



Вероятность суммы и произведения событий

Изучаем, как находить вероятность двух событий без ошибок.

Зачем нужны правила суммы и произведения

Эти правила помогают считать вероятности в играх, опытах и задачах на выбор. Важно не только слово «или» или «и», но и связь между событиями: совпадают ли они и влияют ли друг на друга.



Событие, исход и вероятность



Случайный опыт

Случайный опыт даёт несколько возможных результатов. Например, при броске кубика заранее неизвестно, какое число выпадет, но все варианты можно перечислить.



Событие

Событие — это один исход или группа исходов. Событием может быть «выпала 6», а может быть «выпало чётное число», то есть сразу несколько результатов.



Вероятность

Вероятность показывает, насколько возможно событие, и записывается числом от 0 до 1. Её можно выразить дробью, десятичной дробью или процентом.



Границы значений

Ноль означает невозможное событие, а единица — достоверное. Чем ближе число к 1, тем выше шанс события в данном опыте.

Пространство исходов в простых опытах

Монета

При одном броске монеты пространство исходов состоит из двух равновозможных результатов: орёл и решка. Других вариантов в этом опыте нет.

Кубик

У игрального кубика пространство исходов включает шесть чисел: от 1 до 6. Каждый результат считается отдельным элементом множества исходов.

Два броска

Если монету бросают дважды, исходы удобно записывать парами: ОО, ОР, РО, РР. Так легче увидеть все возможные комбинации.

