{b}$. Она соединяет начало построения с конечной точкой общего движения.

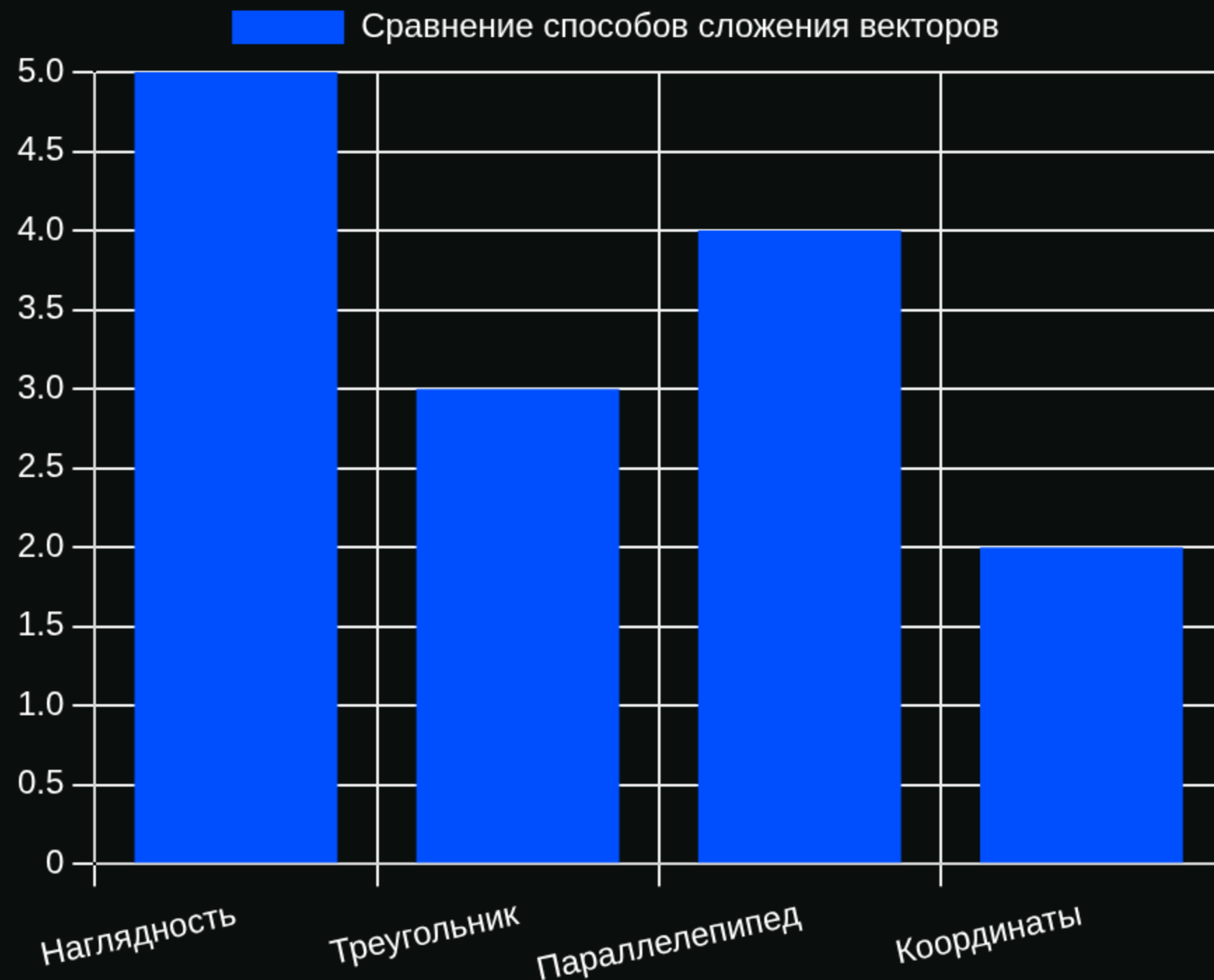


Построение суммы по правилу параллелепипеда

Пошаговая схема геометрического сложения двух векторов с общим началом.



Способы сложения векторов



Каждый способ выбирают по задаче: рисунок помогает увидеть идею, а координаты — получить точный ответ без построения.

Правило параллелепипеда особенно удобно в пространстве, а координатный способ полезнее для вычислений. Один метод не заменяет другой, а дополняет его.

