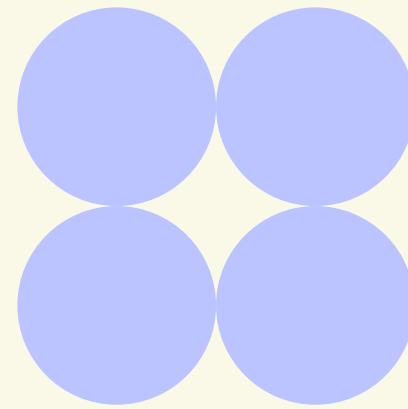


The background features a repeating pattern of overlapping circles. Some circles are light gray, while others contain images of geometric shapes like triangles and a wooden prism, or a close-up of a wooden surface. A single gold-colored pushpin is visible in the upper center, its head resting on a light gray circle and its point on a circle containing a wooden prism.

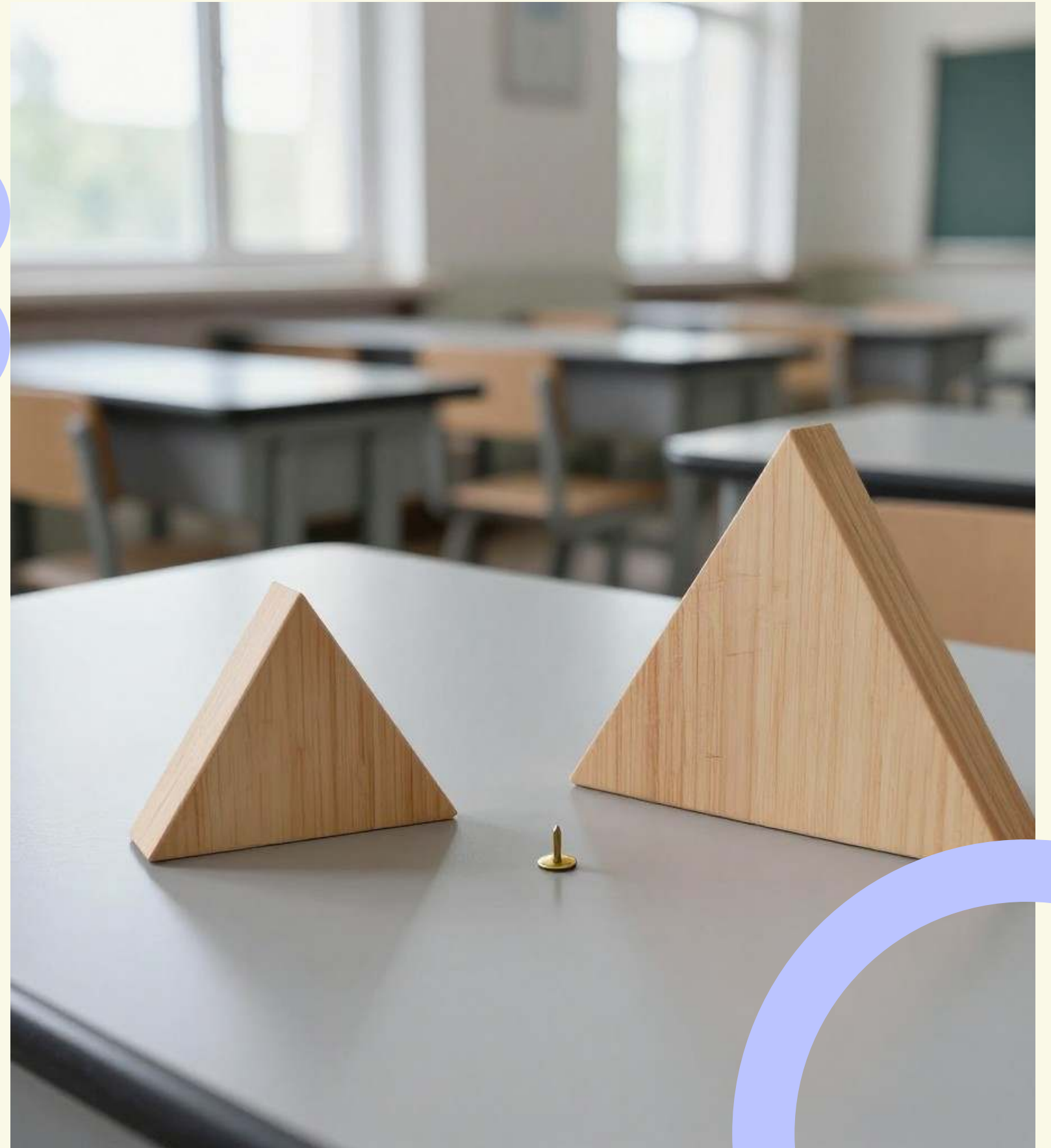
Гомотетия: изменение размера фигур в геометрии

Гомотетия сохраняет форму, но меняет масштаб относительно центра. Разберём ключевые элементы и правила.

