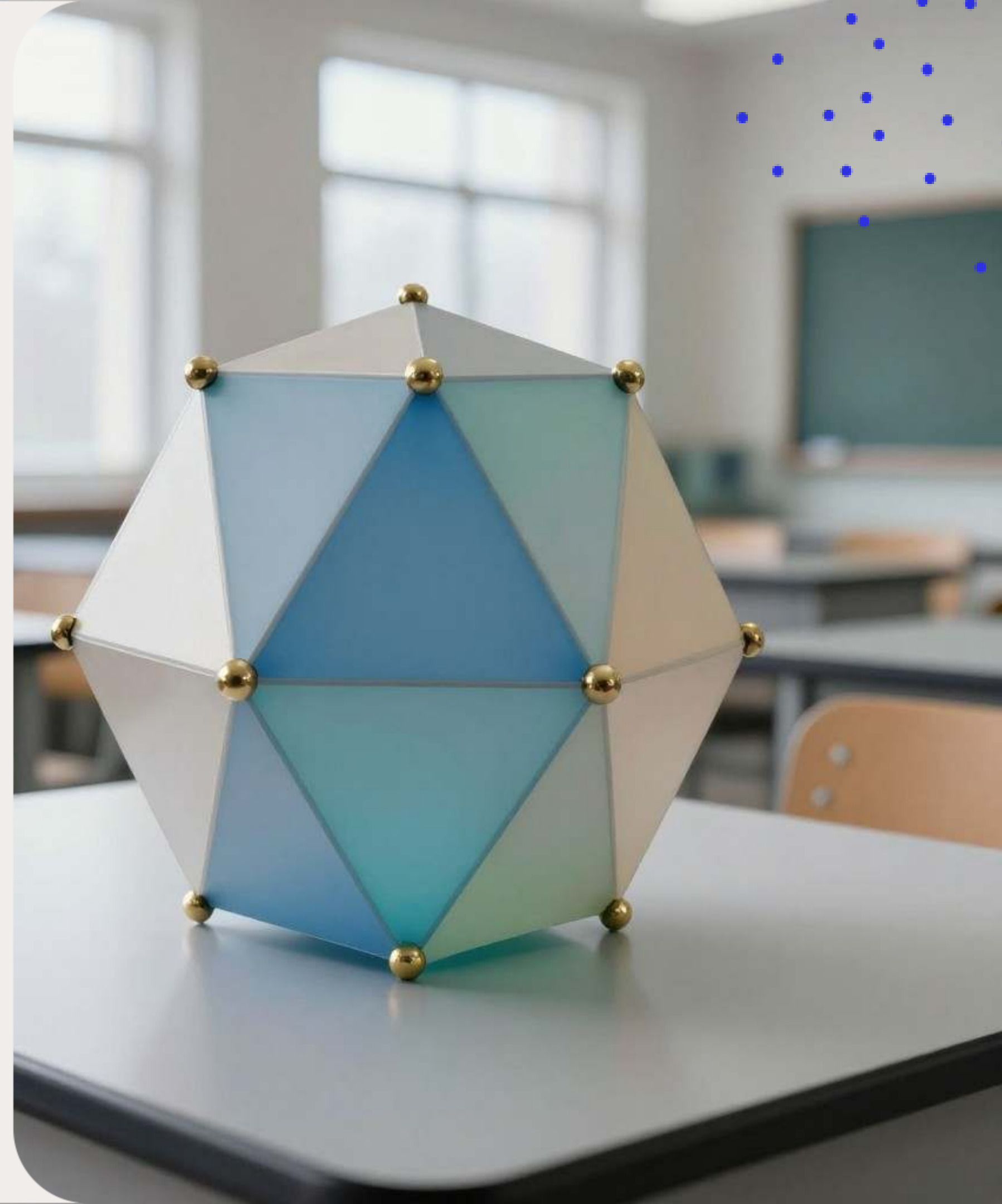


Теорема Эйлера: связь вершин, рёбер и граней

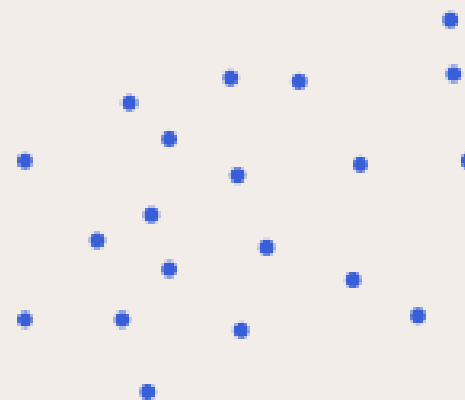
Простая формула для сложных многогранников



- Зачем девятикласснику знать теорему Эйлера



Эта теорема показывает, что у разных объёмных фигур есть общий числовой закон. Она помогает увидеть порядок в геометрии и лучше понять свойства куба, призмы, пирамиды и других многогранников.



• Что такое многогранник и какие элементы у него есть

Объёмная фигура

Многогранник — это тело, поверхность которого состоит из плоских многоугольников. Такие фигуры встречаются в школьной геометрии и служат удобными моделями для изучения пространственных объектов.

Вершины и рёбра

Вершины — это точки, где сходятся рёбра. Рёбра — отрезки, соединяющие соседние вершины и образующие «каркас» фигуры. Именно их удобно считать при проверке формулы Эйлера.

Грани многогранника

Грани — это плоские многоугольники, из которых состоит поверхность. Количество граней зависит от формы фигуры, но для выпуклых многогранников связь между всеми элементами остаётся постоянной.