Учебное сравнение для 7 класса; условная шкала 1–5.

Свойства сложения векторов

Свойство	Запись	Смысл
Коммутативность	$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$	Порядок не важен
Ассоциативность	$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$	Группировка не важна
Нулевой вектор	$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$	Результат не меняется
Противоположные	$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$	Сумма равна нулю

Таблица показывает основные свойства сложения и помогает быстро запомнить, как ведут себя векторы при разных комбинациях.

Сложение векторов похоже на обычное арифметическое: можно менять порядок и группировку, а нулевой и противоположный векторы ведут себя особым образом.

Свойства сложения векторов в школьном курсе геометрии

Почему диагональ показывает сумму

Сначала один, потом другой

Если пройти по первому вектору, а затем по второму, получится тот же итог, что и у диагонали параллелепипеда, построенного из этих векторов.

1

Параллельные рёбра равны

Противоположные рёбра параллелепипеда параллельны и равны, поэтому перенос вектора не меняет его длину и направление. Фигура сохраняет одинаковые шаги на разных сторонах.

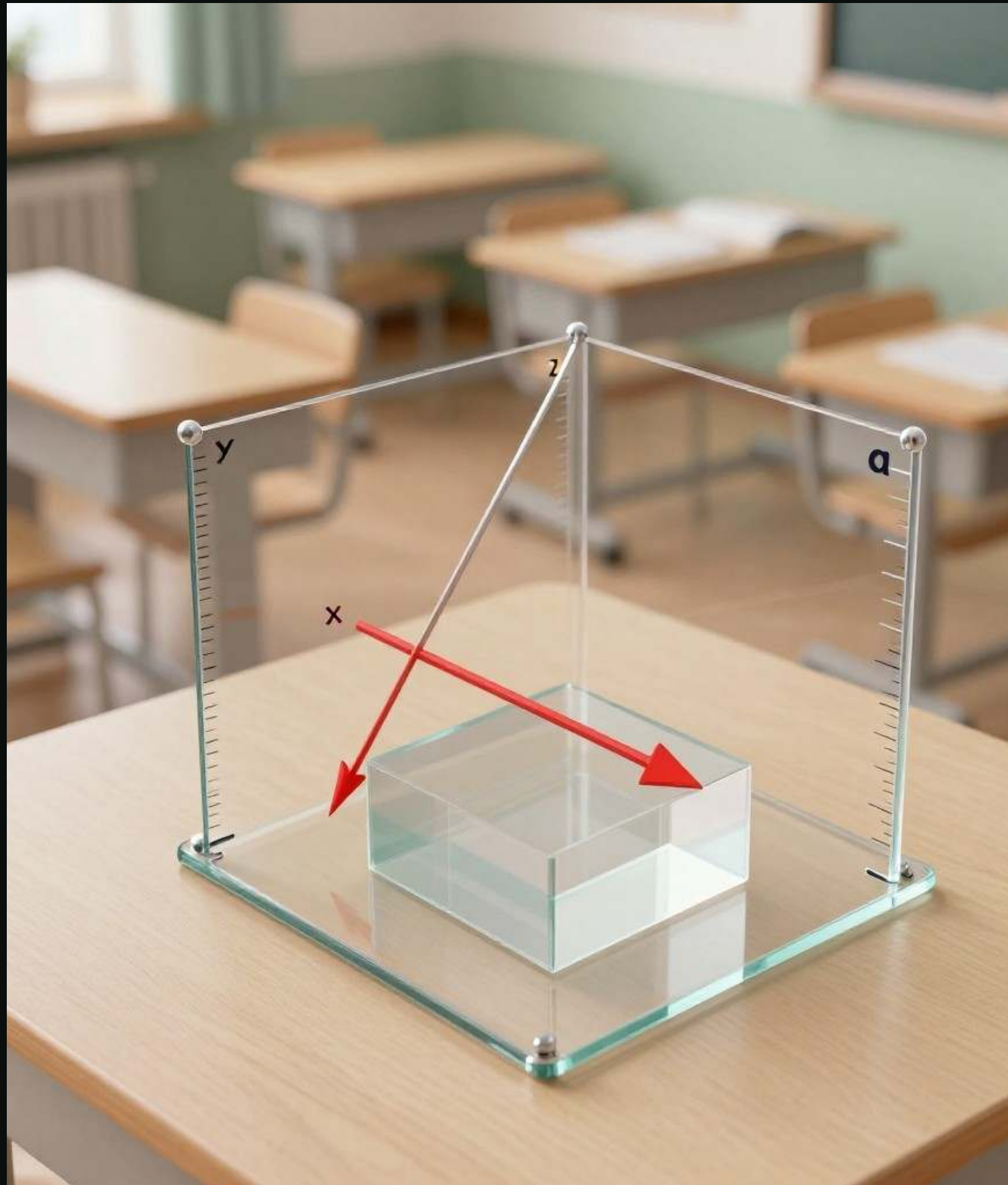
2

Диагональ как итог

Диагональ соединяет начальную и конечную точки движения. Она показывает не отдельный шаг, а весь результат сразу, поэтому и обозначает сумму двух векторов.

3

Связь с координатами векторов



Сложение по осям

Если вектор $\vec{a}$ имеет координаты (x_1, y_1, z_1) , а $\vec{b} — (x_2, y_2, z_2)$, то их сумма находится по каждому направлению отдельно.

