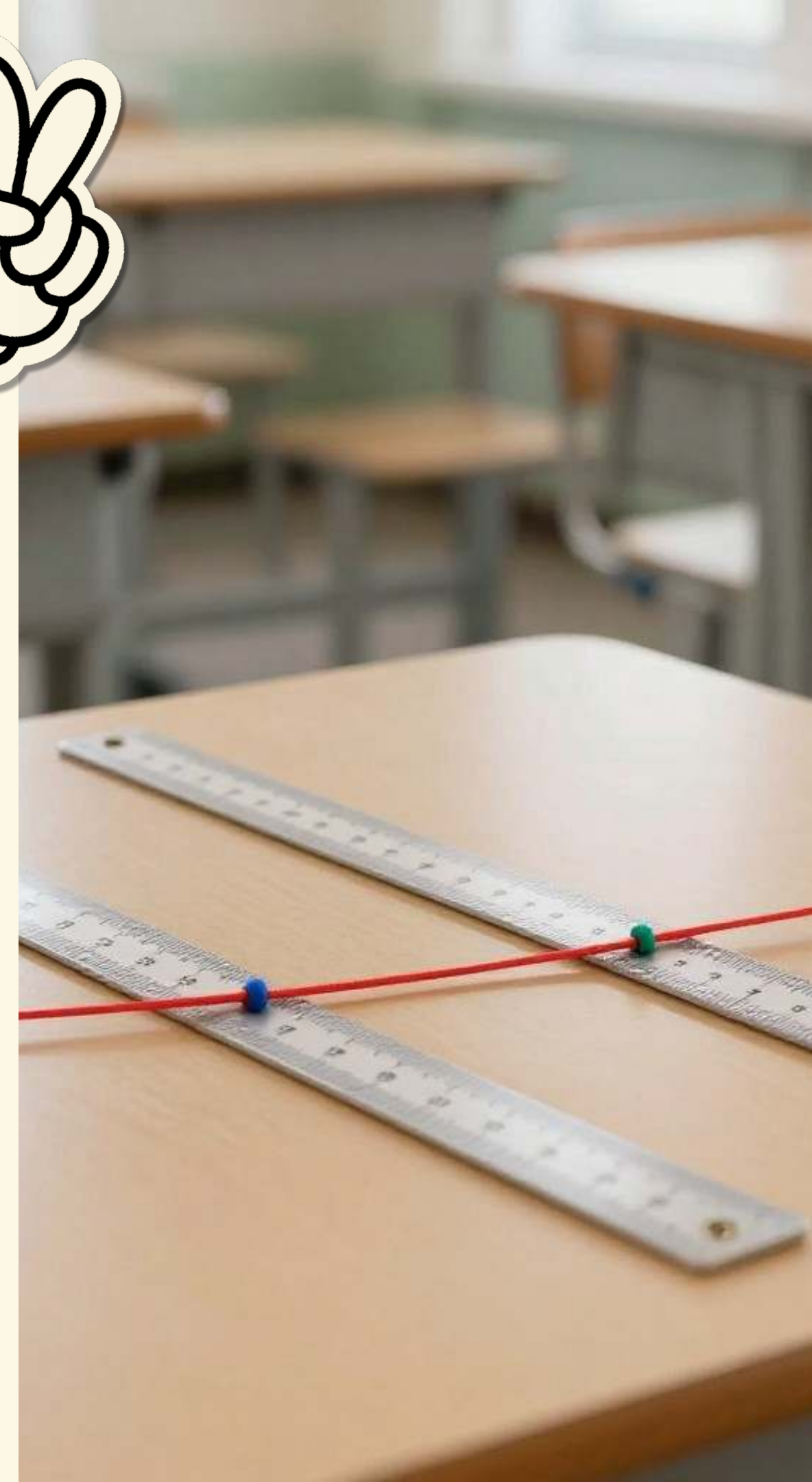




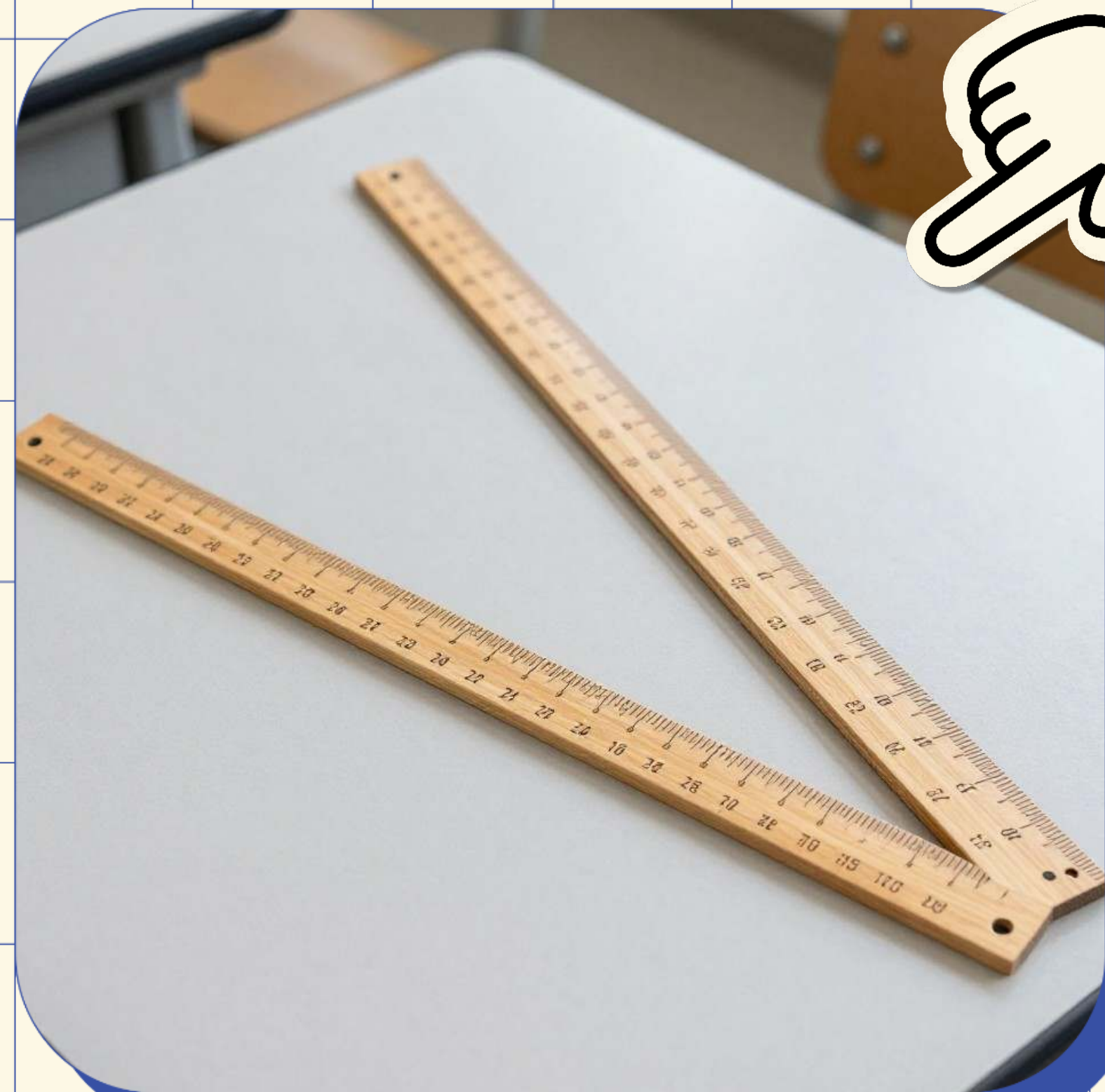
Пропорциональн ые отрезки: как связаны длины