● Формула Эйлера на примере куба

Считаем вершины

У куба восемь вершин. Они расположены по углам фигуры и легко находятся на рисунке, если мысленно выделить каждую точку пересечения рёбер.

Считаем рёбра

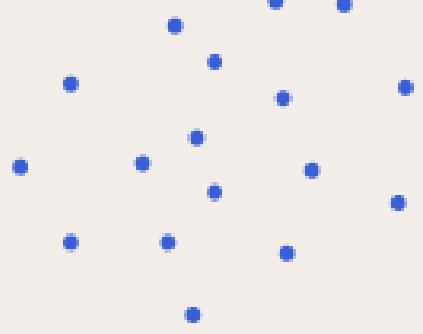
У куба двенадцать рёбер. Это отрезки, соединяющие вершины и ограничивающие грани. На изображении их удобно выделить одним цветом, чтобы не потерять при подсчёте.

Проверяем формулу

После подстановки получаем $8 - 12 + 6 = 2$. Значит, для куба теорема Эйлера выполняется точно, а все элементы фигуры учтены правильно.



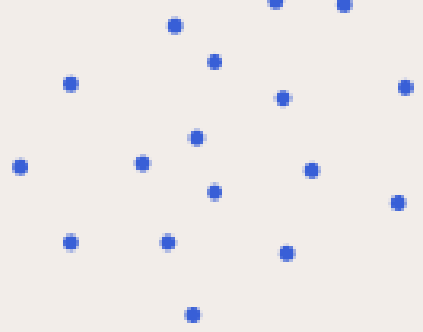
● Проверка формулы на разных многогранниках



Разные многогранники имеют различное строение, но итоговая величина остаётся одинаковой.

Во всех приведённых случаях получается одно и то же значение, что подтверждает универсальность формулы для выпуклых многогранников.

Школьные геометрические модели: куб, тетраэдр, треугольная призма, четырёхугольная пирамида.