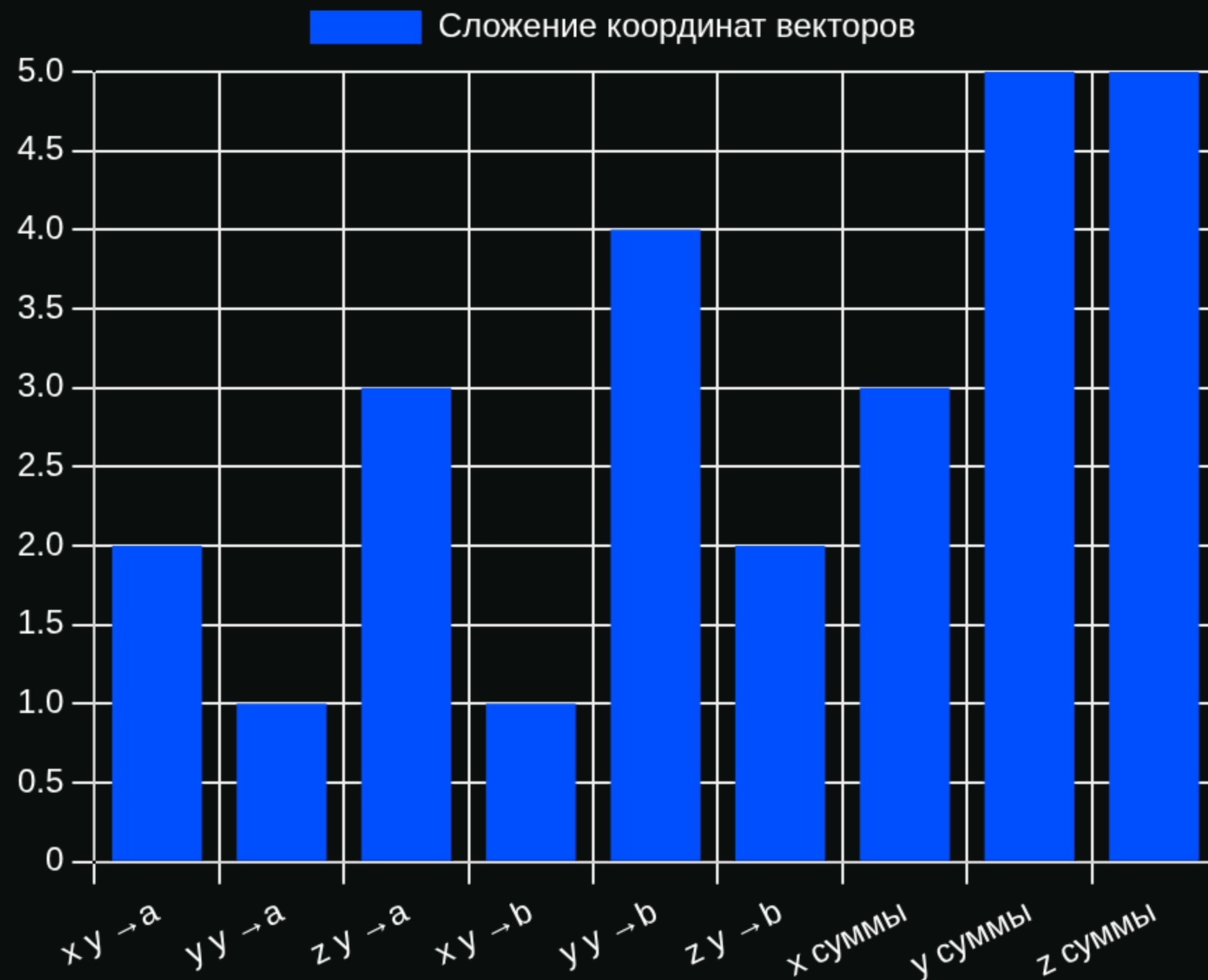
Единое правило

Координаты складывают попарно: x с x , y с y , z с z . Благодаря этому можно получить результат без построения всей фигуры.

Проверка результата

Такой способ удобен для контроля чертежа в пространстве: если координаты совпали, значит, сумма записана верно и направление итогового вектора выбрано правильно.

Как складываются координаты

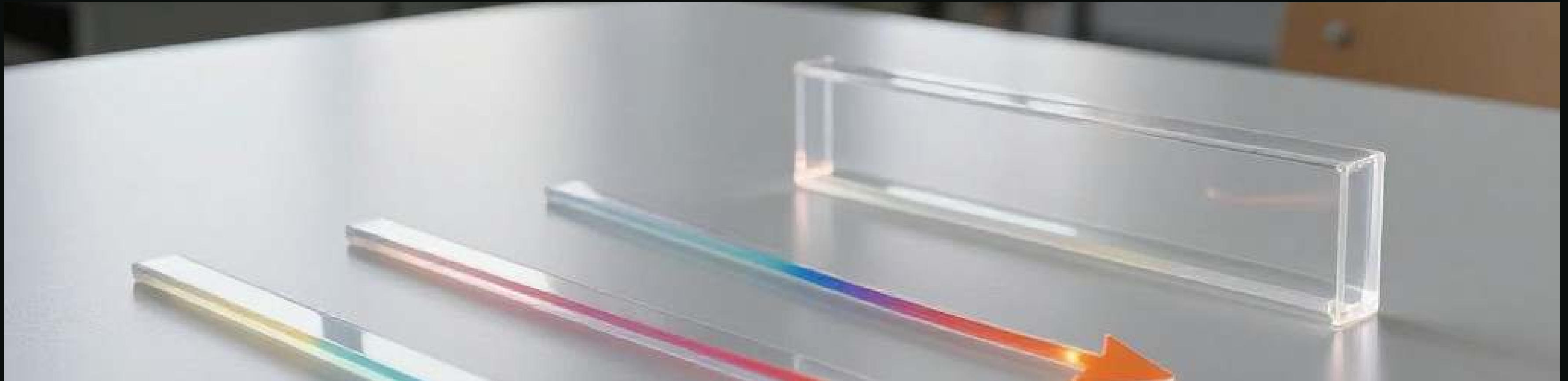


На примере видно, что каждую координату складывают отдельно, не смешивая оси и не изменяя знак чисел.

Результат легко проверить: по каждой оси сумма равна соответствующим компонентам двух векторов. Это делает вычисления короткими и надёжными.

Пример из условия: $\rightarrow a = (2, 1, 3)$, $\rightarrow b = (1, 4, 2)$, $\rightarrow a + \rightarrow b = (3, 5, 5)$.

Пример из пространственного движения



「1」

Первое перемещение

Вектор $\rightarrow a$ можно представить как путь: 3 м вправо, 2 м вперед и 1 м вверх. Такой разбор помогает увидеть, как одно движение задаёт итоговое положение точки в пространстве.

「2」

Второе перемещение

Вектор $\rightarrow b$ добавляет ещё 1 м вправо, 3 м вперед и 2 м вверх. Если начать из той же точки, оба вектора можно сложить геометрически без измерения всех сторон по отдельности.

