



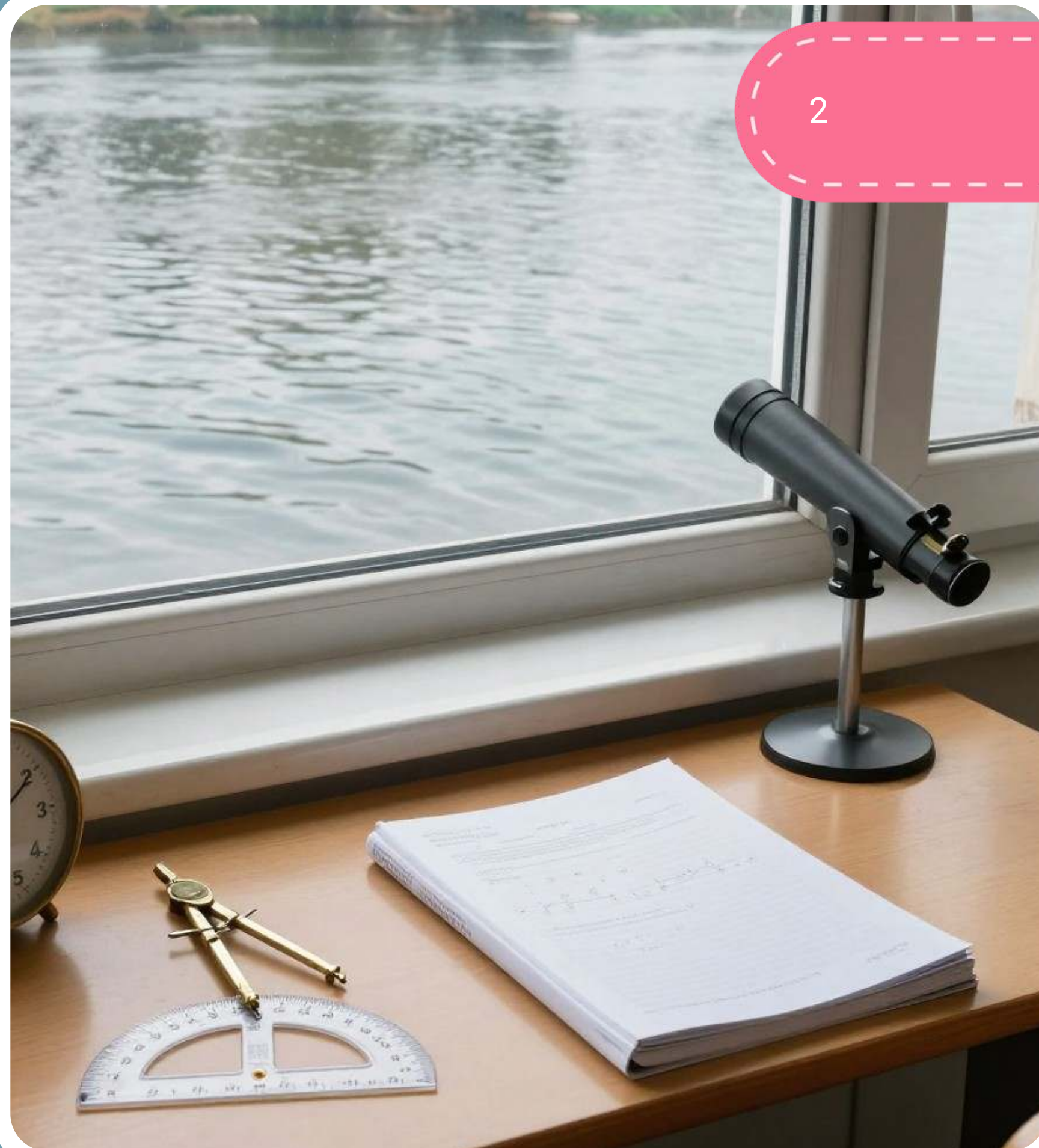
Методы решения тригонометриче- ских уравнений

Как находить решения и не терять
их в периодических функциях?



Зачем изучать тригонометрические уравнения

Эта тема соединяет школьную алгебру с анализом периодических процессов и учит работать с бесконечными множествами решений, учитывать ограничения функций и уверенно решать задания контрольных и экзаменационного уровня.



Основные виды тригонометрических уравнений

3



Простейшие уравнения

К ним относятся $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$. Они служат отправной точкой для более сложных задач и помогают понять структуру ответа.



