

Свойства предела функции в точке и вычисление пределов

Пределы: основа анализа, непрерывности и первых
серьёзных вычислений.



Зачем нужны пределы в старших классах?

Предел показывает, к чему стремится функция при приближении аргумента к заданной точке. Это помогает изучать разрывы, асимптоты и понимать, как из предела рождается производная.



Интуитивный смысл предела функции

1

Смысл приближения

Если при значениях x , близких к a , значения $f(x)$ становятся сколь угодно близкими к L , то именно L называют пределом функции в точке a .



2

Важна окрестность точки

Для предела решающее значение имеет поведение функции рядом с точкой, а не само значение $f(a)$: точка может быть даже не принадлежать области определения.

3

Школьные примеры

Этот подход хорошо виден на многочленах, рациональных выражениях, функциях с корнями и на примерах с устранимым разрывом, где график «почти» проходит через одну точку.

Окрестности точки и числа на графике



ε -окрестность

Она задаёт допустимую близость значений функции к числу L : чем меньше ε , тем уже горизонтальная полоса, в которой должны оказаться значения $f(x)$.

δ -окрестность

Она ограничивает значения аргумента около точки a : на графике это узкая вертикальная полоса, из которой берутся все x , кроме самой точки a .

Наглядная интерпретация

Если для всех x из вертикальной полосы график остаётся внутри горизонтальной полосы, то функция приближается к пределу одинаково с обеих сторон.

Определение предела по ε – δ

1

Формулировка

Число L является пределом $f(x)$ при $x \rightarrow a$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta > 0$ так, чтобы из $0 < |x - a| < \delta$ следовало $|f(x) - L| < \varepsilon$.

2

Что означает условие

Оно требует, чтобы значения функции можно было приблизить к L с любой точностью, если брать x достаточно близко к a , но не саму точку a .

3

Строгость определения

Именно это определение лежит в основе доказательства свойств предела: оно фиксирует количественную близость и устраняет неопределённость интуитивных рассуждений.

4

Практический вывод

В вычислениях важнее не значение функции в точке, а её поведение в окрестности точки, где и решается вопрос о существовании предела.

Односторонние пределы

Предел справа

Правый предел описывает приближение к точке a только при $x > a$. Он особенно удобен для функций, заданных разными формулами на разных промежутках.

Предел слева

Левый предел рассматривает подход к той же точке со стороны $x < a$. Он часто помогает увидеть скачок, разрыв или изменение формулы в точке.

Связь с общим пределом

Двусторонний предел существует лишь тогда, когда оба односторонних предела существуют и совпадают; иначе общий предел в точке отсутствует.

Основные свойства предела функции в точке

Свойство	Формула	Значение
Сумма	$\lim(f+g) = \lim f + \lim g$	Складывать пределы
Произведение	$\lim(fg) = (\lim f) (\lim g)$	Перемножать пределы
Частное	$\lim(f/g) = (\lim f) / (\lim g)$	Делить при ненулевом пределе
Степень	$\lim(f^n) = (\lim f)^n$	Возводить в степень

Если пределы функций существуют, с ними можно выполнять стандартные арифметические действия без потери предельного перехода.

Пределы позволяют переносить обычные действия на предельный переход, что резко упрощает вычисления.

Стандартные свойства предела функции
в школьном курсе алгебры и начала анализа

Теорема о зажатой функции

1

Идея теоремы

Если $g(x)$ заключена между $f(x)$ и $h(x)$, а крайние функции стремятся к одному числу L , то и $g(x)$ имеет предел L .

2

Где она полезна

Теорема особенно эффективна для выражений с синусом, модулем и малыми колебаниями, когда прямое вычисление затруднено, но можно установить границы.

3

Значение для курса

Именно этот приём часто используют при доказательстве первого замечательного предела и при вычислении близких тригонометрических пределов.

Этот предел — базовый инструмент для тригонометрических вычислений и вывода производных синуса и косинуса.

1

— к этому числу стремится отношение синуса к аргументу при малых значениях переменной.

Стандартная формула школьного курса: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x / x = 1$

Он связывает пределы с экспоненциальным ростом, сложными процентами и моделями, где увеличение происходит по шагам.