Зачем нужна гомотетия в школьной геометрии



Гомотетия связывает темы подобия, координат, масштабирования и построений. Она помогает находить образы точек и коэффициент по условию, а также понимать увеличение и уменьшение на чертежах, в планах и макетах.



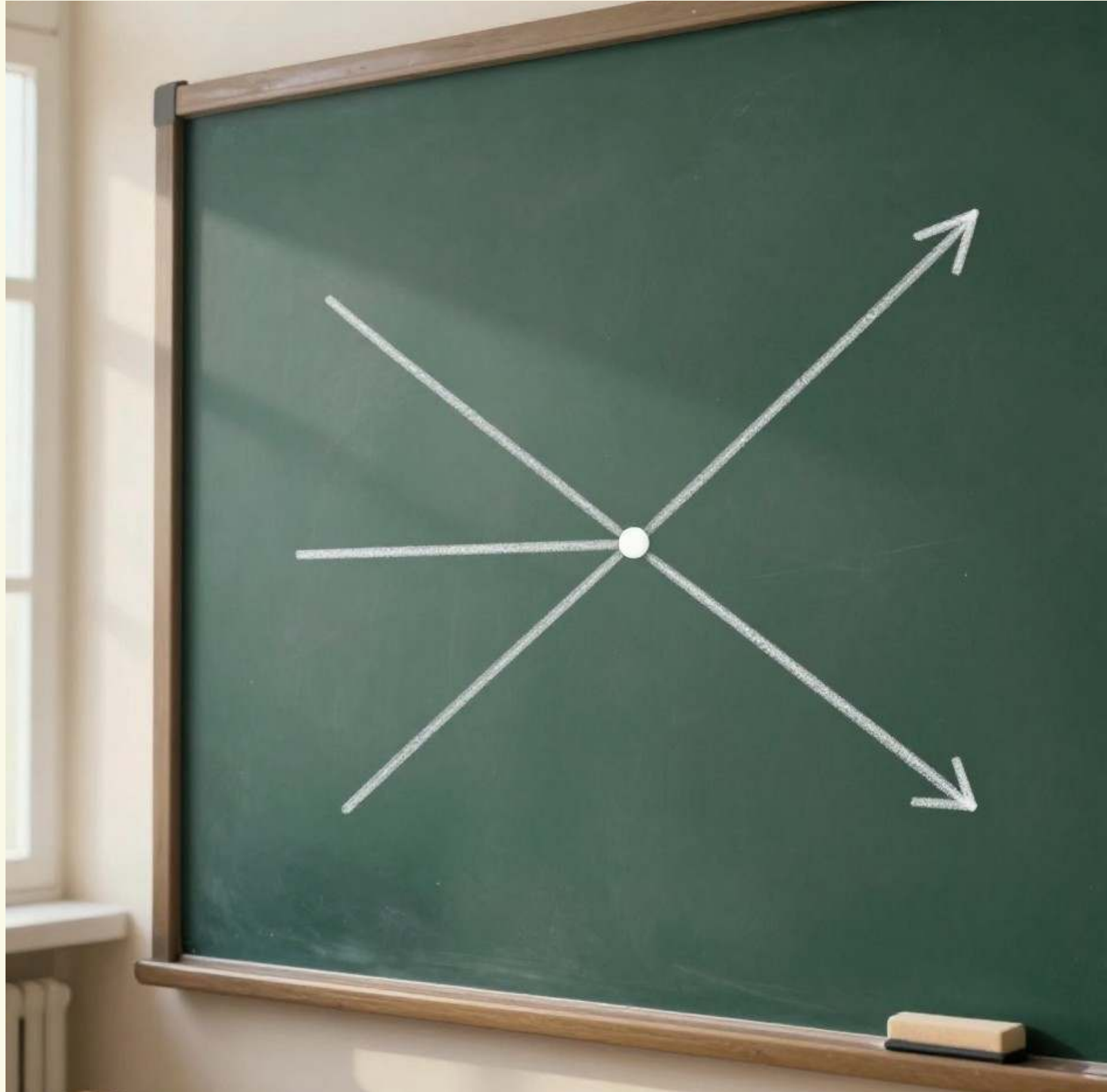
Определение гомотетии

Гомотетия с центром O и коэффициентом k переводит точку A в точку A' , причём точки O , A и A' лежат на одной прямой. Это превращение задаёт связь между положениями исходной и образной точек.

Длина отрезка OA' равна $|k| \cdot OA$. Значит, при $k > 1$ фигура увеличивается, при $0 < k < 1$ — уменьшается. При $k = 1$ образ совпадает с исходной фигурой, то есть преобразование не меняет точки.

Если k отрицательный, например $k < 0$, то точка A' оказывается по другую сторону от центра O . В этом случае меняется не расстояние от центра, а направление луча относительно центра.