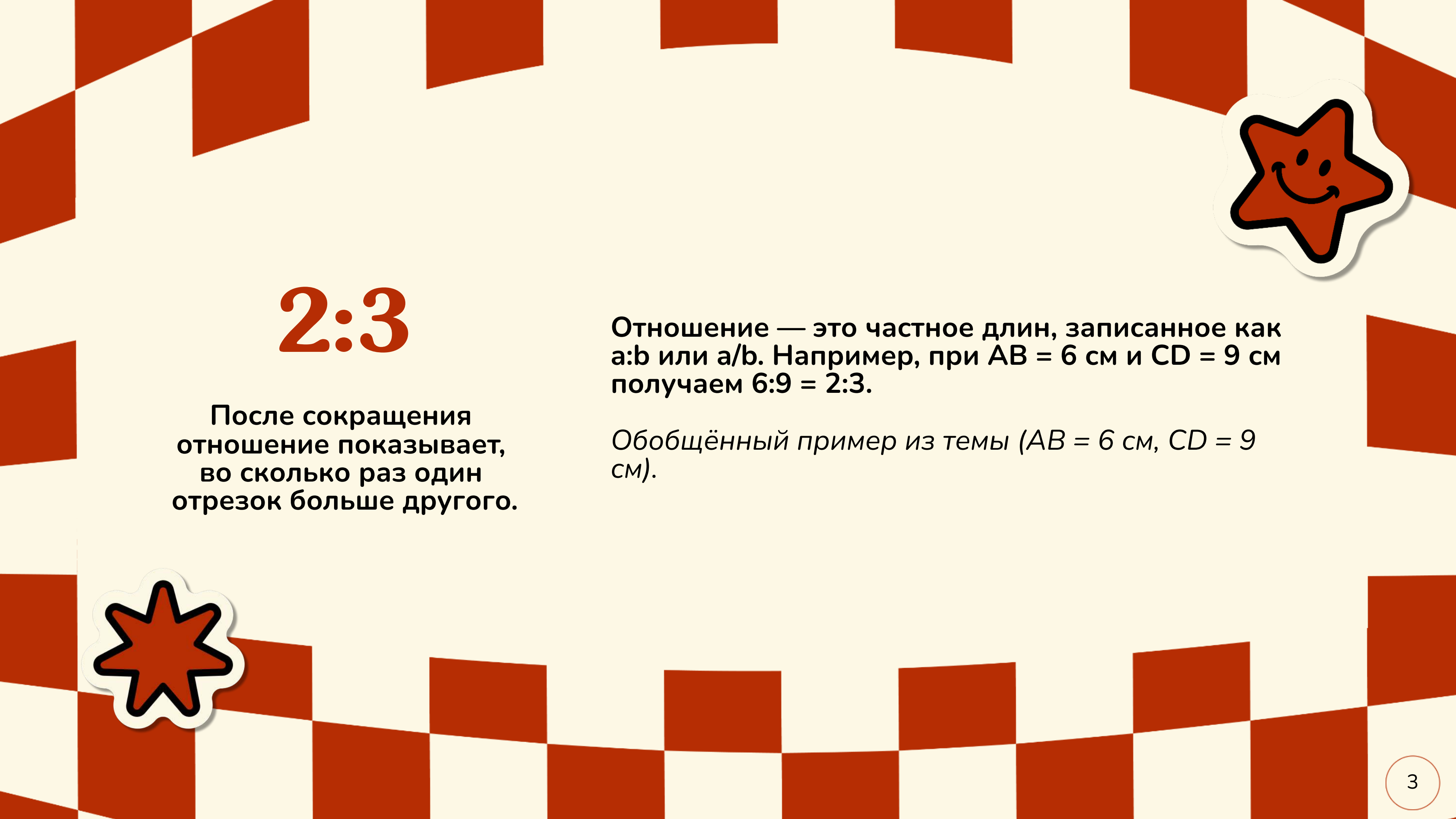
Научимся сравнивать длины, проверять равенство отношений и находить неизвестный отрезок.