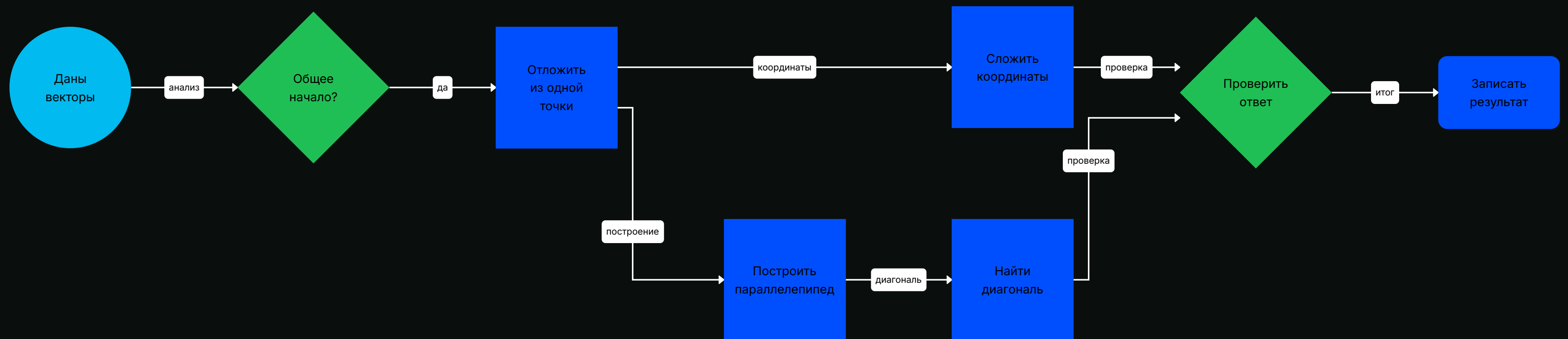
「3」

Итоговый путь

Сумма $\rightarrow a + \rightarrow b$ даёт перемещение на 4 м вправо, 5 м вперед и 3 м вверх. Этот результат совпадает с пространственной диагональю параллелепипеда, построенного на двух векторах.

Алгоритм решения задач на сложение векторов

Последовательность действий: от анализа данных к записи ответа.



Типичные ошибки при сложении векторов

Складывают длины

Нельзя заменять сложение векторов простым сложением их длин. Вектор важен не только размером, но и направлением, поэтому одинаковые длины могут давать разные результаты.

Забывают переносить

Векторы можно параллельно переносить, не меняя длину и направление. Это удобно при построении, но важно сохранять одинаковую ориентацию, иначе фигура будет построена неверно.

Берут сторону вместо диагонали

При построении параллелепипеда искомым результатом является диагональ, выходящая из общего начала. Если провести сторону, получится один из векторов, а не их сумма.

Путают направление

Итоговый вектор должен показывать правильное направление. Если перепутать его, ответ может оказаться противоположным действию, которое изображено на чертеже или в условии задачи.

Складывают не те оси

В координатах нужно складывать только одинаковые компоненты: x с x , y с y , z с z . Ошибка в одной оси сразу даёт неправильный результат и неверную точку в пространстве.

