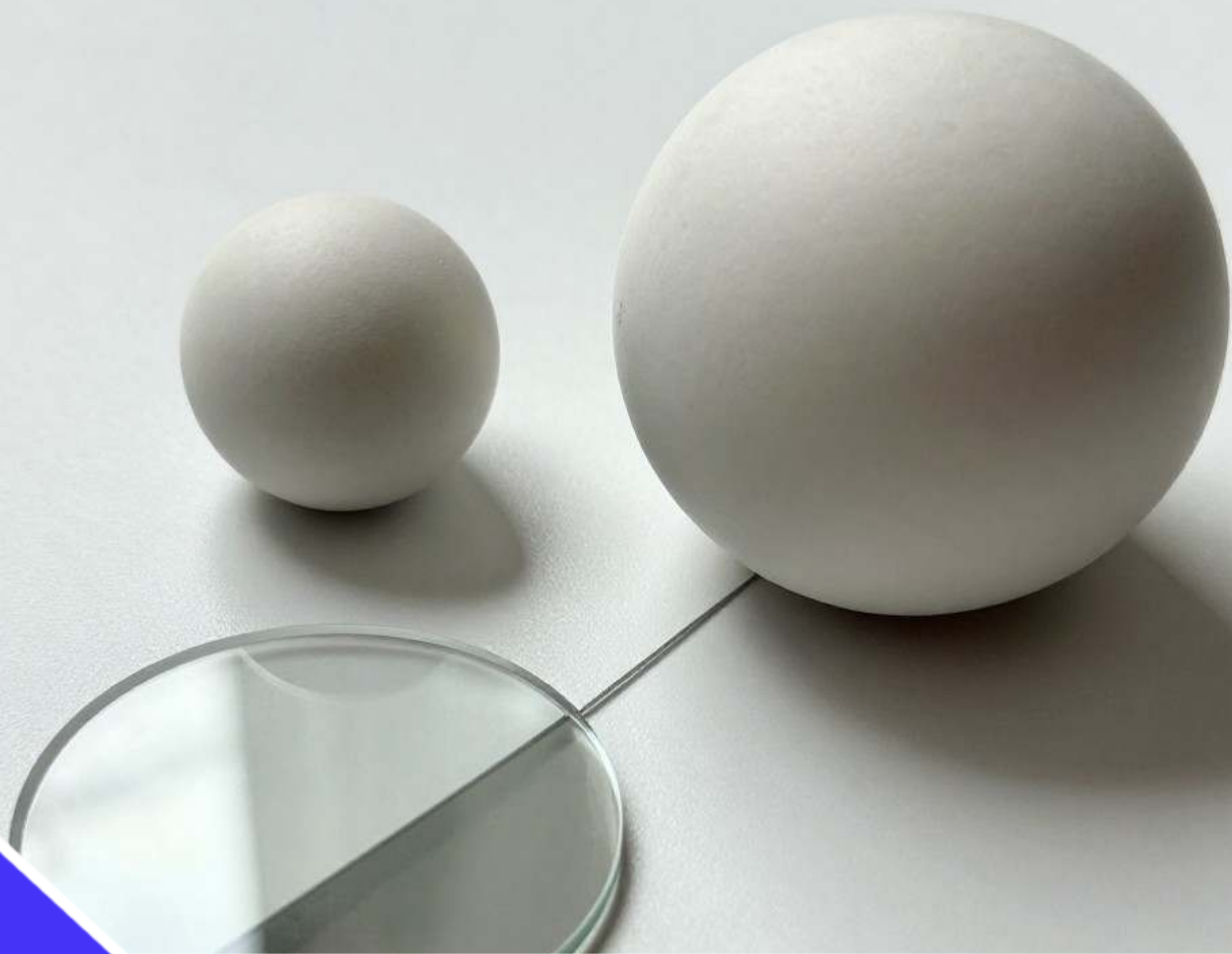


Касание круглых тел: основные понятия и случаи

Касание — это граничное взаимное расположение:
одна точка или одна общая линия без пересечений.