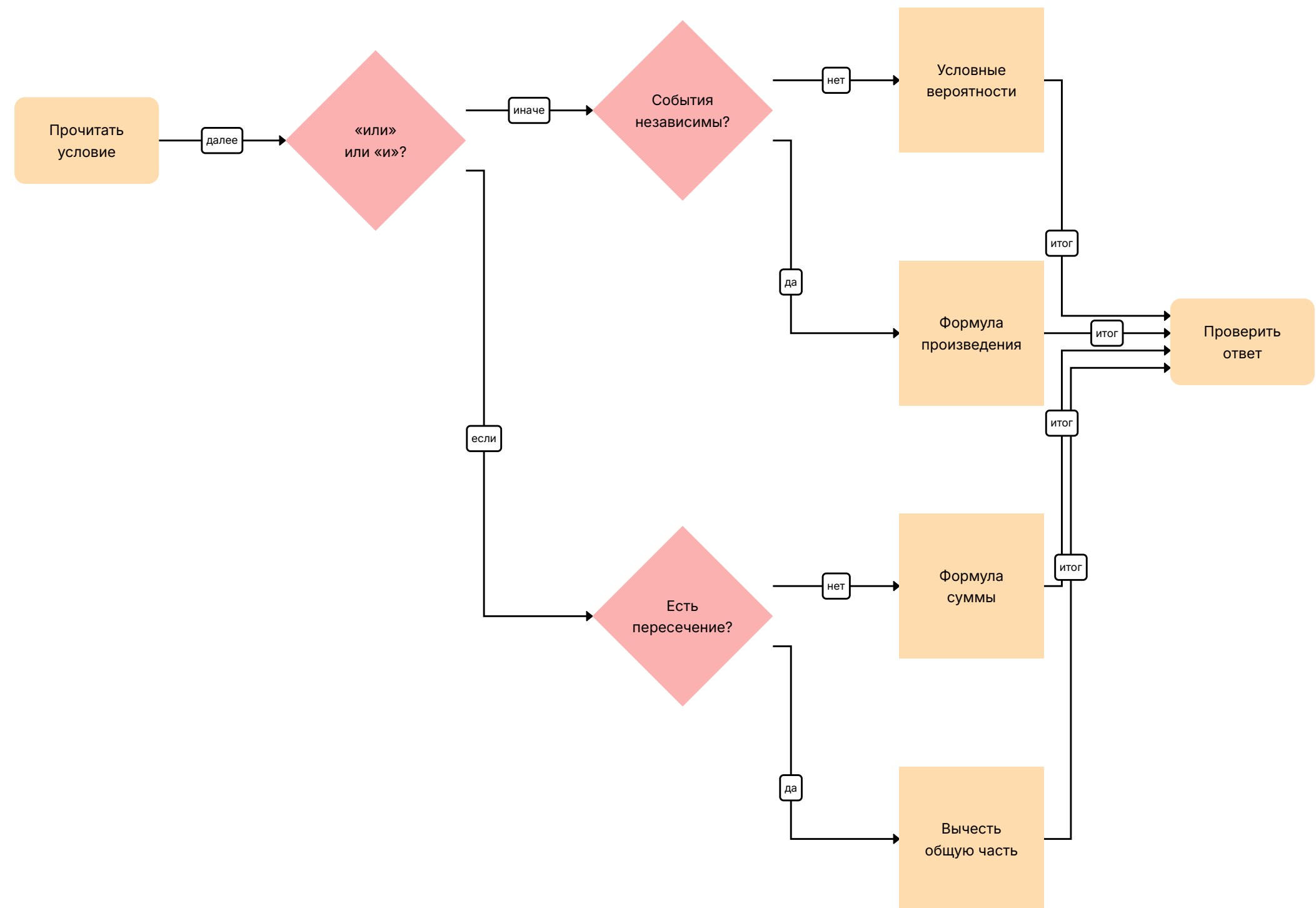
Дерево исходов

Для последовательных испытаний полезно рисовать дерево исходов. Оно помогает не пропустить ни один вариант и правильно считать вероятность сложных событий.



Как выбрать формулу вероятности

Последовательность действий помогает не перепутать сумму, произведение и поправку на общую часть.



Формула суммы вероятностей для события «или»

01

Что означает «или»

Событие А или В означает, что произошло хотя бы одно из двух событий. При подсчёте нужно учитывать все подходящие исходы, а не только один из вариантов.

02

Когда складывают напрямую

Если события несовместны, то они не могут случиться одновременно. Тогда вероятность объединения равна сумме вероятностей: $P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B)$.