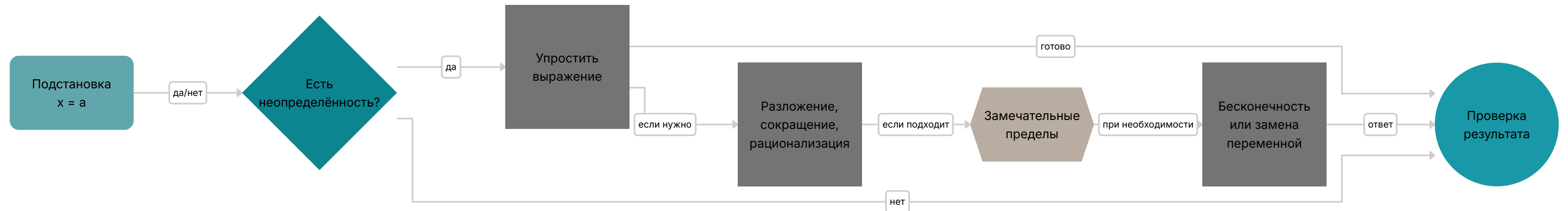
e

— это число получается как предел выражения, описывающего непрерывный рост.

Стандартная формула школьного курса: $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$

Пошаговый алгоритм вычисления предела

Последовательность действий помогает быстро выбрать подходящий метод и проверить ответ.



Пределы многочленов и рациональных функций

1

Многочлен

Для многочлена предел в точке обычно находится прямой подстановкой: если значение аргумента допустимо, то предельное значение совпадает с обычным значением функции.

2

Рациональная функция

У дроби сначала проверяют знаменатель: если он не обращается в ноль, предел также находится подстановкой. Это самый быстрый путь в стандартных заданиях.

3

Неопределённость $0/0$

Когда подстановка даёт $0/0$, выражение нужно преобразовать: разложить на множители, сократить общий множитель или применить рационализацию, чтобы раскрыть скрытую структуру.

Типовые неопределенности

Дробные формы

Неопределённости $0/0$ и ∞/∞ чаще всего возникают в дробях. Чтобы получить ответ, выражение упрощают, выделяя общие множители или старшие степени, а не подставляют число напрямую.

Произведение и разность

Формы $0 \cdot \infty$ и $\infty - \infty$ требуют преобразования в дробь или вынесения общего множителя. Иначе невозможно понять, какой из противоположных факторов определяет итог.

Степенные выражения

Неопределённости 0^0 , 1^∞ и ∞^0 особенно часто встречаются в задачах на рост и убывание. Для них удобно использовать логарифмирование и переход к показательной форме.

Алгебраические приёмы

На практике помогают формулы сокращённого умножения, приведение к общему знаменателю и вынесение старших степеней. Эти действия переводят неопределённый вид в вычислимую форму.

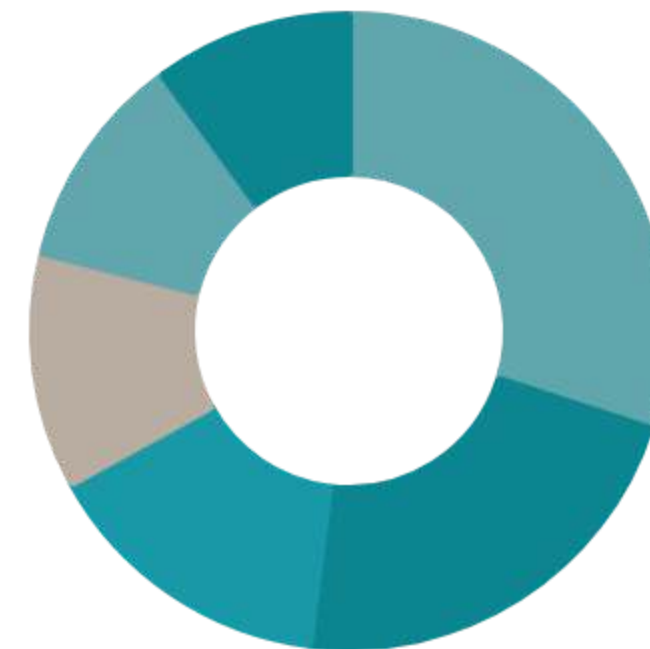
Смысл проверки

Если после преобразований выражение стало стандартным, предел можно найти обычными методами. Важно каждый раз контролировать, не изменили ли преобразования область допустимых значений.

Наиболее частые приемы вычисления пределов

В школьных задачах чаще всего сначала пробуют подстановку, а затем переходят к упрощению выражения, если возникает неопределённость.

Основная нагрузка приходится на простые и универсальные методы; специальные приёмы нужны реже, но они решают самые «трудные» примеры.



Обобщение типовых школьных заданий по теме пределов

Как работает рационализация



Корень, который мешает считать

В выражениях с корнями трудность часто скрыта в разности двух близких чисел. Если умножить дробь на сопряжённое выражение, радикалы исчезают, а неопределённость $0/0$ превращается в обычное алгебраическое выражение, с которым уже можно работать.