Где встречаются пропорциональные отрезки

Отношения длин помогают читать карты, понимать чертежи и строить планы. Масштаб 1:100 означает: 1 см на рисунке — это 100 см (1 м) на местности. В подобных треугольниках стороны сохраняют одно и то же отношение.





2:3

После сокращения
отношение показывает,
во сколько раз один
отрезок больше другого.

Отношение — это частное длин, записанное как $a:b$ или a/b . Например, при $AB = 6$ см и $CD = 9$ см получаем $6:9 = 2:3$.

Обобщённый пример из темы ($AB = 6$ см, $CD = 9$ см).



Что называют пропорциональными отрезками

Два отрезка называют пропорциональными, если их длины образуют одну пропорцию с другими длинами. Тогда отношение первых двух совпадает с отношением соответствующих других.

Например, 4 см и 10 см пропорциональны 8 см и 20 см: $4:10 = 8:20 = 2:5$. Сокращение показывает одинаковую связь между величинами.

Если все длины в пропорции увеличивают или уменьшают в одно и то же число раз, равенство отношений сохраняется. Именно это делает пропорциональность “устойчивой” при изменениях.

1

2

3

Масштаб как пример пропорциональности

1

Связь рисунка и реальности

Масштаб показывает, во сколько раз длины на чертеже меньше или больше реальных. Например, 1:500: 1 см на плане соответствует 500 см, то есть 5 м.

2

Почему масштаб работает

Когда вы сравниваете длины на изображении и в действительности, получается одно и то же отношение. Поэтому одинаковая пара длин “подчиняется” одному и тому же правилу, как и в пропорции.