03

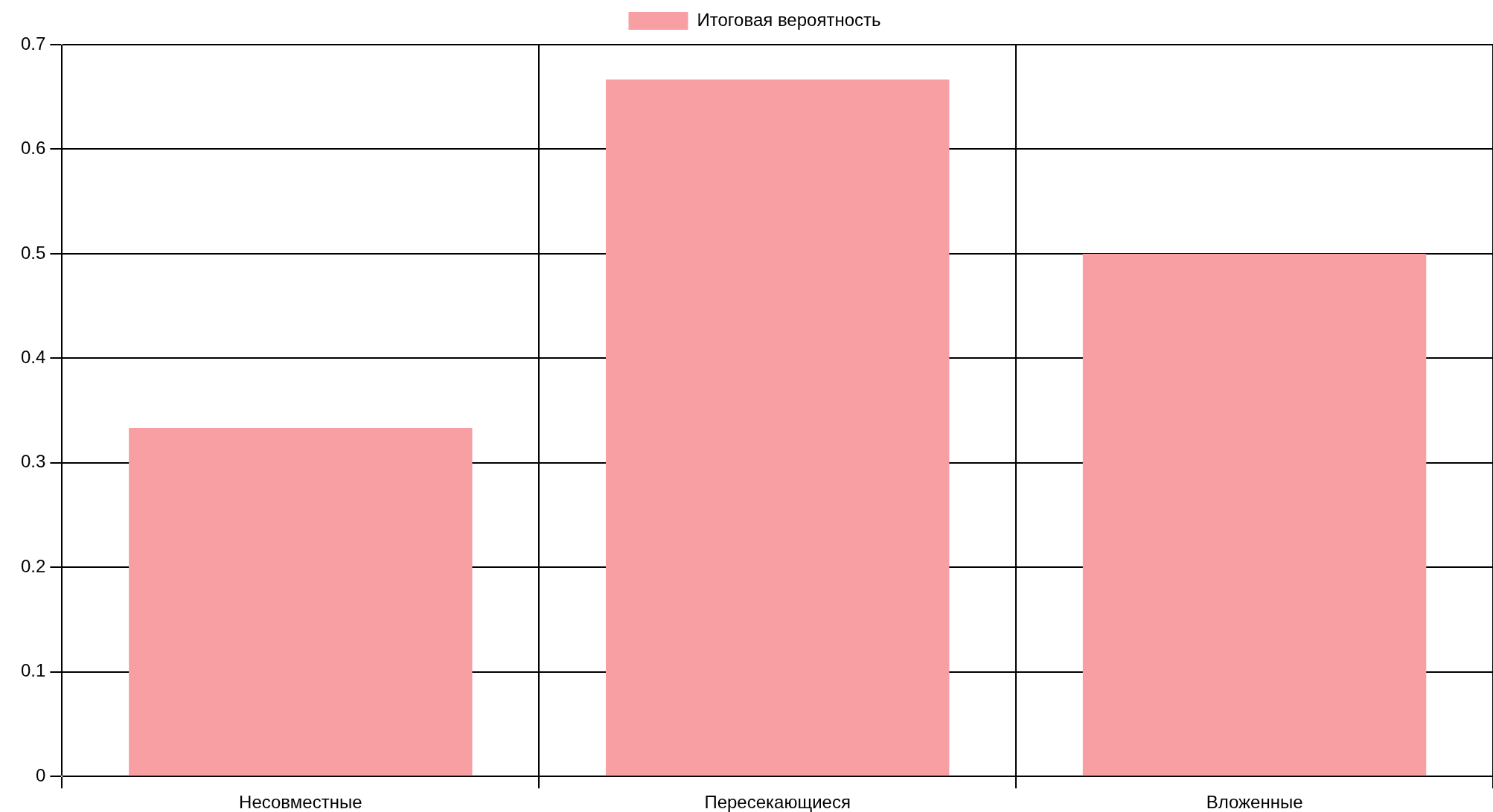
Когда вычитают общую часть

Если события пересекаются, один и тот же исход входит в оба множества. Поэтому используется формула $P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ и } B)$, чтобы избежать двойного счёта.

Сравнение случаев для формулы суммы

На диаграмме видно, что одинаковая логика «или» даёт разные вычисления в зависимости от связи между событиями и наличия общей части.

Если события пересекаются, сумму нужно корректировать вычитанием. Для вложенных событий объединение совпадает с большим событием.



Учебные примеры по теории вероятностей

$$1/3$$

— вероятность события
«выпало 2 или 5» при броске
одного кубика.

У двух несовместных исходов нет общей части, поэтому их вероятности просто складываются. Здесь каждый исход равновероятен и даёт один и тот же вклад.

Бросок игрального кубика, школьный пример

Пересекающиеся события и общая часть

01

Общие исходы

Если два события могут случиться одновременно, у них есть общие исходы. Именно эти результаты входят сразу в оба множества и требуют особого учёта.

Почему нельзя складывать сразу

При простом сложении общая часть попадает в ответ дважды. Поэтому для пересекающихся событий обязательно вычитают вероятность их пересечения, чтобы получить верный результат.

02

03

Пример на кубике

Для событий «чётное число» и «больше 3» общими являются 4 и 6. Это удобно проверять списком исходов, а не только по формуле.

Формулы суммы событий в таблице

Таблица показывает, как меняется формула в зависимости от связи между событиями и помогает выбрать правильный способ вычисления.

Общая часть считается один раз: без вычитания ответ завышается, а для вложенных событий объединение совпадает с большим событием.

Тип	Формула	Пример
Несовместные	$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B)$	2 или 5
Пересекающиеся	$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ и } B)$	чётное или >3
Вложенные	$P(A \text{ или } B) = P(A)$	$B \text{ в } A$

Вероятность произведения событий

Что означает «и»

Вероятность события А и В показывает, что оба результата произошли одновременно или подряд. Для независимых событий её находят умножением вероятностей, если одно испытание не меняет другое.

Когда работает формула

Правило $P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B)$ применяют при повторных одинаковых опытах: двух бросках монеты, нескольких бросках кубика или выборе с возвращением, когда условия остаются прежними.