Центр гомотетии и расположение образов точек



Луч из центра — главный ориентир

Чтобы построить образ любой точки, нужно провести через центр гомотетии O прямую (точнее, луч), содержащую исходную точку. Для каждой вершины многоугольника соответствует своя прямая через центр. Это делает построение системным и одинаковым для всех точек.



Как знак коэффициента меняет сторону

Если коэффициент k положительный, образ точки лежит на том же луче, что и исходная. При отрицательном k образ оказывается на противоположном луче. На схеме удобно показывать центр, исходную фигуру, её образ и отрезки от центра к соответствующим точкам.



Значение коэффициента гомотетии

k	Как меняется размер	Пример смысла
2	увеличение в 2 раза	$OA' = 2 \cdot OA$
1/2	уменьшение в 2 раза	$OA' = 1/2 \cdot OA$
1	не меняется	фигура совпадает
-1	центральная симметрия	на противоположном луче
-3	увеличение в 3 раза	луч меняется на противоположный

Кoeffициент задаёт и степень изменения размера, и расположение образа относительно центра.

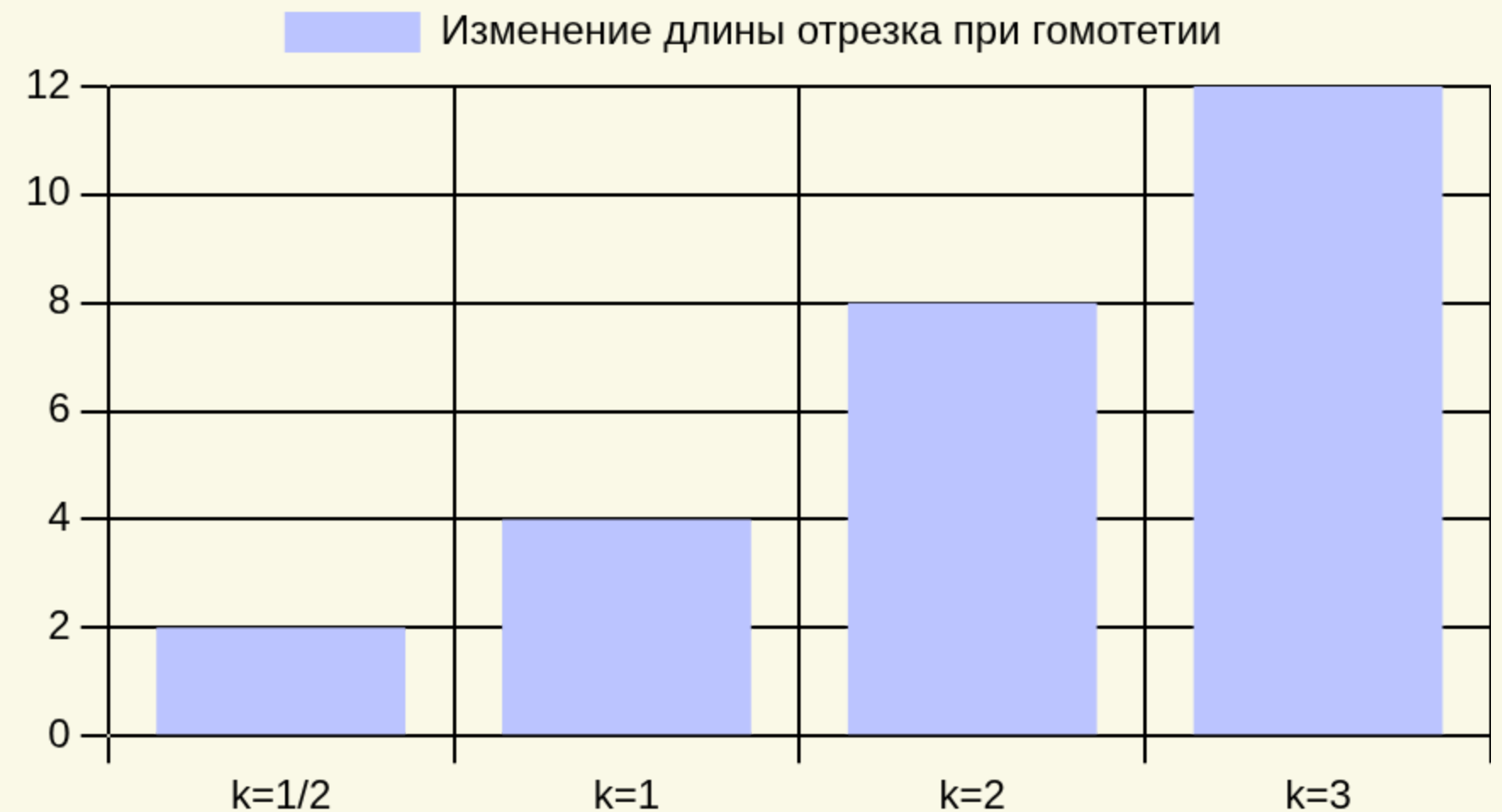
Модуль $|k|$ определяет изменение размеров, а знак k отвечает за то, на какой стороне от центра окажется образ.