2

получается при проверке каждого
из приведённых многогранников

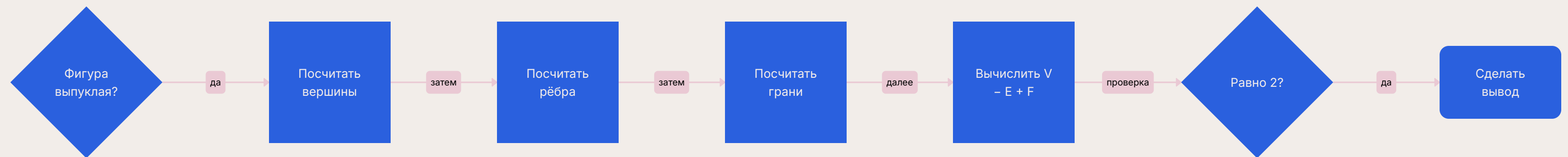
Школьные примеры многогранников из курса
геометрии.

Именно это значение выходит
для тетраэдра, прямоугольного
параллелепипеда и пирамиды
с четырёхугольным основанием,
если правильно посчитать вершины,
рёбра и грани.



• Как проверить многогранник по формуле Эйлера

Последовательность действий при решении задач на выпуклые многогранники



• Сравнение нескольких многогранников

Таблица показывает, как меняются вершины, рёбра и грани у разных фигур, но итог остаётся одним и тем же.

У всех выпуклых фигур из таблицы значение $V - E + F$ одинаково, несмотря на различное число элементов.

Фигура	V	E	F	Итог
Куб	8	12	6	2
Тетраэдр	4	6	4	2
Треугольная призма	6	9	5	2
Четырёхугольная пирамида	5	8	5	2

Школьные геометрические модели
многогранников.

- Почему сумма всегда остаётся равной 2



Поверхность можно упрощать

Если мысленно соединять соседние части поверхности, многогранник можно представить как сеть из многоугольников. При этом элементы меняются согласованно, а общая связь сохраняется.



Изменения взаимно компенсируются

Когда исчезает одна грань или ребро, обычно меняются и связанные с ними вершины. Поэтому в выражении $V - E + F$ потери и добавления уравнивают друг друга.



Итог остаётся неизменным

Для выпуклых многогранников такая компенсация приводит к одному результату: значение $V - E + F$ не зависит от размера фигуры и равно 2.

Развёртка многогранника и СВЯЗЬ С ЭЛЕМЕНТАМИ фигуры



Грани на плоскости

Развёртка показывает все грани фигуры в одном изображении. Так легче увидеть, из каких плоских частей состоит многогранник, и понять его строение без объёмного рисунка.

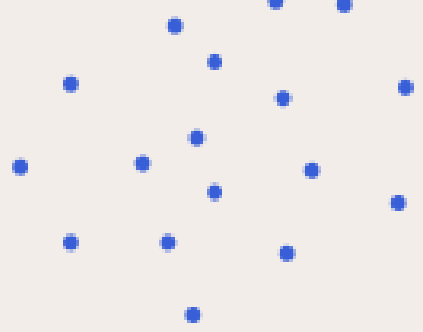
Связь с рёбрами

Когда грани разложены на плоскости, хорошо заметно, какие стороны соседних многоугольников совпадают. Это помогает не путать рёбра и точнее считать их при проверке формулы.

Связь с вершинами

В развёртке удобно отслеживать и вершины: видно, где сходятся стороны соседних граней. Такой рисунок делает фигуру более наглядной и облегчает изучение многогранников.

• Типичные ошибки при подсчёте элементов

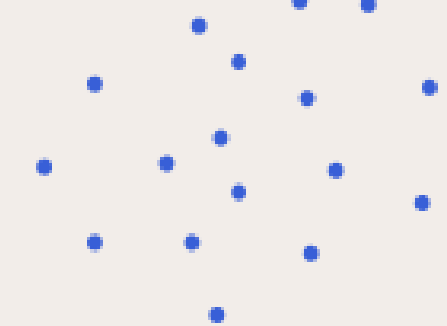


Чаще всего ошибка появляется там, где часть рёбер скрыта на рисунке и её легко не заметить при первом подсчёте.