Почему важна независимость

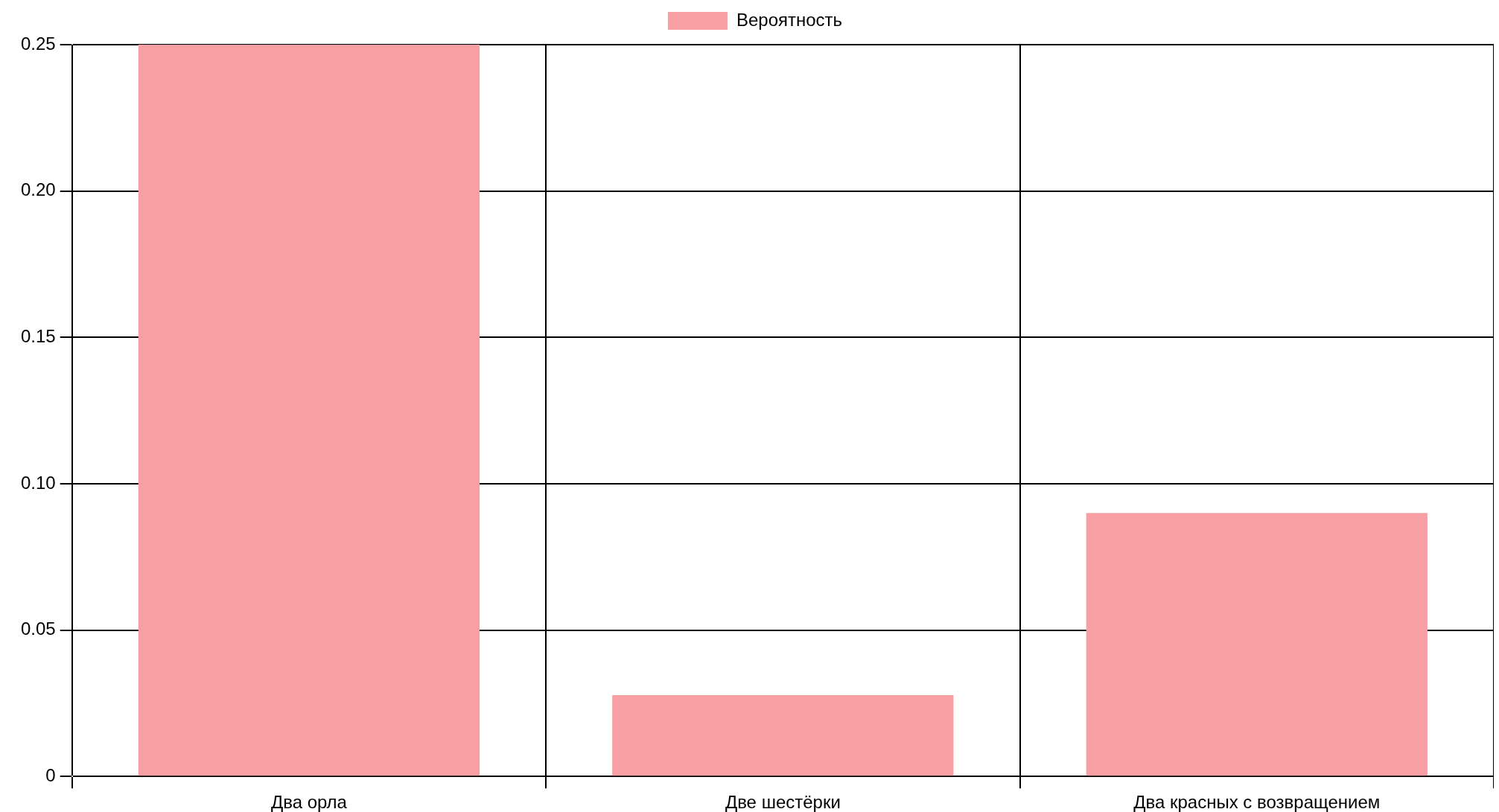
Если события независимы, каждый новый шаг не зависит от предыдущего. Тогда вероятность второго события не нужно исправлять, а общую вероятность удобно вычислять через произведение дробей.



Примеры умножения вероятностей

Во всех случаях рассматривается повторение одного и того же опыта при одинаковых условиях, поэтому вероятность общего результата получается как произведение отдельных вероятностей.

Чем больше шагов нужно пройти подряд, тем меньше итоговая вероятность при независимых событиях.



Значения рассчитаны по классическим вероятностям: монета $\frac{1}{2}$, кубик $\frac{1}{6}$, выбор красного шара $\frac{3}{10}$.