Составлено по материалам темы «Гомотетия» (школьный курс 9 класса)

Как меняется длина отрезка при гомотетии

Здесь длина 4 см умножается на модуль коэффициента. Поэтому при любом k схема будет линейной и легко проверяемой.

Зависимость длины от k прямая: увеличили коэффициент — увеличилась длина в $|k|$ раз. Это удобно для быстрой проверки ответов.



Расчёт по условию: исходная длина 4 см; значения для $k=1/2, 1, 2, 3$

Основные свойства гомотетии

Гомотетия сохраняет углы: образ любой фигуры получается «повёрнутым» по масштабу, но без изменения формы. Поэтому исходная и полученная фигуры оказываются подобными.



Прямые переходят в прямые, а отрезки — в отрезки. Окружности переходят в окружности, причём радиусы меняются так же, как и линейные размеры. Параллельность прямых сохраняется, если ни одна из них не проходит через центр.



Периметр увеличивается или уменьшается пропорционально модулю $|k|$, а площадь — по квадрату k^2 . Именно эти правила связывают гомотетию с масштабом и задачами на подобие.



Построение образа точки при гомотетии

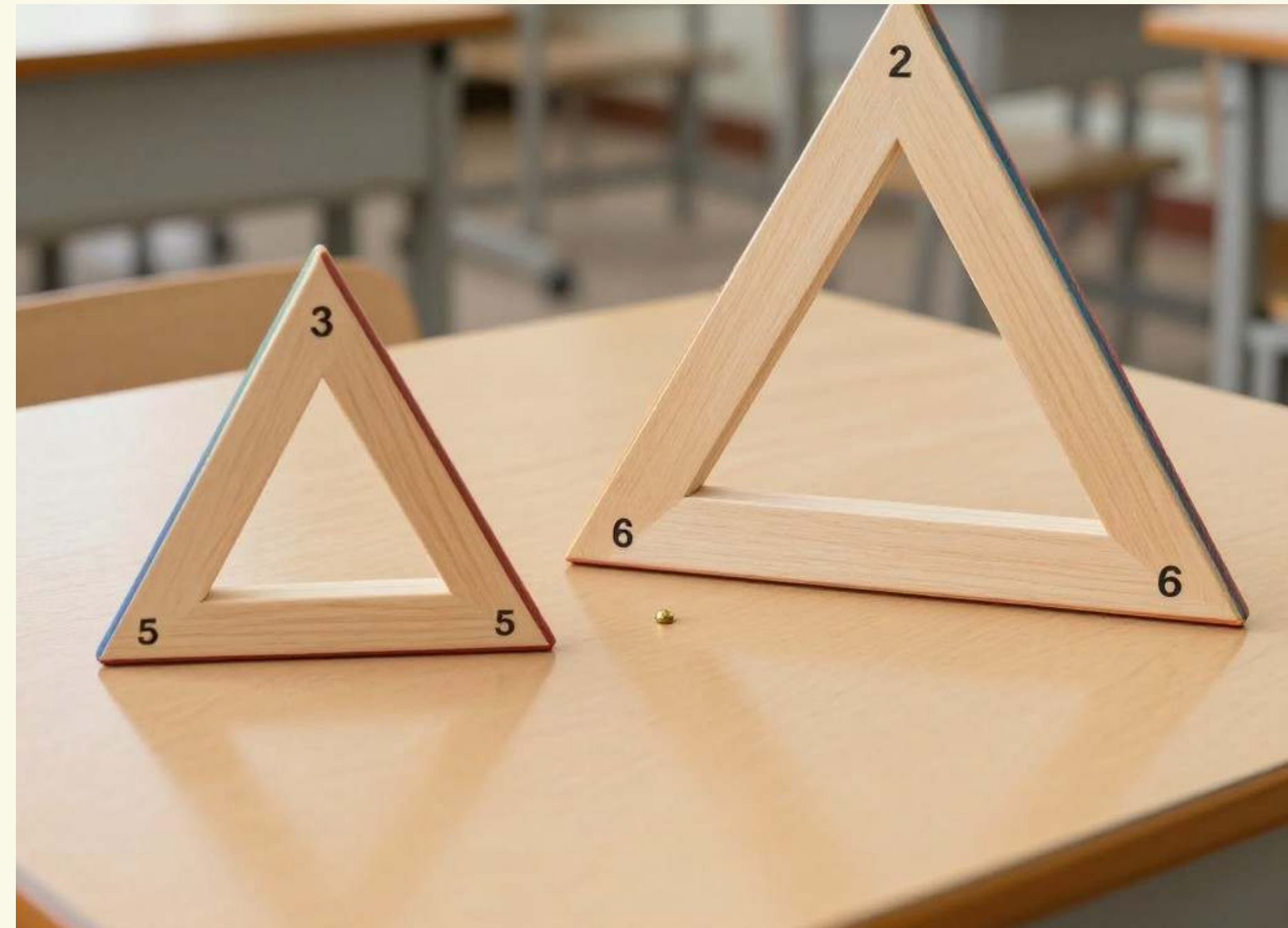
Единый алгоритм: центр $O \rightarrow$ луч $\rightarrow$ масштабирование расстояния