Проверка на примерах

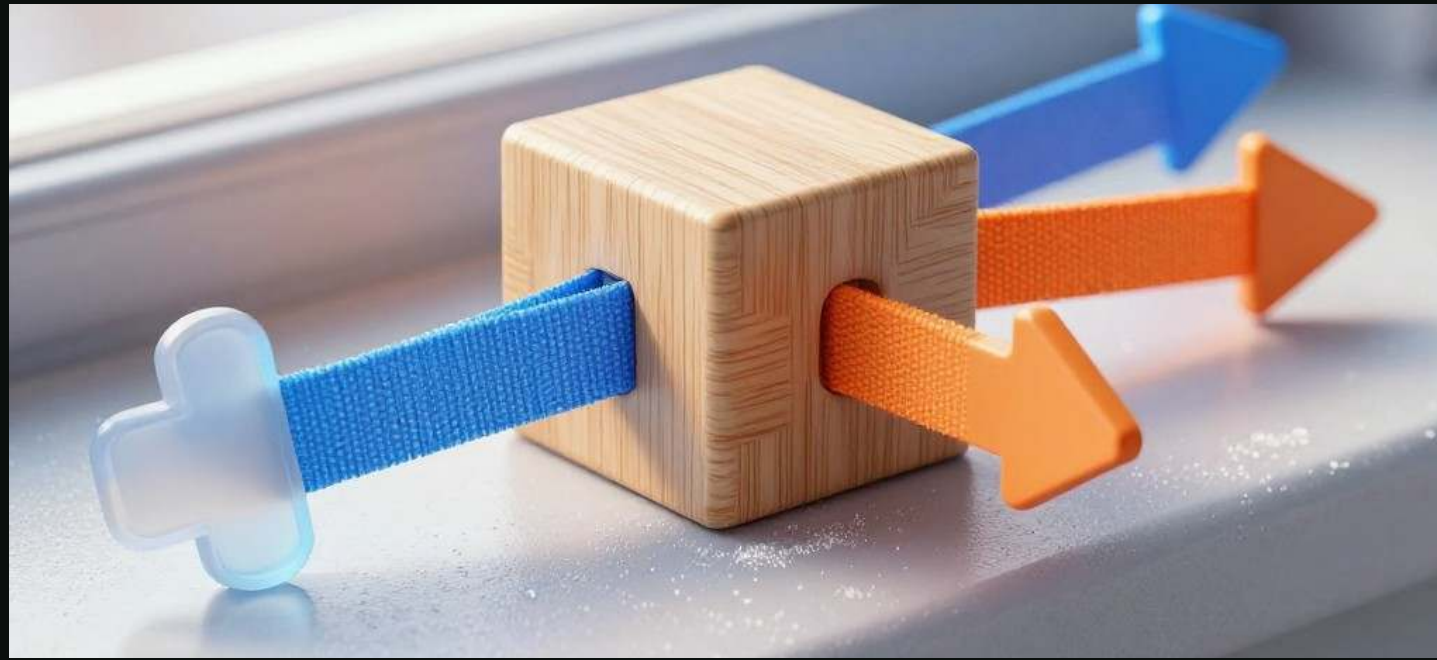
Во всех примерах координаты складываются по одноимённым осям, а знак каждой координаты сохраняется.

Сложение выполняется по каждой координате отдельно; противоположные значения могут взаимно уничтожаться, а нулевой результат по одной оси не мешает другим компонентам.

Векторы	Сумма	Вывод
$(1,2,0)+(2,1,3)$	$(3,3,3)$	Координаты сложены
$(0,4,1)+(-1,2,2)$	$(-1,6,3)$	Знак сохранён
$(3,0,2)+(-3,1,1)$	$(0,1,3)$	Ось x сократилась

Учебные примеры для проверки правила сложения векторов в координатах.

Связь с физикой и реальной жизнью



Силы, которые работают вместе

Если одну силу направить вправо, а другую — вперед, тело начнёт двигаться по итоговому направлению, которое получается как их сумма. На рисунках это удобно показать двумя стрелками и одной диагональю, соединяющей начало и результат.