Касание помогает описывать взаимное расположение фигур, доказывать утверждения и находить расстояния. В задачах 11 класса оно связывает чертежи с вычислениями: появляются прямоугольные треугольники, применяются теорема Пифагора и формулы расстояний.

Зачем изучают касание круглых тел в 11 классе

Элементы круглых тел и что именно касается



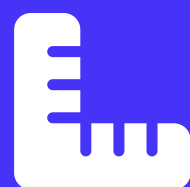
Центр и радиус

Центр определяет «опору» фигуры, а радиус задаёт расстояние до точек поверхности. Именно радиус вместе с расстоянием между центрами задаёт, будет ли касание точечным или линейным.



Окружность и сфера как «плоский» и «пространственный» аналоги

Окружность и сфера — поверхности с одной степенью свободы по радиусу. Поэтому условие касания для них сводится к наличию ровно одной общей точки при согласованных расстояниях.



Диаметр и ось

Диаметр соединяет две крайние точки окружности и помогает оценивать размеры в плоских задачах. Для цилиндра и конуса ключевая роль принадлежит оси, относительно которой задаётся положение касания.



Кривая поверхность меняет логику условий

В отличие от многогранников круглые тела имеют кривизну. Поэтому касание контролируется не только геометрическим «касанием», но и строгими соотношениями радиусов, расстояний до осей и плоскостей.



Ось, вершина и образующая

У конуса есть вершина, а боковую поверхность задаёт образующая. Касание плоскости или другой фигуры часто описывается через то, что эта образующая становится общей линией в предельном положении.



Касательная к окружности и её свойства

Перпендикулярность радиуса и касательной

Касательная к окружности имеет с ней одну общую точку. В точке касания радиус, проведённый к этой точке, перпендикулярен касательной, образуя прямой угол. Это свойство напрямую превращает касание в проверяемую геометрию.

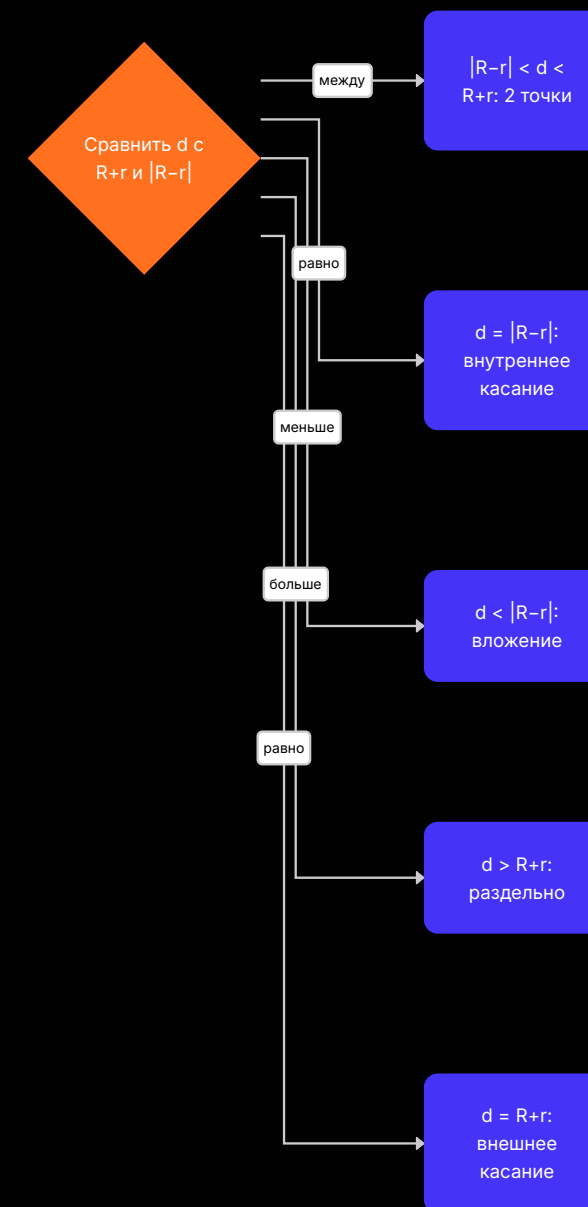
Количество касательных и опорные факты

Через точку окружности проходит единственная касательная. Из внешней точки к окружности можно провести две касательные, симметричные относительно линии, проходящей через центр. Эти утверждения служат отправной точкой при построениях и вычислениях длины.