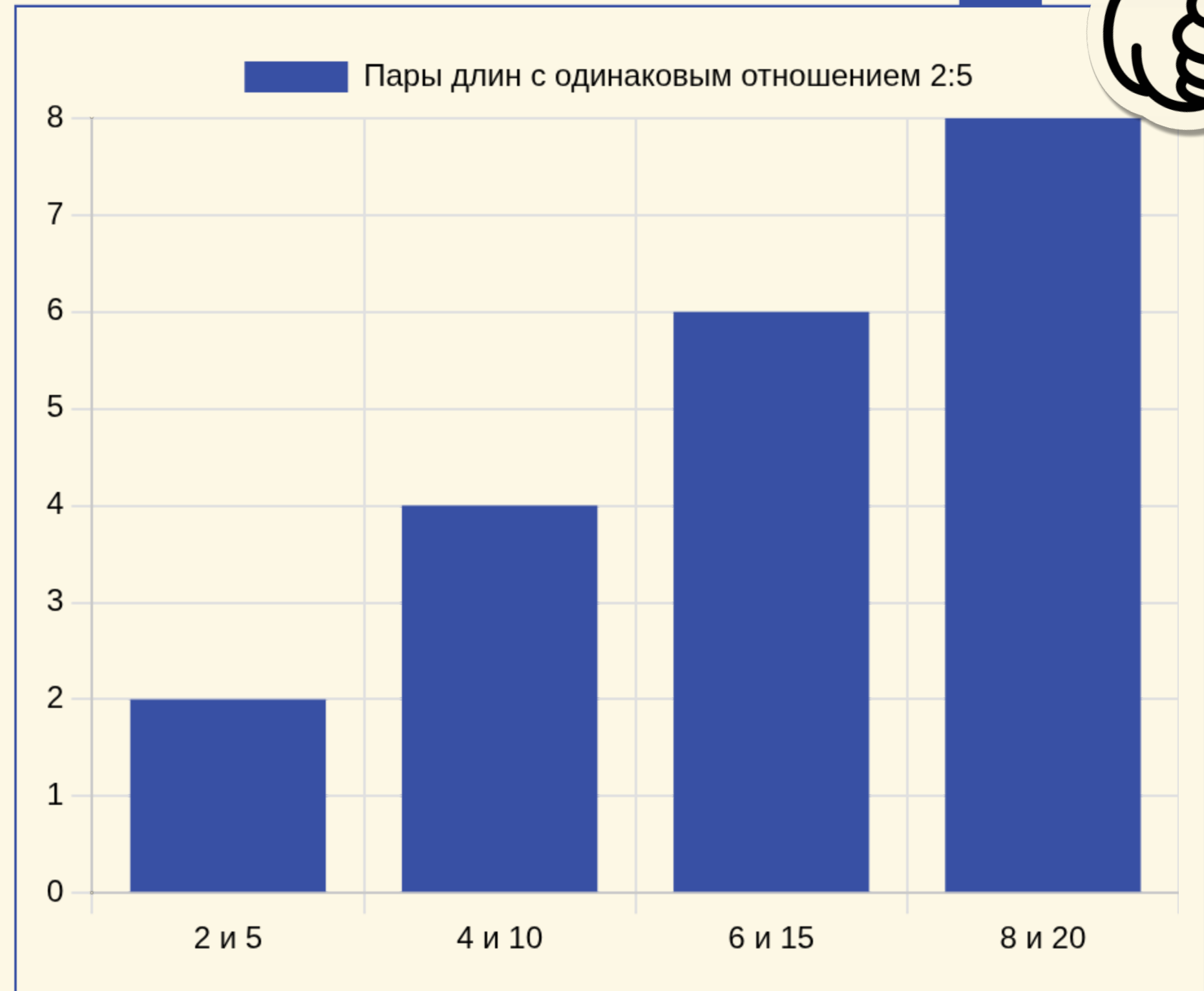
Одинаковое отношение в нескольких парах



Для каждой пары отношение первой длины ко второй равно 2:5, потому что вторая длина получается умножением первой на 2,5.

Диаграмма показывает: когда обе величины увеличивают во столько же раз, пропорция не меняется. Значит, сохраняется одинаковая связь между длинами.

Свод данных из условия: (2,5), (4,10), (6,15), (8,20).



Как проверить, что отношения равны



Сокращение дробей

Если записать отношения как дроби, можно сократить их до одинаковых чисел. Когда после сокращения дроби совпадут, отношения равны и пропорция подтверждена.



Перекрёстное умножение

Для $a:b = c:d$ равенство проверяют так: $a \cdot d$ должно равняться $b \cdot c$. Например, $3:5$ и $12:20$ дают $3 \cdot 20 = 60$ и $5 \cdot 12 = 60$.

Примеры пропорциональных и непропорциональных пар

Четыре пары дают одно и то же отношение 1:3, а последняя пара — другое.

Проверка по отношению помогает быстро отделить пропорциональные пары от непропорциональных: равное отношение — это критерий, а не сами числа.

Данные заданы в условии примера.

Первый отрезок				Второй отрезок				Отношение						
2				6				1:3						
4				12				1:3						
5				15				1:3						
7				21				1:3						
4				10				2:5						

Алгоритм нахождения неизвестного отрезка

Решение через составление пропорции и перекрёстное умножение

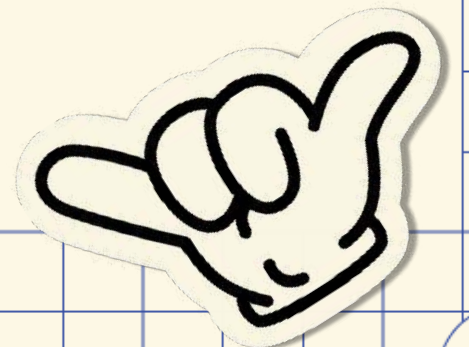
Пропорциональные отрезки в подобных треугольниках



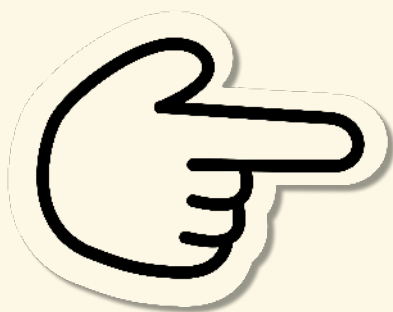
В подобных треугольниках соответствующие углы равны, а стороны расположены “одинаково”. Поэтому отношение любых пар соответствующих сторон одинаково.

Если в одном треугольнике стороны 3 см, 4 см и 5 см, а в другом — 6 см, 8 см и 10 см, то каждый размер увеличился в 2 раза. Коэффициент подобия равен 2.

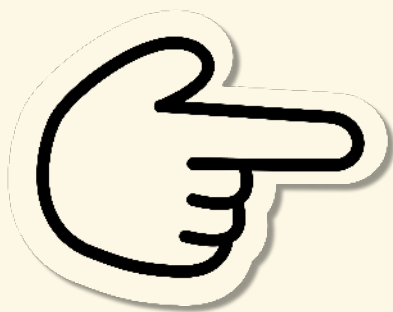
Это позволяет находить неизвестные стороны, опираясь только на пропорции. Так в геометрии 7 класса пропорциональные отрезки становятся инструментом решения задач.