Рёбра вызывают больше всего затруднений, поэтому при проверке нужно особенно внимательно рассматривать невидимые линии и изображение в перспективе.

Схематическая учебная диаграмма по теме «Теорема Эйлера»

• Где формула Эйлера работает, а где нет



Фигуры с отверстиями

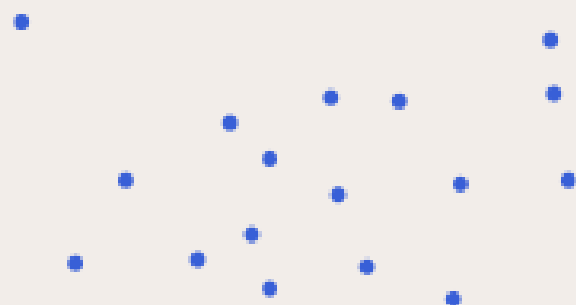
Если у тела есть сквозное отверстие, обычная формула уже не подходит. Изменение поверхности нарушает привычное соотношение между вершинами, рёбрами и гранями.

Выпуклый многогранник

Сначала проверяют, замкнута ли фигура и является ли она выпуклой. Для таких многогранников формула $V - E + F = 2$ выполняется без исключений.

Сложные и вогнутые тела

Для вогнутых поверхностей и некоторых сложных фигур нужен отдельный подход. Перед вычислением всегда важно определить тип фигуры, чтобы не сделать неверный вывод.



• Фигуры с отверстиями и другие исключения

1

Тор

Фигура в форме тора имеет отверстие, поэтому её поверхность уже не ведёт себя как поверхность выпуклого многогранника. Обычная формула Эйлера здесь не даёт нужного результата.