После преобразований

Иногда исходное уравнение сначала нужно привести к стандартному виду, чтобы выделить общий множитель, применить формулы или свести задачу к известному типу.



Уравнения с выражениями

В школьной практике часто встречаются уравнения с несколькими тригонометрическими функциями, степенями синуса и косинуса или произведениями вида $\sin x \cdot \cos x$, которые требуют преобразований.



Проверка условий

Перед решением важно сразу оценить область допустимых значений, проверить правую часть и понять, понадобится ли учитывать периодичность функции при записи общего ответа.



Свойства основных тригонометрических функций

Сравнение основных свойств помогает выбрать подходящий способ решения и сразу увидеть, где возможны ограничения, а где решения повторяются периодически.

Функция	Период	Значения	Особенность
$\sin x$	2π	$[-1; 1]$	Две серии
$\cos x$	2π	$[-1; 1]$	Симметрия
$\operatorname{tg} x$	π	все $\mathbb{R}$	Без ограничений

Синус и косинус ограничены по значениям, а тангенс — нет; это напрямую влияет на существование решений и их периодичность.

Единичная окружность как основа решения

5



Координаты точки

На единичной окружности косинус задаёт абсциссу точки, а синус — ординату. Поэтому уравнение можно понимать как поиск нужной координаты на окружности.



Точные углы

Для углов 0 , $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ и $\pi/2$ используются точные значения, которые нужно знать без вычислений. Это ускоряет решение типовых школьных задач.



Повторяемость решений

Окружность наглядно показывает, почему решения повторяются через период. Один и тот же угол может давать целую серию ответов, а не одно число.



Два ответа за период

Для $\sin x$ и $\cos x$ на одном полном обороте обычно возникают две симметричные точки. Это помогает быстро выписать все решения без пропусков.



Точная проверка

Метод особенно удобен там, где правую часть уравнения можно сразу сопоставить с известным значением. Тогда решение строится без лишних вычислений и приближений.

Общий алгоритм решения тригонометрического уравнения

6

Последовательность шагов помогает выбрать метод, учесть ограничения и корректно оформить ответ.

Общие решения простейших уравнений

7



Синус и косинус

Если $|a| \leq 1$, уравнения $\sin x = a$ и $\cos x = a$ имеют решения, причём обычно возникают две симметричные серии в каждом периоде. Это связано с ограниченностью значений функций.



Нет решений

При $|a| > 1$ уравнения $\sin x = a$ и $\cos x = a$ не имеют решений, потому что синус и косинус не выходят за пределы от -1 до 1 при любом действительном x .



Тангенс

Для $\operatorname{tg} x = a$ решения существуют при любом действительном a , так как тангенс принимает любые действительные значения. При записи ответа учитывается период π .