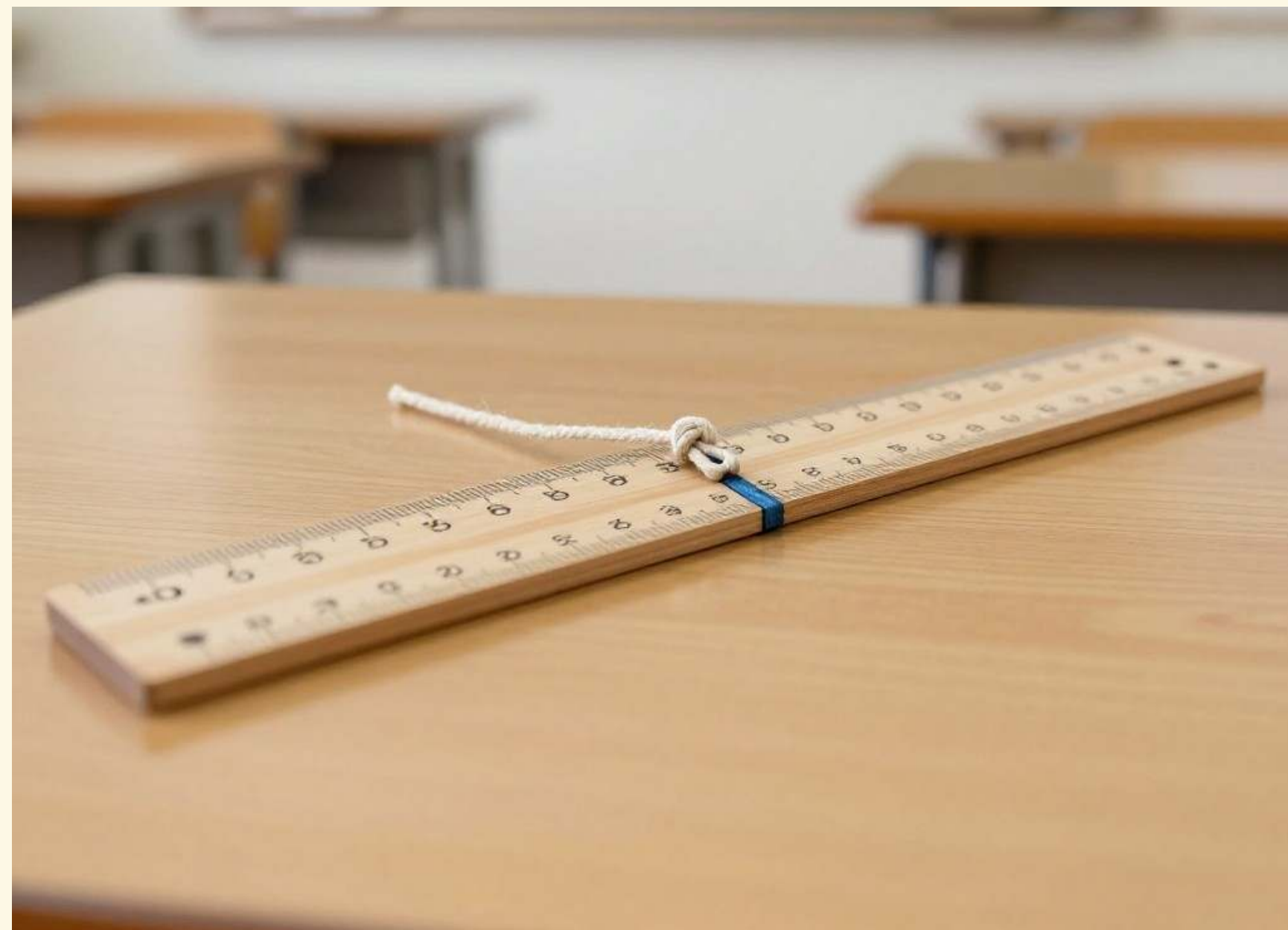
Деление отрезка в заданном отношении



Отрезок можно разделить на две части, если известно их отношение, например 2:3. Пусть весь отрезок равен 25 см: тогда 2 и 3 — это «части», из которых составлена общая длина.



Считаем, что $25 : (2+3) = 5$ см приходится на одну часть. Значит, первая часть равна $2 \cdot 5 = 10$ см, а вторая — $3 \cdot 5 = 15$ см. Деление на рисунке показывает, где появляется точка раздела.