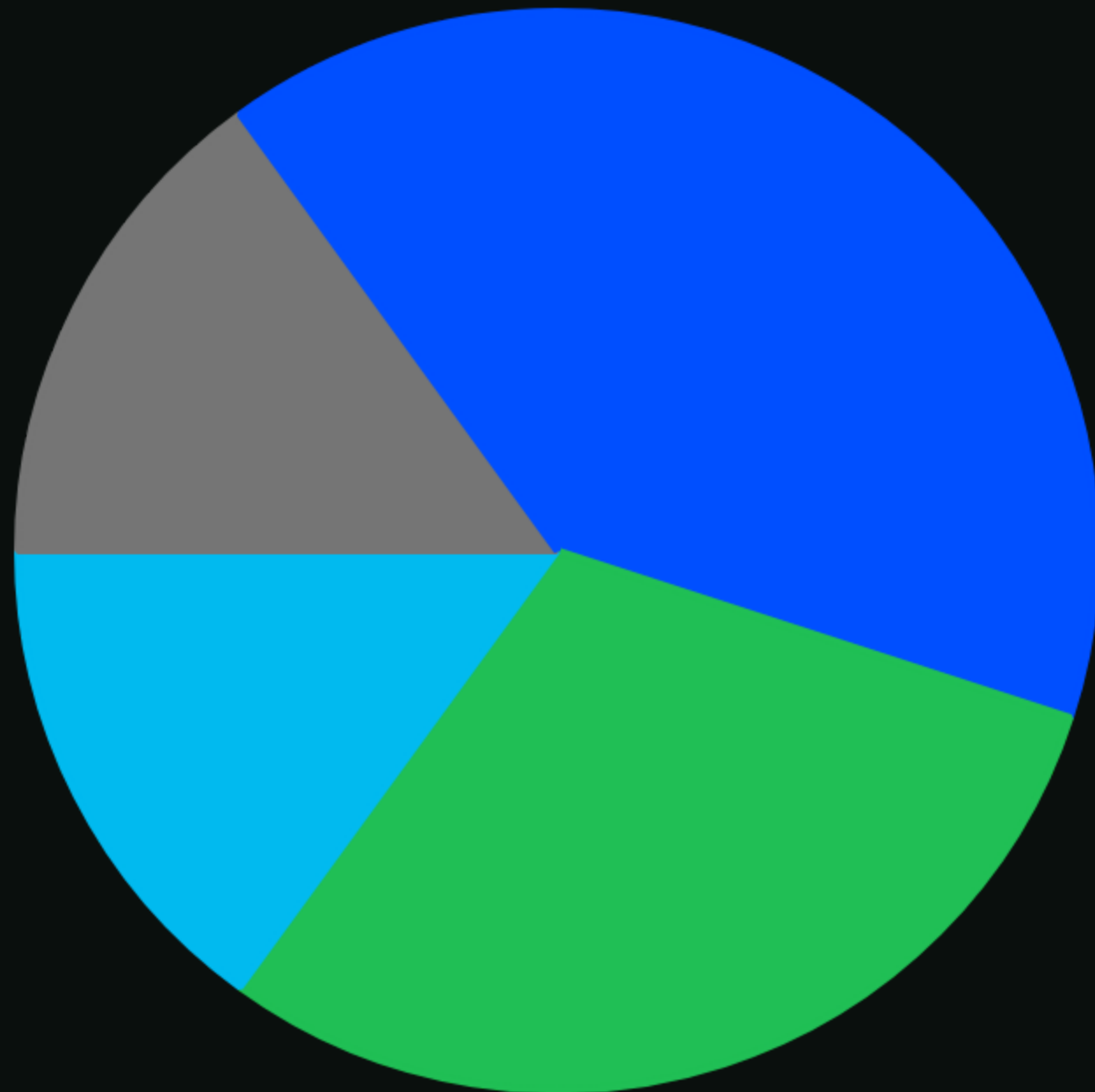


Путь в навигации и движении

В навигации похожий принцип помогает складывать несколько участков маршрута. Лодка, тележка или робот может сначала сместиться в одном направлении, а затем в другом, и конечная точка покажет общий путь без лишних построений.

Где применяется сложение векторов

Геометрия Физика Навигация
Компьютерная графика 3D-моделирование



Правило особенно полезно там, где нужно понять общий результат нескольких направленных действий или перемещений.

Больше всего векторы нужны в геометрии и физике, но их значение заметно и в цифровых технологиях, где важна работа с пространством.

Учебное распределение для наглядного сравнения областей применения, 2025.

Когда правило параллелепипеда подходит

Два вектора из одной точки

Сначала проверяют, что векторы можно отложить из общего начала. Именно для такой ситуации правило параллелепипеда даёт наглядный и точный результат.