Условия взаимного расположения двух окружностей

Сравните расстояние между центрами d с $R+r$ и $|R-r|$.



Случаи взаимного расположения окружностей

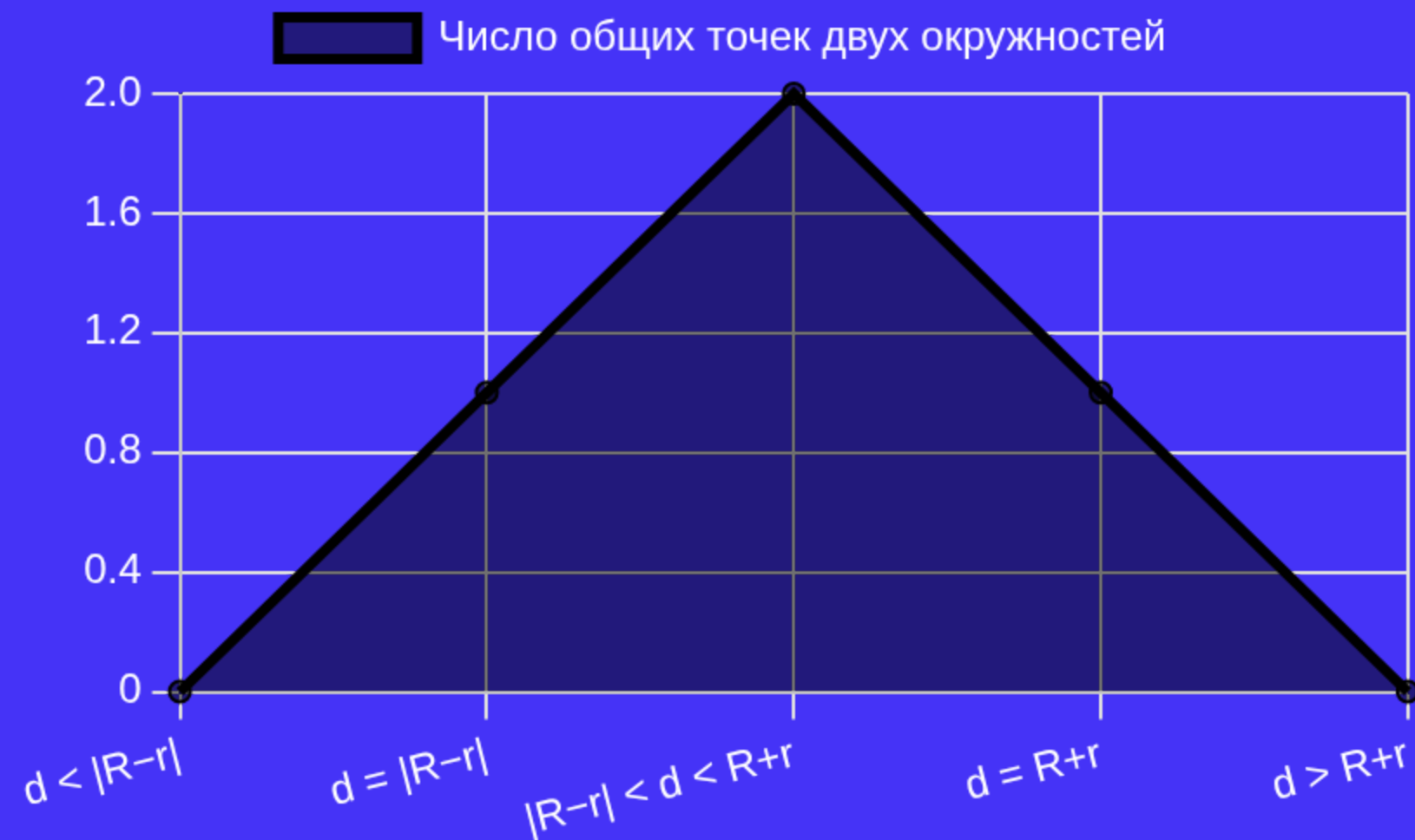
Касание — это граничный случай между пересечением и раздельным положением.