Независимые события

Первый опыт

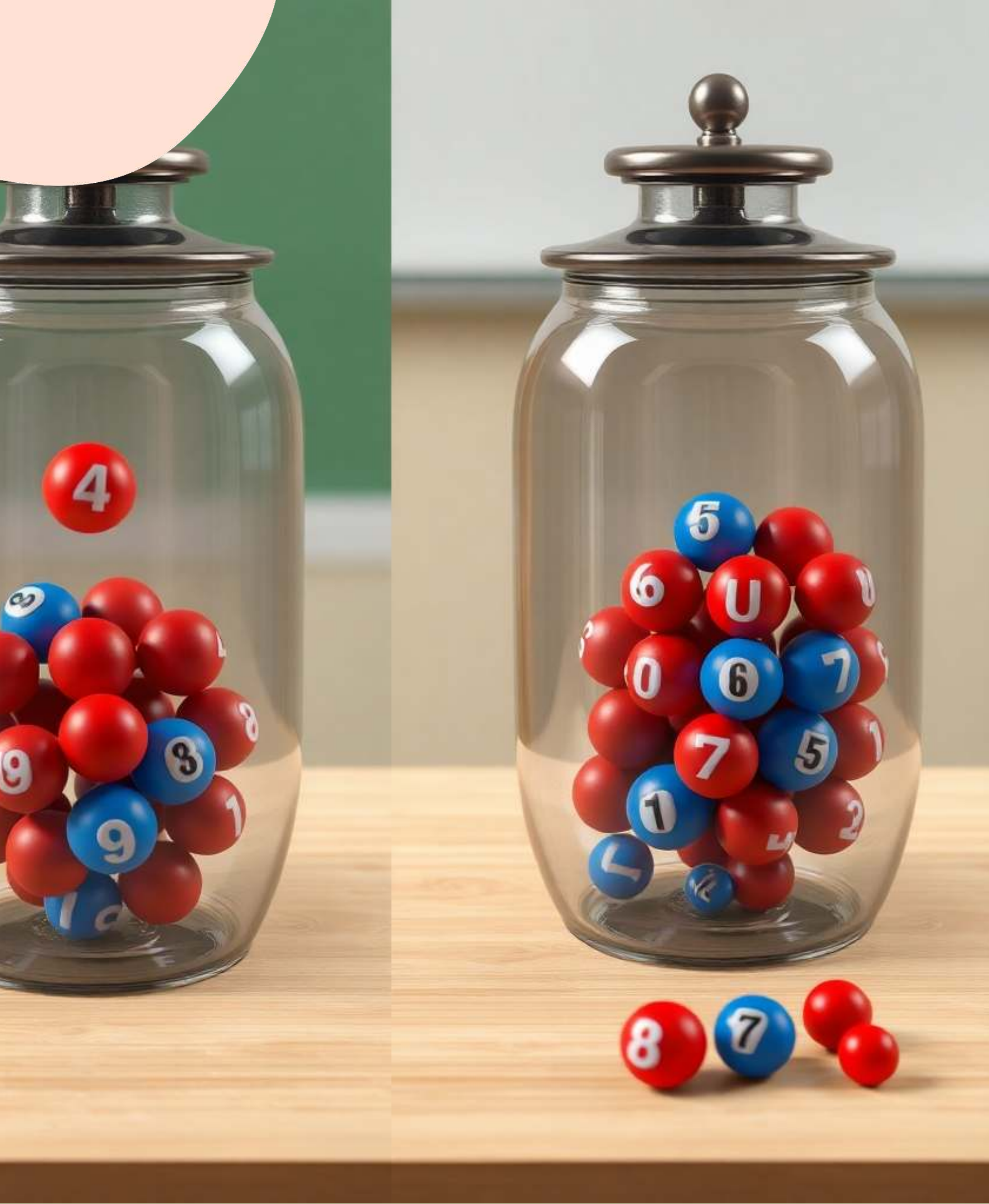
Результат первого броска или выбора фиксируется, но не влияет на правила следующего испытания. Условия остаются теми же, как будто опыт начинается заново.

Итог

Если события не зависят друг от друга, то общий результат находится по формуле произведения. Это удобно при серии одинаковых действий с постоянными шансами.

Второй опыт

Во втором испытании вероятность нужного исхода сохраняется прежней. Поэтому для двух одинаковых независимых событий можно просто перемножить две одинаковые дроби.



Зависимые события

Изменение условий

01

После первого действия состав набора меняется, поэтому следующая вероятность уже не совпадает с начальной. Это особенно видно при выборе предметов без возвращения из урны.

Отдельный расчёт шага

02

В таких задачах каждую вероятность находят отдельно для своего этапа. Формула произведения сохраняется, но дроби для первого и второго шага обычно оказываются разными.

Следим за остатком

03

Чтобы не ошибиться, нужно каждый раз считать сколько предметов осталось и сколько из них подходят. Тогда легко получить верный ответ без лишних предположений.

Сравнение суммы и произведения событий

Таблица показывает, как по смыслу различаются два основных правила нахождения вероятности и когда каждое из них применять.