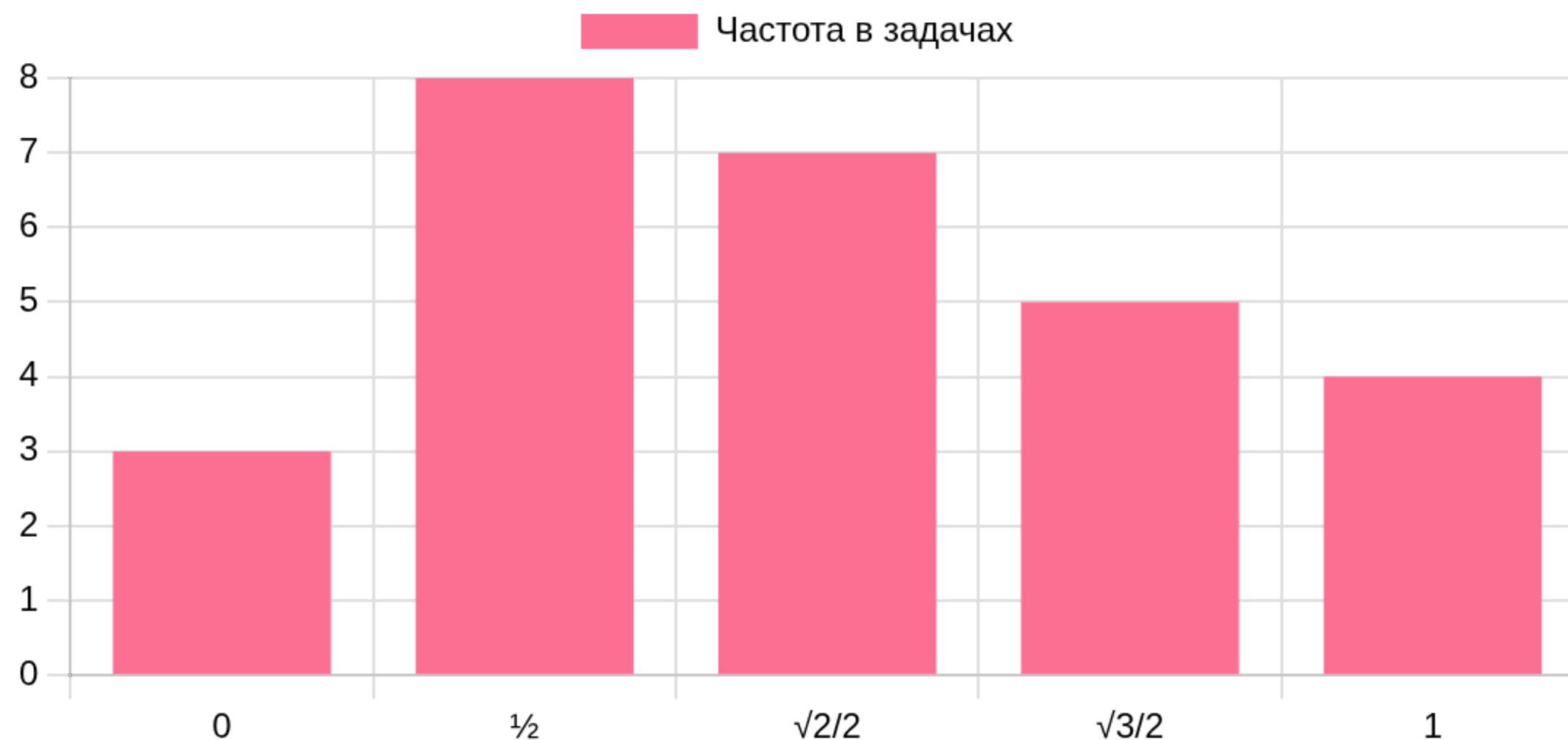
Котангенс

Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ также решается для любого действительного a . Как и у тангенса, множество решений повторяется через π , поэтому удобно сразу записывать общее семейство.

Какие точные значения встречаются чаще всего

8

Точные значения из таблицы единичной окружности позволяют быстро распознавать ответы без калькулятора и сокращают время на базовых задачах.



Чаще всего встречаются $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{2}}{2}$, поэтому их стоит узнавать мгновенно; остальные значения важны, но появляются чуть реже.

Анализ типовых школьных задач по тригонометрии

Тригонометрические преобразования

9



Основное тождество

Формула $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ позволяет заменять одну функцию через другую и упрощать выражения, где одновременно присутствуют квадрат синуса и квадрат косинуса.



Переход к квадратам

Формулы $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$ и $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$ помогают работать со степенями, особенно если уравнение содержит синус или косинус в квадрате.



Формула двойного угла

Запись $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$ удобна, когда в уравнении возникает произведение функций. Она переводит задачу к одному аргументу и делает выражение компактнее.



Через тангенс

Иногда выгодно перейти к $\tan x = \sin x / \cos x$, если выражение содержит отношение функций. Такой ход особенно полезен при дробно-тригонометрических уравнениях и сокращениях.



Разложение на множители

10

01

Выделить общий множитель

Сначала нужно заметить повторяющееся выражение и вынести его за скобки. Это часто превращает сложное уравнение в произведение двух более простых множителей.

02

Приравнять множители к нулю

Если уравнение имеет вид $A(x) \cdot B(x) = 0$, каждый множитель решается отдельно. Такой подход резко сокращает вычисления и позволяет сразу получить несколько семейств ответов.

03

Проверить полученные корни

После разложения особенно важно подставить найденные значения в исходное уравнение. Это помогает исключить посторонние корни, которые могли появиться после преобразований.

Выбор замены переменной

11

Замена переменной помогает упростить уравнения с квадратами тригонометрических функций, произведениями и выражениями через $\operatorname{tg} x$.