Гомотетия и подобие треугольников

Если два треугольника связаны гомотетией, то они обязательно подобны: их соответствующие углы равны, а стороны относятся друг к другу одинаково. Значит, масштаб задаёт пропорции между сторонами.

Например, треугольник с сторонами 3 см, 4 см и 5 см при коэффициенте 2 переходит в треугольник 6 см, 8 см и 10 см. Это наглядно показывает связь гомотетии с темой подобия в 9 классе.

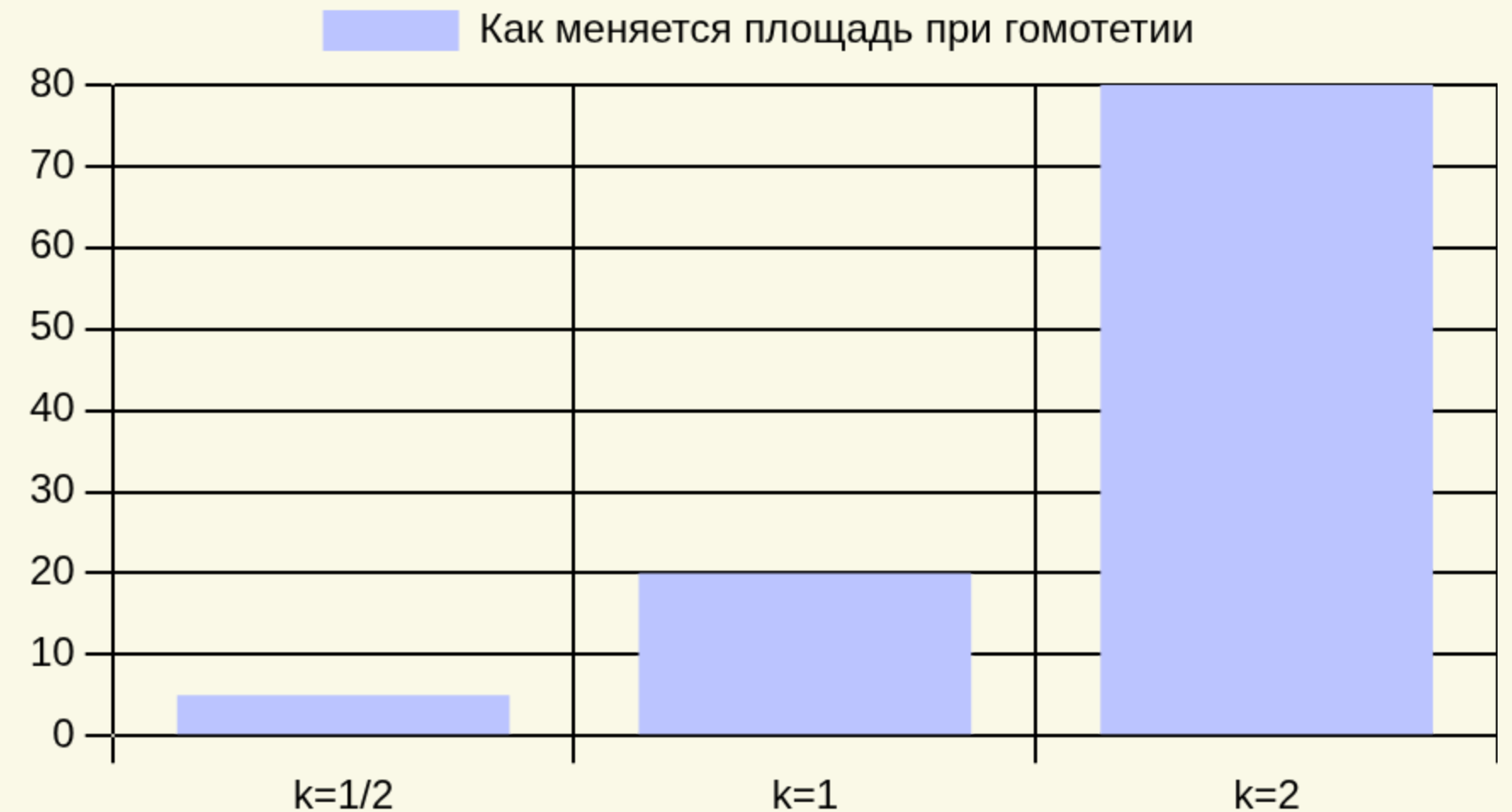


Площадь фигуры при изменении масштаба

При $k=1/2$ площадь уменьшается в 4 раза, а при $k=2$ — увеличивается в 4 раза. Для исходных 20 см^2 получаются 5, 20 и 80 см^2 .