Слово в условии помогает, но решающим остаётся тип событий: пересечение требует вычитания, а независимость — умножения.

Признак	Смысл	Формула	Пример
«Или»	Объединение	Сумма	$P(2 \text{ или } 5)=1/3$
«И»	Совместное выполнение	Произведение	$P(\text{орёл и орёл})=1/4$
Пересечение	Общая часть	С вычитанием	$P(A \text{ или } B)=P(A)+P(B)-P(A \text{ и } B)$

Разбор задачи про монету и кубик

Что ищем

Нужно найти вероятность того, что произойдёт хотя бы одно из двух событий: выпадет орёл или на кубике появится 6. Здесь речь идёт о событии «или».

Вероятности по отдельности

Для монеты вероятность орла равна $\frac{1}{2}$, а для кубика вероятность шестёрки равна $\frac{1}{6}$. Эти значения берутся из числа равновозможных исходов каждого опыта.

Общая часть

Оба события могут произойти вместе, поэтому нужно учесть их пересечение. Вероятность «орёл и 6» равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$, потому что опыты независимы.

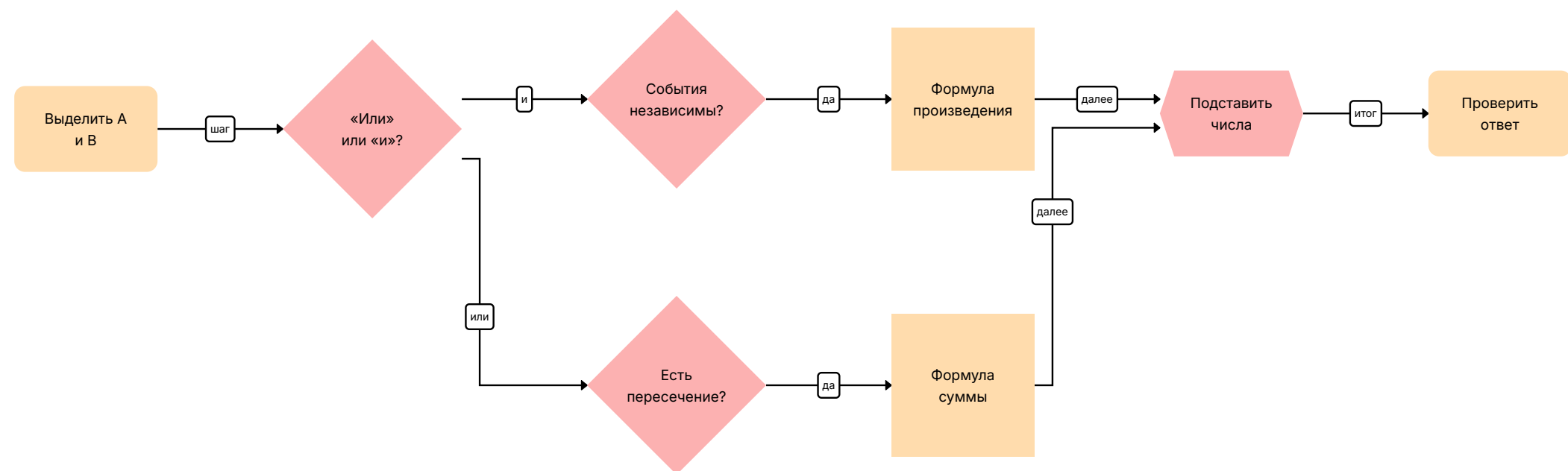
Ответ задачи

Используем формулу суммы с вычитанием общей части: $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$. Такой приём предотвращает двойной счёт одного и того же результата.