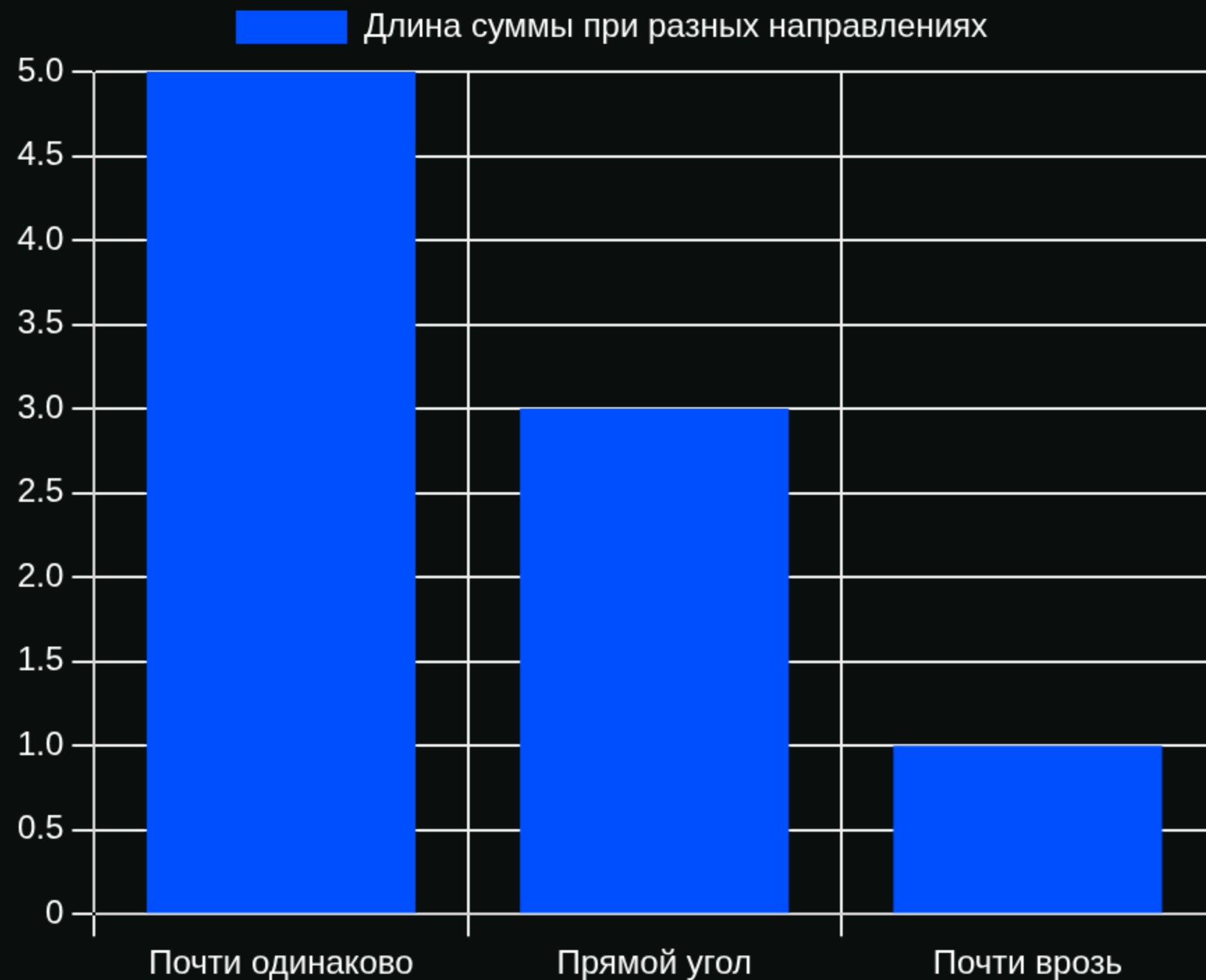
Сложение по очереди

Если в задаче больше двух векторов, их складывают последовательно: сначала находят сумму двух, затем добавляют следующий. Так сохраняется понятная геометрическая схема.

Пространственные задачи

Метод особенно удобен в задачах на перемещение, силы и координаты, когда рисунок трудно свести к плоскости и важно представить объёмную фигуру.

Как направление влияет на результат

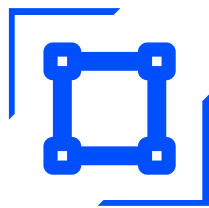


При одинаковых длинах векторов итог может сильно меняться, хотя сами векторы не становятся длиннее или короче.

Чем ближе направления векторов, тем больше их сумма; чем сильнее они расходятся, тем меньше итоговый вектор.

Схематический учебный пример для сравнения влияния угла между векторами, 2025.

Главная формула и смысл правила



Запись суммы

Основная запись $\vec{a} + \vec{b}$ означает один итоговый вектор, который получают из двух векторов с общим началом. На рисунке он совпадает с диагональю параллелепипеда.



Геометрический смысл

Два отдельных перемещения можно заменить одним общим. Поэтому правило помогает быстро увидеть конечное положение точки, не проходя каждый участок движения отдельно.



Координатный смысл

Если векторы заданы координатами, складывают соответствующие компоненты по каждой оси. Так рисунок и числа описывают один и тот же результат разными способами.

Итоги урока

Правило параллелепипеда показывает, как два вектора с общим началом превращаются в один итоговый вектор. Это помогает понимать рисунок, координаты и движение в пространстве.