2

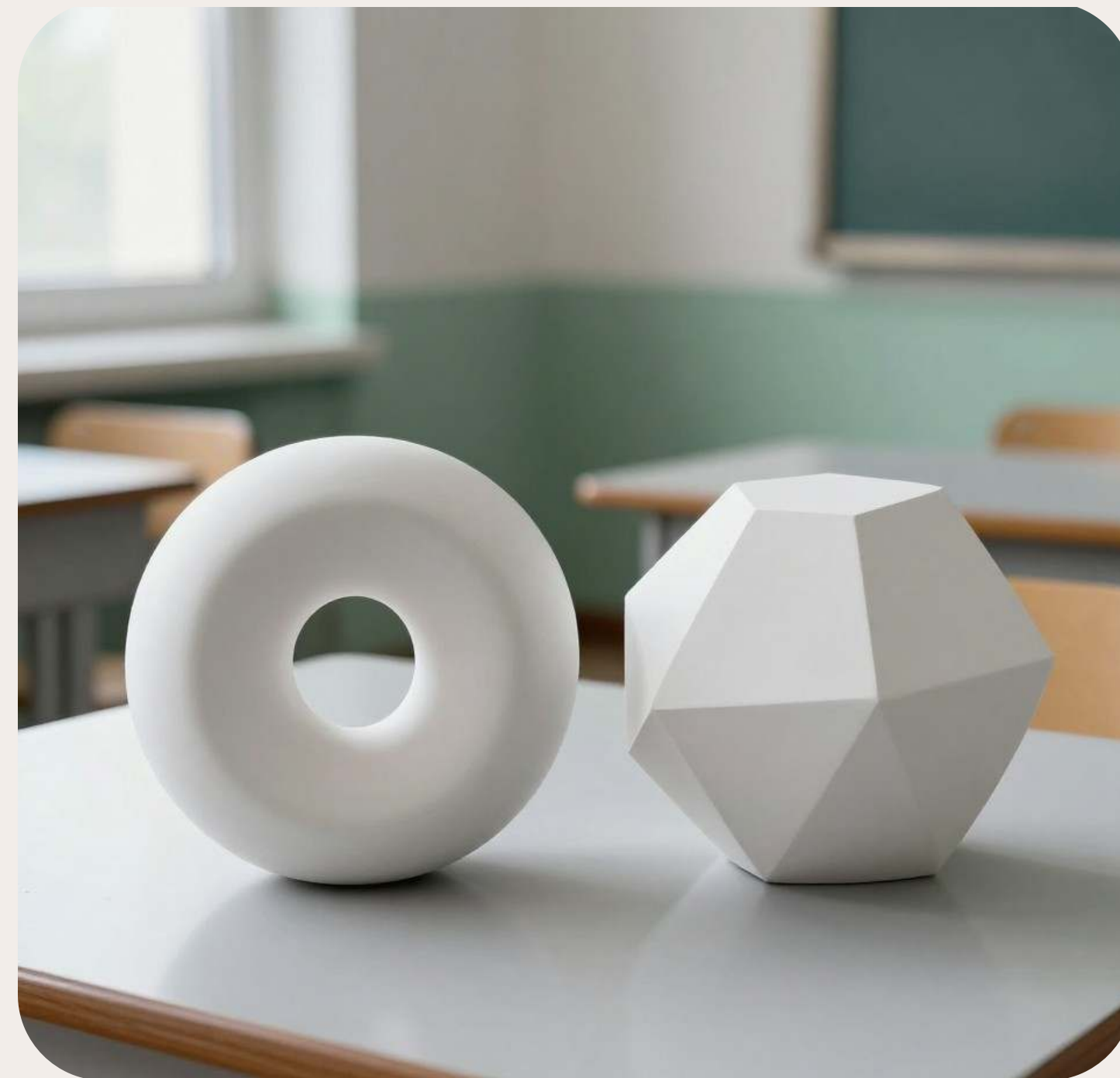
Почему возникает отличие

Отверстие меняет общую структуру поверхности: при подсчёте вершин, рёбер и граней сохраняется другая закономерность. Поэтому для таких тел используют более общие соотношения.

3

Что важно запомнить

Если у фигуры есть «дырка», вогнутость или сложная форма, сначала нужно проверить, применима ли к ней школьная формула. Иначе вычисление может оказаться неверным.