Типичные замены в тригонометрических уравнениях

Исходное	Замена	Вспом. уравнение
$\sin^2 x, \cos^2 x$	t	квадратное
$\sin x \cdot \cos x$	$\frac{1}{2} \sin 2x$	линейное
$\operatorname{tg} x$	$t = \operatorname{tg} x$	рациональное

Таблица показывает, какие формы выражений удобнее всего приводить к новой переменной и какой вспомогательный вид уравнения при этом получается.

Замена особенно эффективна там, где выражение повторяется или естественно сводится к одному тригонометрическому аргументу.

Обобщение школьных способов преобразования тригонометрических уравнений

Уравнения, сводящиеся к квадратным

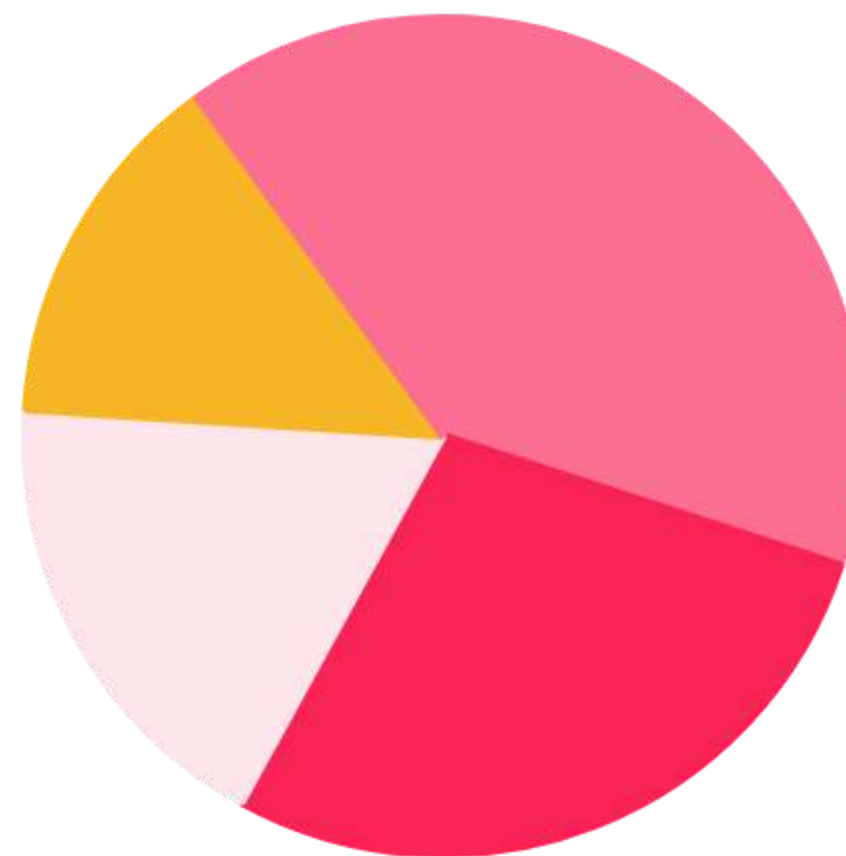
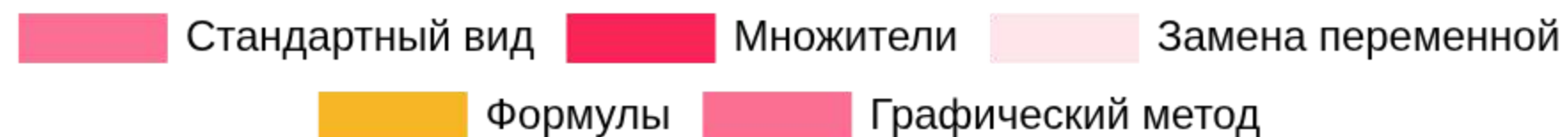
13



Какие методы используются чаще

14

На практике один и тот же пример часто требует сразу нескольких приёмов: сначала преобразования, затем разложения или замены.



Наиболее востребованы базовое преобразование и разложение на множители; они чаще всего сокращают путь к решению.

Схематическое распределение методов в школьной практике

Графический метод решения

15

01

Пересечение графиков

Уравнение рассматривают как равенство функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$. Точки пересечения показывают решения, а их количество сразу видно без длительных вычислений.