График подтверждает правило: площадь изменяется по квадрату коэффициента. Поэтому при работе с масштабом полезно сразу думать о k^2 .



Расчёт по условию: исходная площадь 20 см^2 ; коэффициенты $k=1/2, 1, 2$

1:1000

При таком масштабе все размеры на карте становятся меньше пропорционально, как при гомотетии.

Учебные материалы по геометрии и географической картографии (школьный курс)

Масштаб 1:100 означает рост реальности в 100 раз относительно 1 см на плане; 1:1000 — в 1000 раз. Это помогает переносить размеры на чертёж и обратно.

Примеры масштабов в реальных задачах

Сопоставьте, чему равен 1 см на изображении и во сколько раз нужно изменить длины, чтобы получить реальные величины.



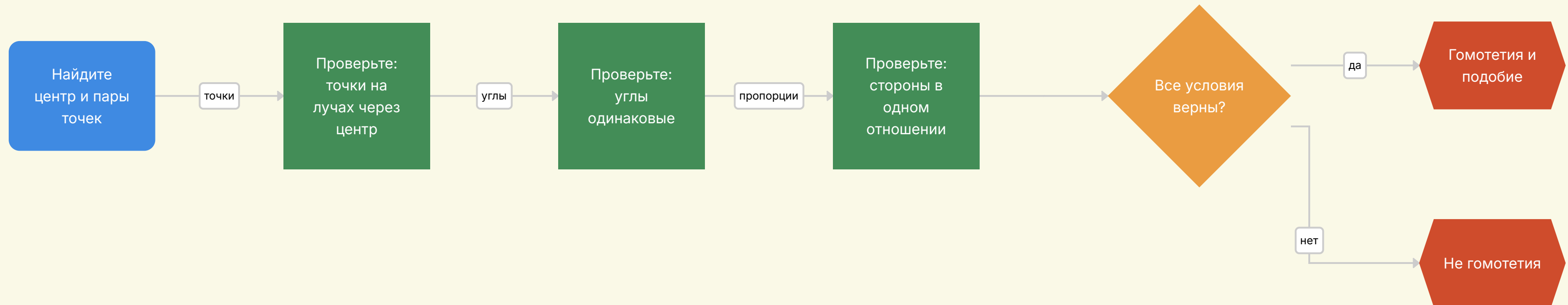
Разные масштабы по-разному меняют длины, но действуют по одному принципу: изображение получается гомотетией с коэффициентом, равным отношению размеров.

Масштаб	1 см на рисунке	Коэффициент уменьшения	Где применяют
1:50	50 см	1/50	Чертёж
1:10 000	100 м	1/10 000	Карта
1:200	200 см	1/200	Модель

Школьная методика работы с масштабом (курс геометрии и основы картографии)

Как распознать гомотетию в задаче

Проверка гомотетии опирается на геометрические связи между соответствующими точками и пропорции фигур.



Отрицательный коэффициент гомотетии

Если $k < 0$, то образ точки лежит на противоположной стороне от центра. Говоря проще, точка как бы «переворачивается» относительно центра, а затем масштабируется по модулю.



Коэффициент $k = -1$ соответствует центральной симметрии: расстояния до центра остаются теми же, но точки меняют сторону относительно центра гомотетии.



Знак коэффициента влияет на расположение и ориентацию, а не на итоговую величину длины: для размеров важен модуль $|k|$, а для «стороны» — сам k .