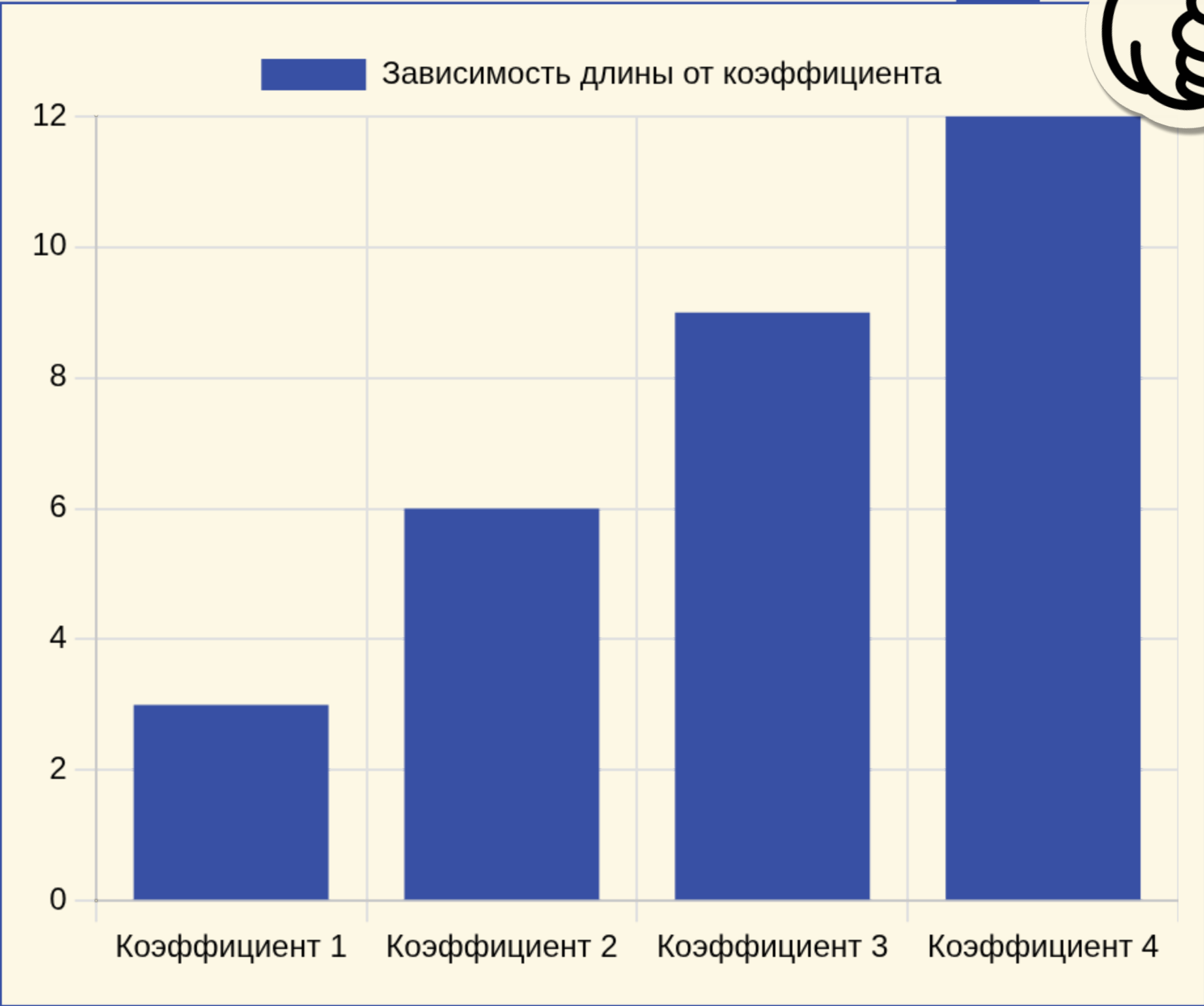
Как меняется длина при увеличении коэффициента



Здесь каждая следующая длина получается умножением предыдущей на 1, или точнее — увеличение коэффициента на 1 добавляет столько же, сколько уже было «одной единицей» пропорции.

График показывает линейную зависимость: при росте коэффициента во сколько раз увеличивается коэффициент, во столько же раз растёт длина.

Данные для примера: коэффициенты 1, 2, 3, 4 и соответствующие длины 3 см, 6 см, 9 см, 12 см.



Типичные ошибки при работе с отношениями



Первая ошибка — складывать отношения, как будто $2:3$ и $4:5$ можно «сложить». Но отношение не суммируют: его сравнивают, проверяя равенство пропорции через общие множители.

Вторая ошибка — считать отношения равными только потому, что в них есть похожие числа. Если $2:3 \neq 4:5$, то разные значения означают разную связь между длинами, и это видно при приведении к общему знаменателю.

Третья ошибка — перепутать единицы измерения. Сантиметры, миллиметры и метры должны быть приведены к одной единице, иначе отношение получится неверным, даже если дроби выглядят аккуратно.



Четвёртая ошибка — забыть проверить ответ. После вычислений полезно подставить найденную длину обратно в отношение и убедиться, что равенство действительно сохраняется.



Проверка пропорций на числах

Ниже приведены пары чисел и соответствующие отношения. По таблице видно, какие пары дают одно и то же отношение, а какая — нарушает пропорциональность.

Первые три пары дают одинаковое отношение 1:3, значит они пропорциональны. Четвёртая пара имеет другое отношение 2:5, поэтому пропорция не сохраняется.

Данные взяты из условия задания к слайду.

Пара чисел	Отношение
3 и 9	1:3
5 и 15	1:3
6 и 18	1:3
4 и 10	2:5

Пропорции в задачах на движение



Шаг 1: задаём скорость

В движении пропорциональность появляется, когда скорость постоянна. Тогда расстояние растёт равномерно: за каждую единицу времени добавляется одно и то же количество километров.