02

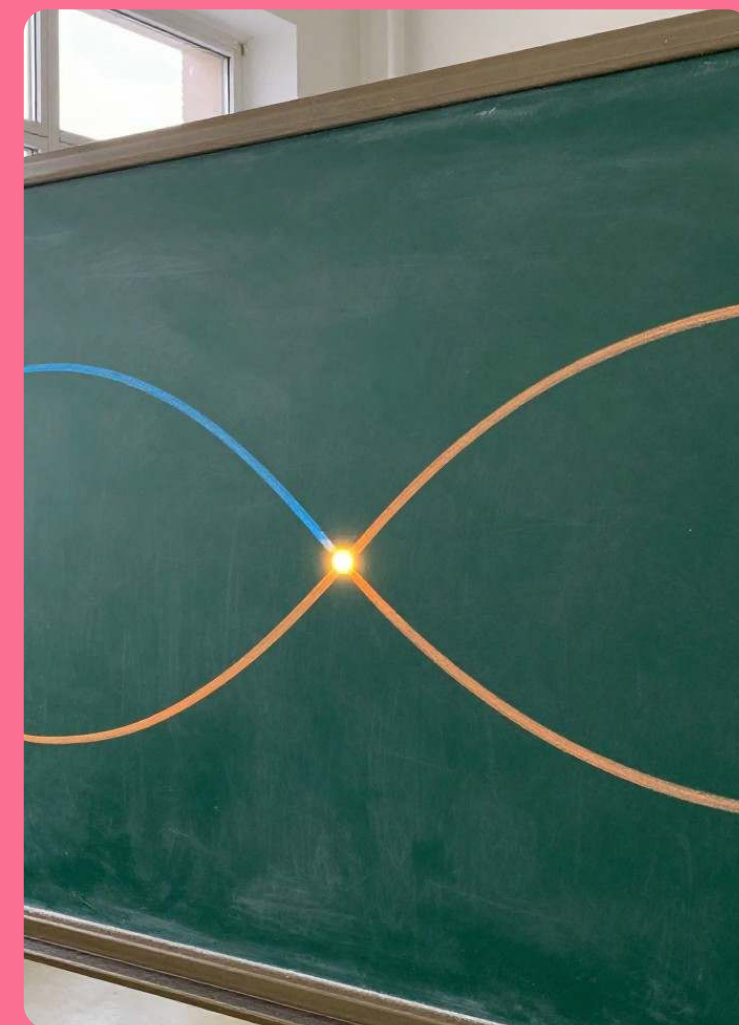
Оценка числа решений

График помогает быстро понять, сколько корней есть на заданном промежутке, и увидеть, меняется ли их число при сдвиге или масштабировании одной из функций.

03

Проверка аналитического ответа

После алгебраических преобразований график служит наглядной проверкой: он позволяет заметить пропущенные решения, лишние корни и особенности поведения функции при параметре.