Когда дробь становится понятной

Рационализация особенно полезна там, где подстановка сразу не даёт ответа. Например, в пределе с $\sqrt{1+x}-1$ числитель нужно «освободить» от корня, и тогда появляется стандартный результат, который легко проверить вычислением.

Пределы на бесконечности

1

Удаление от начала

Когда аргумент неограниченно растёт по модулю, изучают не значение в точке, а поведение функции вдали от неё. Это позволяет увидеть общий характер графика и его направление.

2

Роль старших членов

Для рациональных функций решающими становятся старшие степени числителя и знаменателя. Именно они определяют, стремится ли функция к нулю, к числу или уходит без границ.

3

Графическое значение

Такие пределы помогают находить горизонтальные асимптоты и сравнивать скорость роста разных функций. Особенно наглядно это видно при сопоставлении многочленов, дробей и показательных выражений.

Предел рациональной функции на бесконечности

Сравнение степеней	Предел при $x \rightarrow \infty$	Итог
Ниже знаменателя	0	Ограничение сверху
Равны	Отношение коэффициентов	Конечное число
Выше знаменателя	Нет конечного	Рост по знаку

Сравнение степеней показывает, к какому типу поведения приводит старший член дроби.

Достаточно сравнить старшие степени: именно они определяют, будет ли предел нулевым, конечным или несуществующим.

Непрерывность как следствие существования предела

Связь с значением функции

Функция непрерывна в точке, когда её предел в этой точке существует и равен самому значению функции. Тогда график проходит через точку без разрыва и скачка.

Классические примеры

Многочлены, степенные функции, тригонометрические функции и их композиции обычно непрерывны в области определения. Для них пределы часто вычисляются напрямую, без специальных преобразований.

Разрыв как сигнал

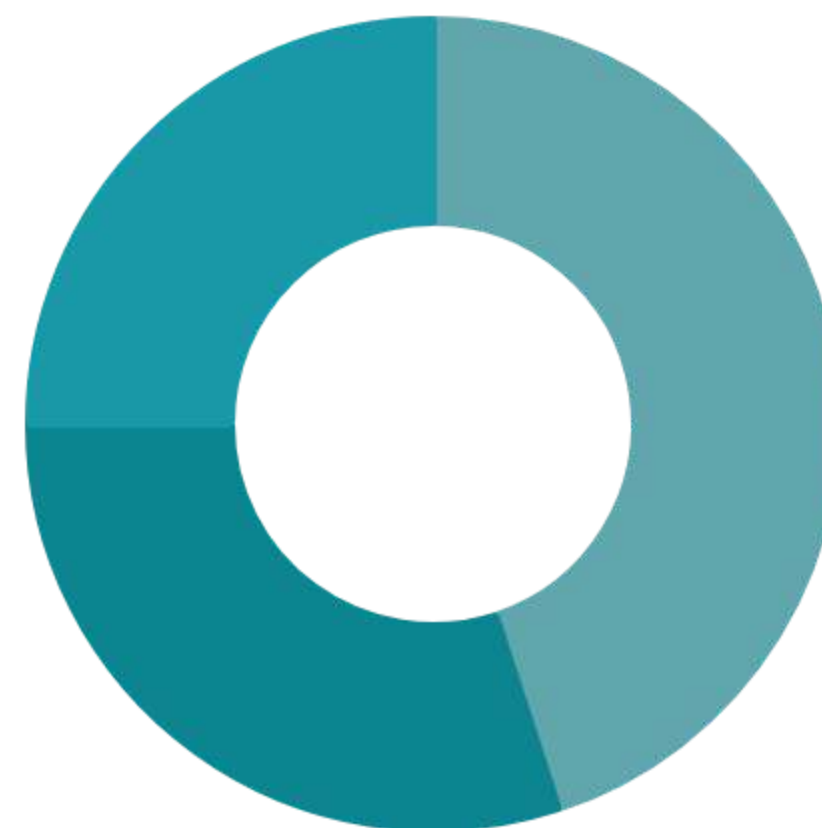
Если предел не существует или не совпадает со значением функции, возникает разрыв. Это помогает заранее понять, где график может иметь «дыру», скачок или вертикальный разлёт.

Три типичных поведения функции около точки

Одна и та же точка может вести к разным типам разрыва, поэтому важно смотреть не только на значение функции, но и на её окрестность.

Чаще всего различают три ситуации: обычное приближение, скачок между сторонами и бесконечный рост, указывающий на вертикальную асимптоту.

Конечный предел Скачок Вертикальная асимптота



Классификация поведения функции в окрестности точки

Пределы как инструмент анализа функции

Пределы превращают исследование графика в последовательную работу с окрестностью точки. С их помощью находят значения, выявляют разрывы, вычисляют асимптоты и подготавливают переход к производной и непрерывности.