• Где применяется теорема Эйлера



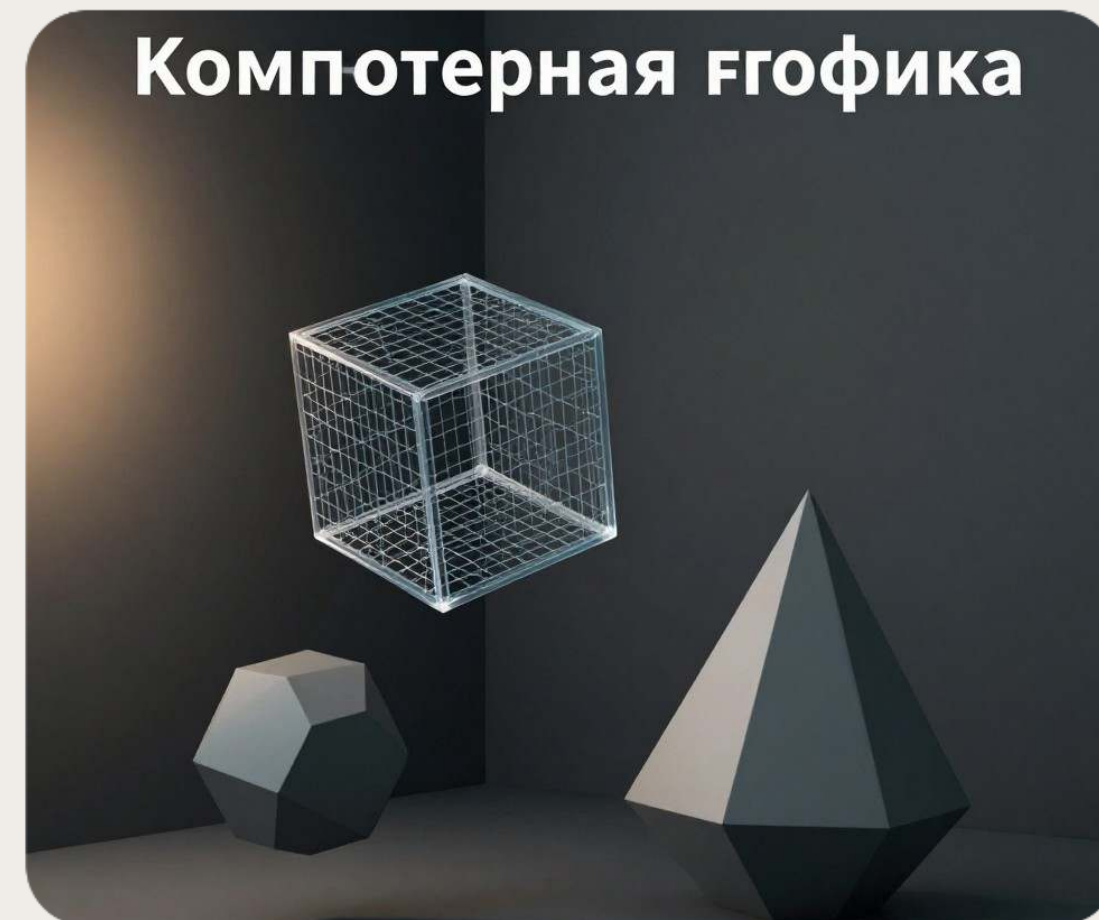
Каркас здания

В архитектуре теорема помогает понимать, как соединяются элементы каркасных конструкций. По вершинам, рёбрам и граням проще анализировать устойчивость и форму модели. Это особенно удобно при работе с объёмными макетами и чертежами.



Модели и упаковка

При создании геометрических моделей важно заранее видеть, как будут связаны части фигуры. Теорема Эйлера помогает быстро проверить, правильно ли построен многогранник, а также связать форму упаковки с её ребрами и углами.

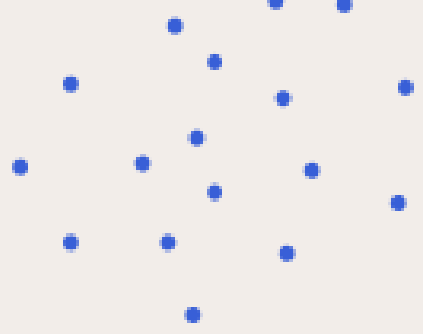


Компьютерная графика

Компьютерная графика

В трёхмерной графике объекты часто представляют как набор вершин, рёбер и граней. Теорема Эйлера служит удобной проверкой для таких моделей. На иллюстрации хорошо смотрятся куб, призма и каркасные фигуры.

● Самые узнаваемые многогранники в школьной геометрии



Несмотря на разную форму и разное число элементов, все эти фигуры дают один и тот же результат проверки.

Формула Эйлера не зависит от внешнего вида многогранника: для выпуклых фигур итог всегда одинаков.

Учебные примеры по теме «Теорема Эйлера»

• Как запомнить формулу Эйлера

1 Три буквы

Запомните короткую запись: $V - E + F = 2$. Первая буква относится к вершинам, вторая — к рёбрам, третья — к граням. Порядок букв помогает не перепутать элементы.