Типичные ошибки при решении

16



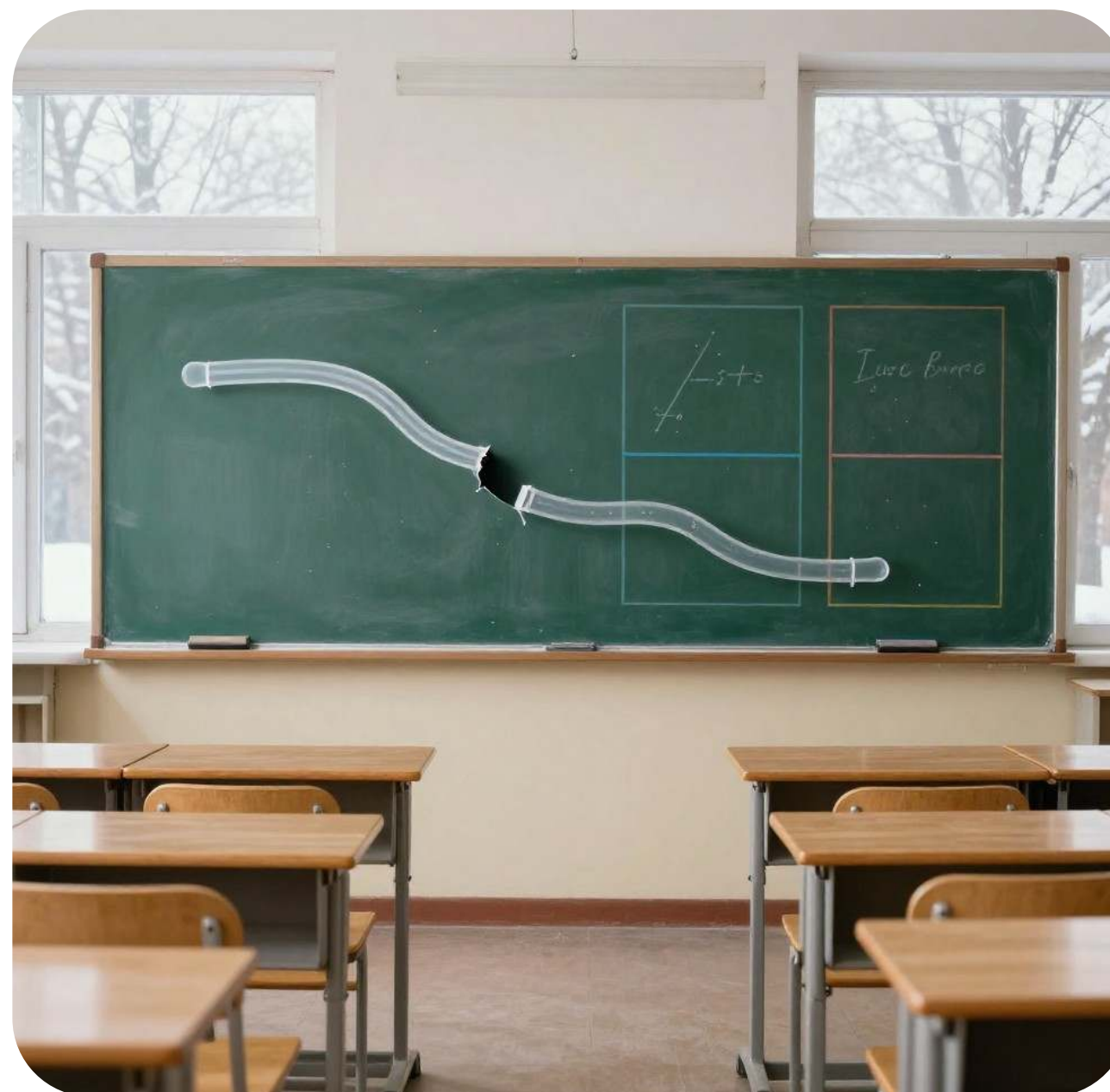
Потеря корней

При делении на выражение с x часть решений может исчезнуть. Поэтому сначала фиксируют, при каких значениях делитель равен нулю, и отдельно проверяют эти случаи.



Неверный период

Часто забывают, что для $\sin x$ и $\cos x$ период равен 2π , а для $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ — π . Из-за этого ответ получается неполным или повторяющимся.



Посторонние корни

После возведения в квадрат появляются лишние значения, которые не удовлетворяют исходному уравнению. Их обязательно отбрасывают по проверке в исходной записи.



Игнорирование ОДЗ

Даже верное преобразование не спасает, если не учтены ограничения на знаменатель, корень или значения тригонометрической функции. Область допустимых значений проверяют в начале и в конце.

Проверка корней без ошибок

17

Проверка особенно важна после преобразований, возведения в квадрат и сокращения на выражение, зависящее от x .

Уравнения с параметром

18

01

Определить область

Сначала устанавливают, при каких значениях параметра уравнение вообще имеет смысл и не нарушает область допустимых значений тригонометрических функций.

02

Найти число решений

Затем выясняют, сколько корней существует на заданном промежутке, и как это число меняется при изменении параметра в правой или левой части.

03

Рассмотреть график

Графическое представление помогает увидеть, как параметр смещает или растягивает график, а значит, меняет количество точек пересечения и характер ответов.

04

Сформулировать условия

Итог решения обычно оформляют в виде условий на параметр, при которых существуют нули, единственное решение или бесконечно много решений.

Опорные формулы для быстрого решения

19

Эти формулы чаще всего используются для упрощения, замены выражений и перехода к более удобному виду уравнения.

Формула	Назначение	Применение
$\sin^2x + \cos^2x = 1$	упрощение	замена
$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$	удвоенный угол	произведение
$1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$	степени синуса	квадраты

Набор базовых тождеств позволяет быстро переводить сложные выражения в стандартный вид и выбирать дальнейший метод решения.

Школьные формулы тригонометрии



Главная стратегия решения

Главный навык в этой теме — быстро распознавать структуру уравнения и выбирать подходящий путь: формулы, множители, замену, стандартный вид или график. Именно это делает решение точным и экономит время.