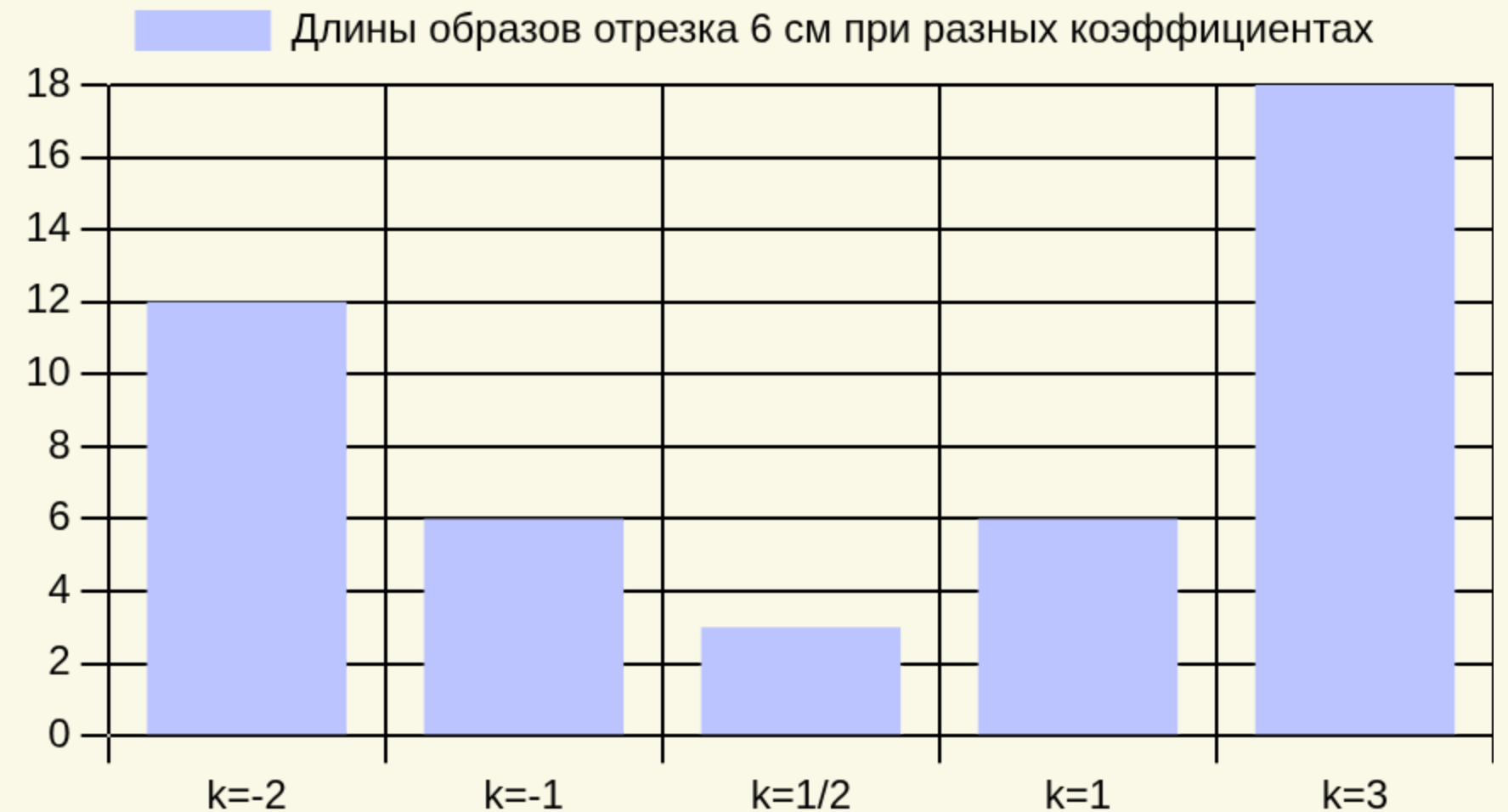


Сравнение коэффициентов на одном отрезке

При $k=-2$ и $k=2$ длина была бы одинаковой, потому что в формуле используется $|k|$. Важно различать знак: он меняет сторону относительно центра.



График подтверждает: длина образа зависит от модуля коэффициента. Знак влияет только на взаимное расположение точек относительно центра гомотетии.



Расчёт по зависимости длины отрезка: $|k| \cdot 6$ см (данные задачи, без внешних источников)