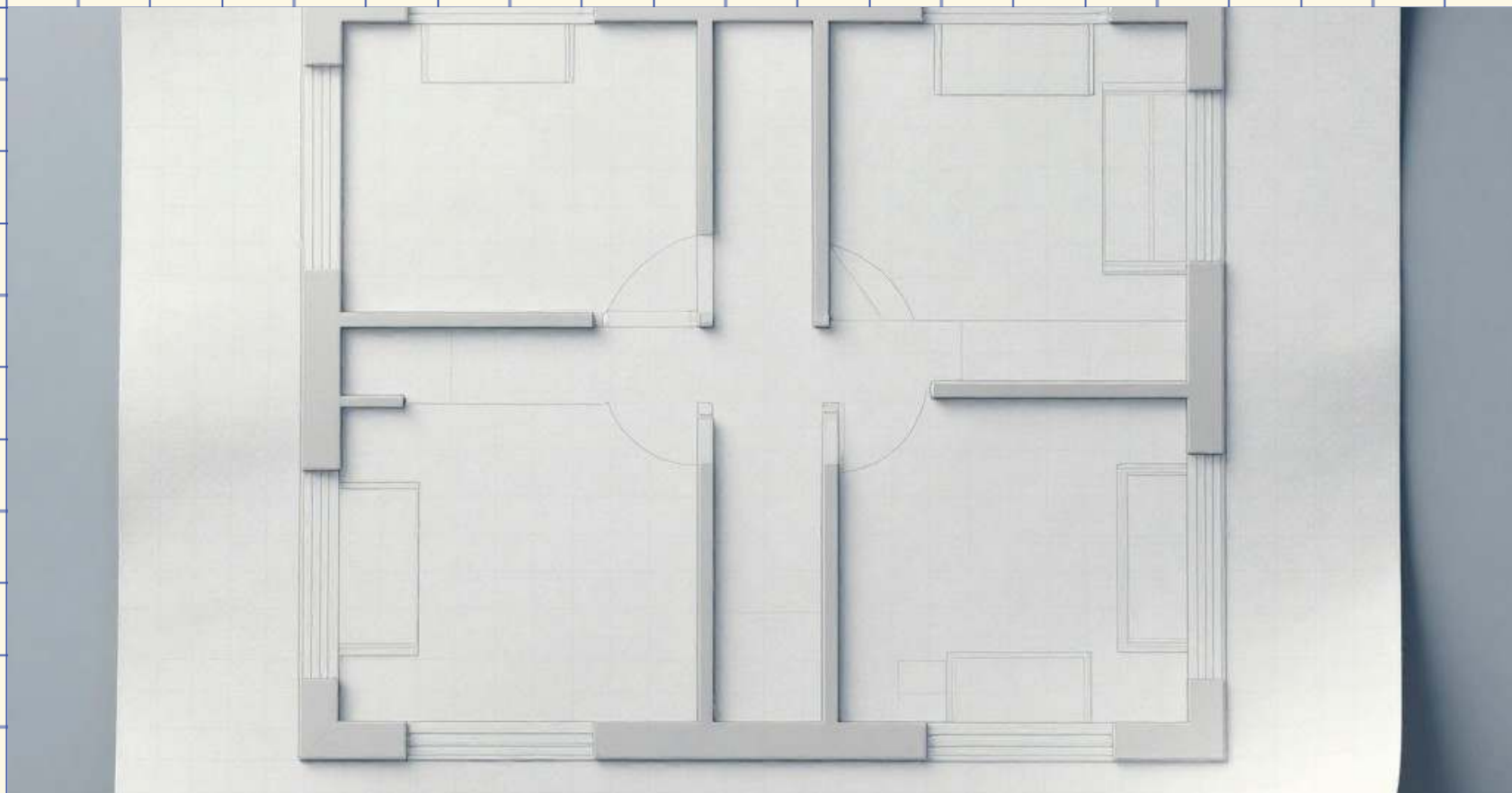
Шаг 2: считаем первое время

Если за 2 часа пройдено 12 км, то это значение соответствует заданной скорости. Дальше мы будем масштабировать расстояние, сохраняя ту же скорость.

Шаг 3: переносим на другое время

За 5 часов при той же скорости будет пройдено 30 км. Время и расстояние связаны одинаковым коэффициентом: меняется время — меняется расстояние во столько же раз.

Чертежи, планы и модели в масштабе



Комната на бумаге

План комнаты помогает быстро представить, где находятся стены и проходы. Его чертят в масштабе: длины на плане связаны с реальными длинами одинаковым отношением. Благодаря этому можно оценивать размеры мебели и расстояния до окон.



Модель автомобиля в классе

Игрушка или учебная модель может быть заметно меньше реального автомобиля, но «держит» ту же геометрию. Например, модель длиной 18 см соответствует реальной длине 4,5 м при масштабе 1:25. Так пропорциональные отрезки становятся наглядными.

Как решать текстовую задачу на пропорции

Логика решения построена на поиске пары «известное $\leftrightarrow$ соответствующее» и записи пропорции.