2

Проверка на знакомых фигурах

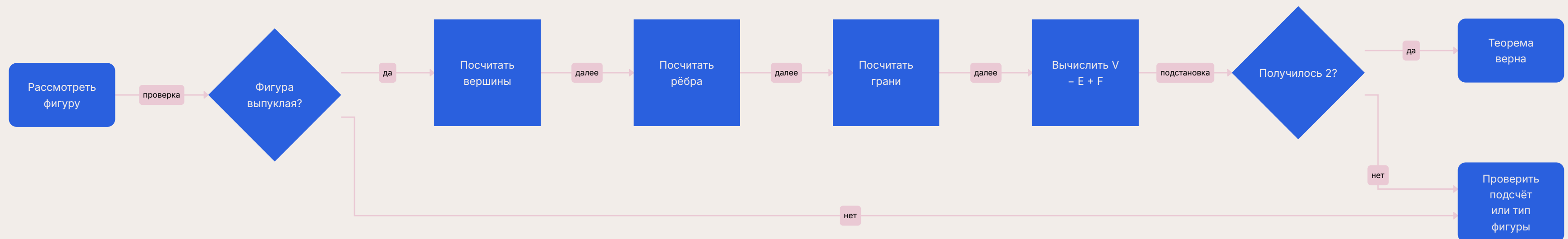
Полезно сразу подставлять числа для куба или тетраэдра. Когда одна и та же формула несколько раз даёт число 2, правило запоминается намного легче и быстрее.

3 Смысл порядка

Сначала считают вершины, затем рёбра и только потом грани. Такой порядок удобен при решении задач, потому что он совпадает с записью формулы и снижает риск ошибки.

Алгоритм решения задач на формулу Эйлера

Последовательность проверки выпуклого многогранника и вычисления значения $V - E + F$



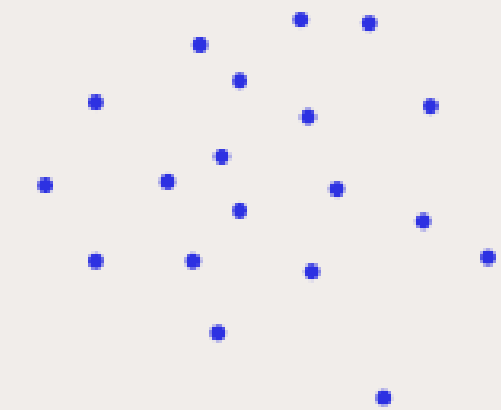
- Мини-практика: проверка трёх фигур

Фигура	V	E	F
Прямоуг. параллелепипед	8	12	6
Пятиугольная пирамида	6	10	6
Треугольная призма	6	9	5

Сравним три знакомых многогранника и проверим, даёт ли формула Эйлера одинаковый результат.

Во всех трёх примерах значение $V - E + F$ равно 2, значит формула подтверждается на практике.

● Главная идея теоремы Эйлера



Постоянная связь

У выпуклых многогранников вершины, рёбра и грани связаны одной устойчивой закономерностью. Как бы ни менялась форма фигуры, итоговое значение выражения остаётся одинаковым.

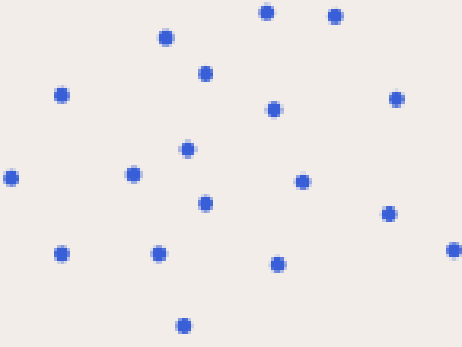
Независимость от размеров

Формула не зависит от того, большой перед нами многогранник или маленький. Важна не величина фигуры, а то, как устроена её поверхность и как соединены элементы.

Единое правило

Теорема Эйлера объединяет разные по виду фигуры в одну группу. Именно поэтому она так важна: она показывает общий закон там, где на первый взгляд видны только различия.

● Теорема Эйлера: простая формула с большим смыслом



Теорема Эйлера помогает увидеть порядок в строении многогранников и быстро проверять ответы. Она делает геометрию нагляднее и показывает, как из простых элементов возникает общий закон.