Как решать задачи на вероятность

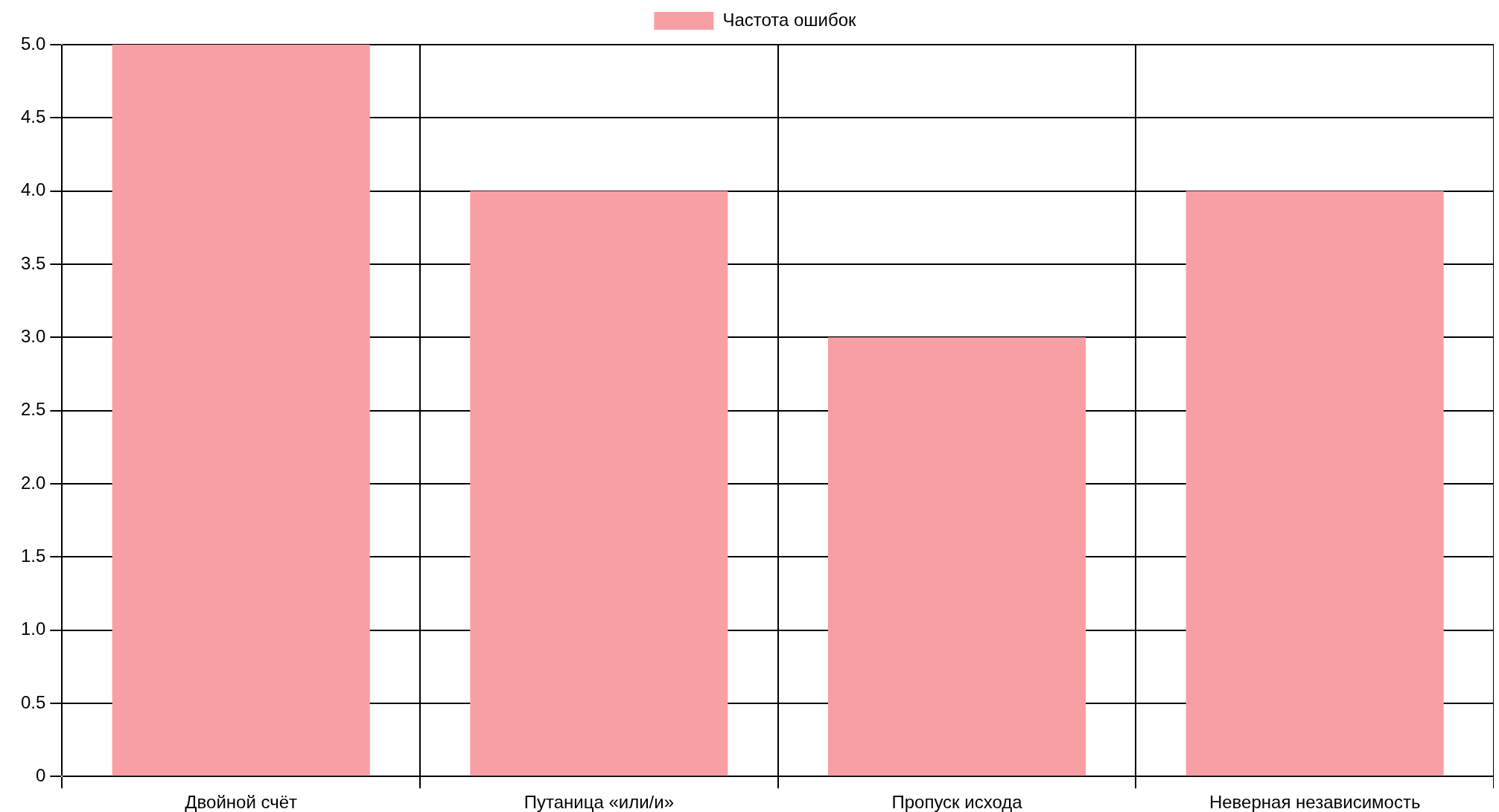
Последовательность проверки вида события и выбора формулы



Типичные ошибки при нахождении вероятности

Часто ошибка появляется не в вычислениях, а в самом выборе формулы. Поэтому важно сначала понять смысл события, а уже потом считать дроби.

Чаще всего неверно складывают пересекающиеся события и путают независимые ситуации с зависимыми.



Обобщение типичных ошибок при решении школьных задач по вероятности

...ни-примеры для закрепления

01

Событие «или»

На кубике выпало 1 или 2. Это несовместные события, поэтому вероятности складываются напрямую: $1/6 + 1/6 = 1/3$. Общих исходов здесь нет.

Событие «и»

Два раза подряд выпал орёл. Каждый бросок монеты независим, значит вероятности перемножаются: $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$. Результат меньше, чем у одного броска.

02

03

Выбор с возвращением

Из урны с 3 красными и 2 синими шарами дважды выбирают красный шар с возвращением. Вероятность равна $3/5 \cdot 3/5 = 9/25$, потому что условия не меняются.



Главные правила, которые нужно запомнить

Сумма нужна для события «или», а произведение — для события «и». Если события пересекаются, общую часть вычитают один раз, а при зависимости вероятности меняются на каждом шаге.