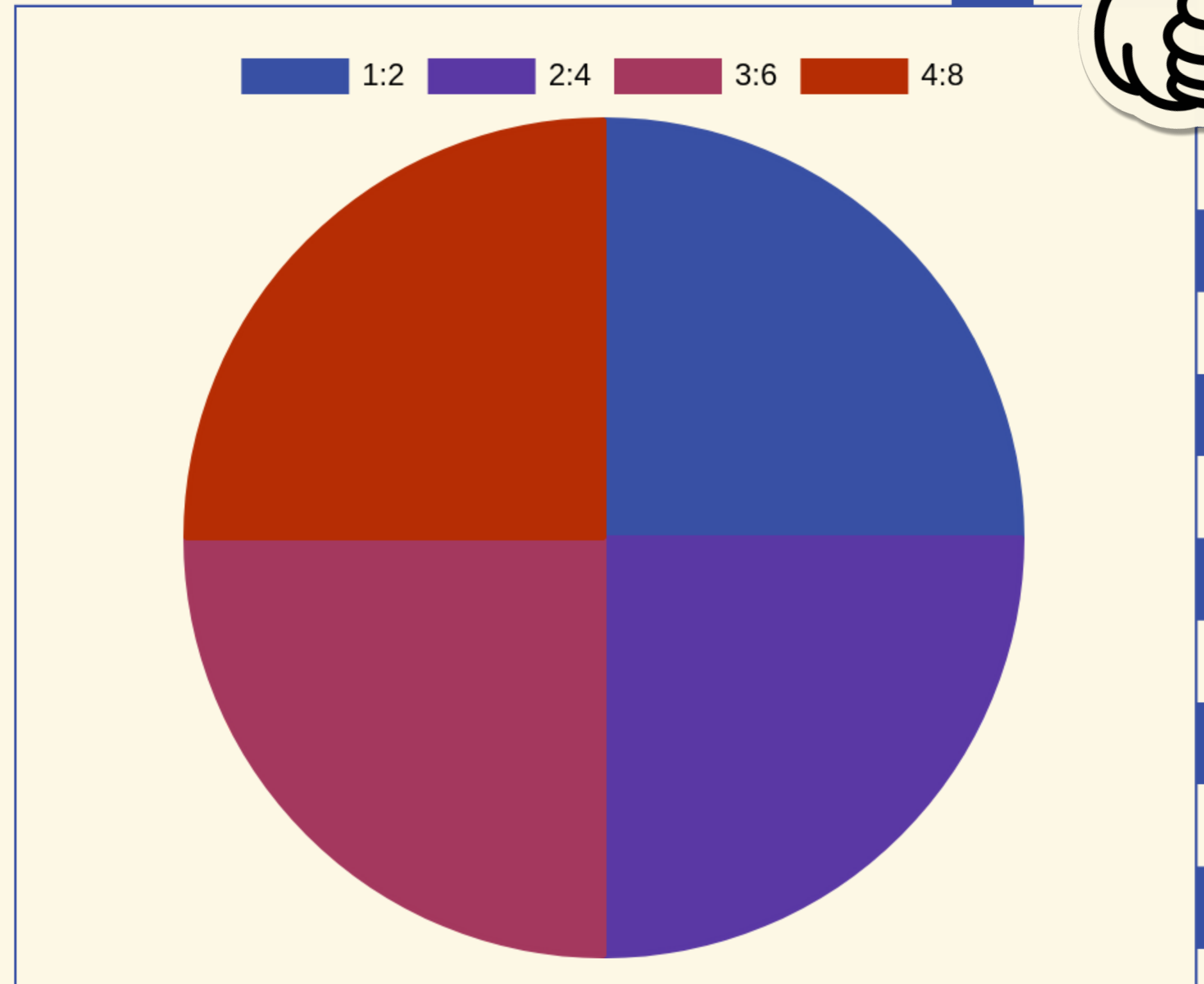
Одинаковое отношение в разных записях



Каждая пара представлена как «одинаковая доля» в круговой диаграмме: 1:2 и 2:4 связаны тем, что обе части умножены на 2, и так далее.

Все записи дают одну и ту же пропорцию, потому что в каждой следующей паре обе величины увеличивают одинаковым множителем.

Данные для примера: отношения 1:2, 2:4, 3:6, 4:8 (все равны 1:2 после сокращения).



Где пригодится знание темы



География и карты

Умение читать масштаб помогает понимать, как расстояния на карте соотносятся с расстояниями на местности, и точно сравнивать участки, не прибегая к догадкам.



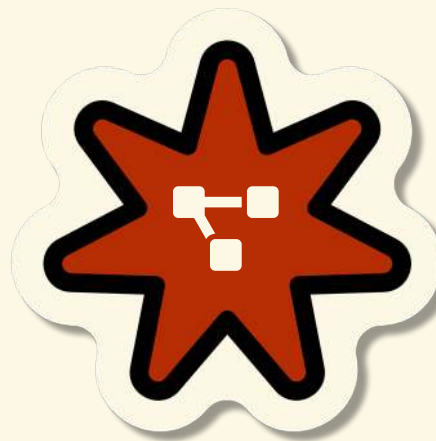
Чертёж и геометрия

При построениях и измерениях пропорции связывают стороны подобных фигур, позволяют делить отрезки в заданном отношении и находить неизвестные длины.



Технология и макеты

По масштабу удобно переносить размеры с чертежа на макет: одинаковые отношения сохраняются, поэтому модель повторяет форму и пропорции реального объекта.



Подобие фигур

Когда фигуры похожи, стороны связаны одним коэффициентом. Знание отношений помогает составлять пропорции и решать задачи без лишних вычислений.



Информатика и модели

Многие модели используют масштабирование: например, при создании изображений и схем. Пропорции помогают сохранить видимость правильных размеров и связей.



Главная идея темы — одинаковое отношение

Пропорциональные отрезки — это отрезки, длины которых связаны одинаковым отношением. Тема объединяет отношения, пропорции, масштаб и подобие фигур, делая решения понятными и точными.