Гомотетия в архитектуре, дизайне и моделях

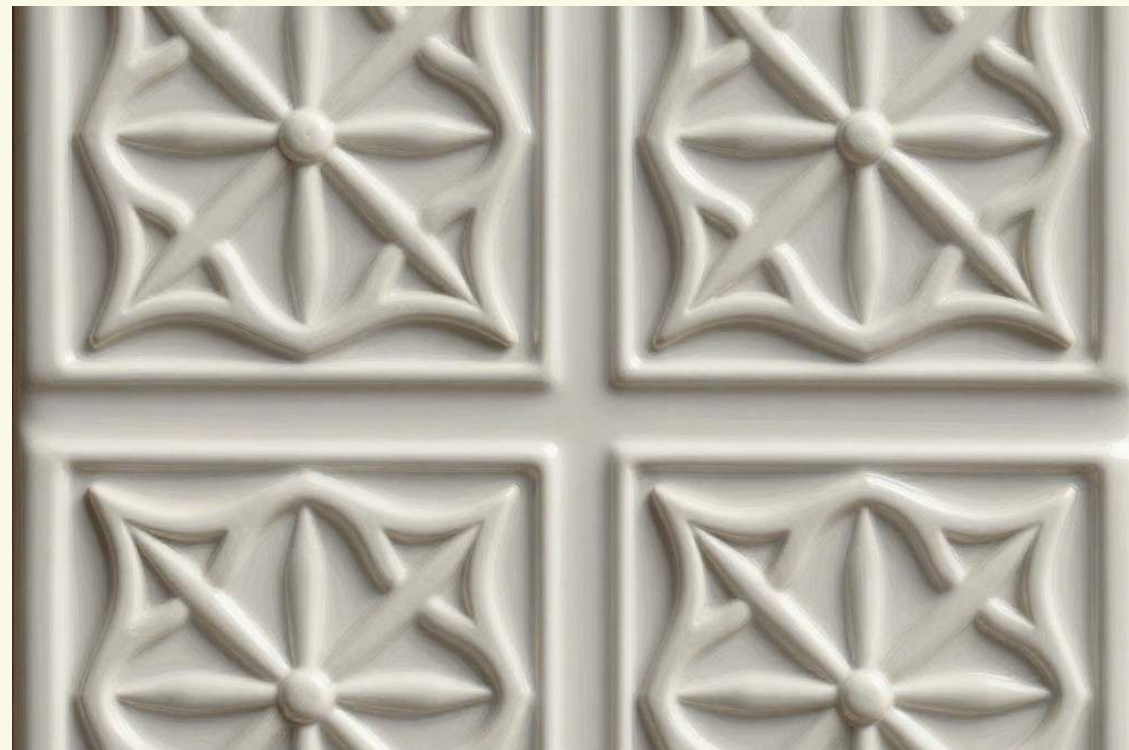
1 Макет района: сохраняем пропорции

На строительных макетах здания и кварталы часто выполняют в уменьшенном масштабе. Если уменьшение подобрать как гомотетию, то фасады сохраняют форму, а размеры деталей меняются пропорционально, без искажений углов.



2 Узор в двух размерах

В дизайне интерьеров один и тот же декоративный элемент может повторяться крупнее и мельче. Такая «перекладка» обычно сохраняет форму мотива, потому что все соответствующие точки связаны через один центр и одинаковый коэффициент.



3 От чертежа к прототипу

Технические модели и прототипы создают, когда нужно проверить идею до производства. Гомотетия помогает перенести геометрию изделия из чертежа в уменьшенную копию, сохраняя сходство и пропорции.



Типичные ошибки при изучении гомотетии

Путают гомотетию с параллельным переносом: при гомотетии соответствующие точки соединяются прямыми через один общий центр, а не сдвигаются одинаковым вектором.

Неверно учитывают знак коэффициента и строят образ на той же стороне от центра. При $k < 0$ образ точки оказывается по другую сторону, хотя модуль $|k|$ задаёт масштаб.

Считают, что площадь меняется в $|k|$ раз. На самом деле она меняется в k^2 раз, поэтому при увеличении в 2 раза площадь становится больше в 4 раза.

Переоценивают роль расстояния до центра: длина отрезка меняется пропорционально $|k|$, но нельзя подменять эту величину расстоянием между произвольными точками без проверки соответствий.

Формулы, которые используются в задачах

Связь	Как меняется	Степень
$OA' = k \cdot OA$	Отрезок до центра	линейно
$Периметр' = k \cdot Периметр$	Периметры	линейно
$Площадь' = k^2 \cdot Площадь$	Площади	квадратично
Углы сохраняются	Форма по углам	без изменения



Используйте эти зависимости, чтобы вычислять образы размеров, проверять подобие и решать задачи на масштабирование.

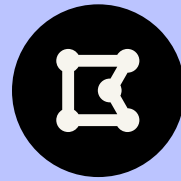
Линейные величины масштабируются по $|k|$, а площади — по k^2 . Это ключ к быстрым проверкам ответов и к нахождению коэффициента.

Основные типы задач на гомотетию



Находят образ точки

По центру и коэффициенту определяют точку A' , лежащую на луче через центр. Часто нужно сначала измерить OA , а затем отложить $|k| \cdot OA$.



Строят образ фигуры

Задают исходный многоугольник и требуют построить его образ. Решение сводится к построению образов всех вершин и соединению их в новом масштабе.



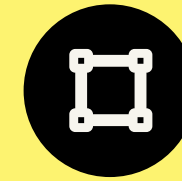
Вычисляют коэффициент

По известным отрезкам между соответствующими точками находят k или $|k|$. Важно сохранять соответствие «какая точка с какой» и учитывать центр.



Проверяют подобие фигур

Определяют, связаны ли фигуры гомотетией, по одинаковым углам и одинаковым отношениям сторон. Если условия нарушены, преобразование не является гомотетией.



Решают с координатами и расстояниями

Когда координаты заданы, используют пропорции по расстояниям до центра или равенство направлений лучей. На практике это сокращает построения на чертеже.



Гомотетия: важное в двух шагах

Гомотетия сохраняет форму: углы остаются равными, стороны пропорциональны. Линейные размеры меняются в $|k|$ раз, площади — в k^2 раз. Это связывает подобие с масштабами карт, планов и чертежей.