Касание появляется только при равенстве d одному из граничных значений; внутри этих границ окружности пересекаются.

Случай	Условие для d	Общих точек
Внешнее касание	$d = R+r$	1
Пересечение	$ R-r < d < R+r$	2
Внутреннее касание	$d = R-r $	1
Раздельное положение	$d > R+r$	0
Вложение	$d < R-r $	0

Свойства окружностей в школьной геометрии

Число общих точек двух окружностей



Школьная геометрия: зависимости при взаимном расположении окружностей

По графику видно, что максимум достигается только в режиме пересечения: касание даёт ровно одну общую точку на границе режимов.

Число общих точек изменяется скачком при переходе через значения $|R-r|$ и $R+r$, поэтому касание — строго предельное положение.

Общие касательные двух окружностей

01

Общая касательная касается обеих окружностей в соответствующих точках. При внешнем касании в точке соприкосновения касательная одна — она одновременно «поддерживает» обе окружности.

02

Если окружности не пересекаются, то возможны четыре общие касательные: две внешние и две внутренние. Их наличие связано с тем, что существует прямая, которая может сохранять касательное касание к обеим поверхностям.

03

Когда окружности пересекаются, внутренние общие касательные исчезают: прямая не может быть касательной к обеим окружностям одновременно в нужных точках. Остаётся меньше касательных, а симметрия определяется взаимным положением центров.

Касание шаров и сфер

- Шары касаются в одной точке поверхности. Центры двух шаров и точка касания лежат на одной прямой, а касание означает совпадение расстояния между центрами с геометрической границей радиусов.
- При внешнем касании расстояние между центрами равно сумме радиусов, $d = R + r$. При внутреннем касании — разности радиусов по модулю, $d = |R - r|$, и тогда одна сфера «входит» в другую без пересечения поверхностей.
- Для сферы как поверхности шара сохраняется то же расстояние между центрами и радиусы, но важна именно поверхность. Это позволяет решать задачи на пространственные расстояния и построение сечений с точными граничными условиями.

Сфера и плоскость: условие касания



- Плоскость касается сферы, если имеет с её поверхностью ровно одну общую точку. В точке касания радиус, проведённый к этой точке, перпендикулярен плоскости касания, поэтому расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу.
- Если расстояние от центра до плоскости меньше радиуса, сечение получается окружностью; при равенстве — вырождается в одну точку. Именно эта идея лежит в основе задач на сечения в стереометрии.

Цилиндр и касание плоскостью

01

Цилиндр состоит из двух равных оснований — окружностей — и боковой поверхности, полученной движением образующей. Для описания касания важны ось цилиндра и радиус основания, так как именно они определяют положение плоскости.

02

Плоскость касается цилиндра по образующей, если она параллельна оси и касается окружности основания. Тогда общая линия соприкосновения лежит на боковой поверхности и соответствует одному «касательному» положению относительно основания.

03

Если плоскость параллельна оси и проходит через край боковой поверхности, касание становится линейным в том смысле, что общая часть плоскости и цилиндра — одна прямая. В чертеже это видно по вырождению окружности пересечения.

04

В задачах нельзя смешивать разные сценарии: касание основания, касание боковой поверхности и пересечение по кривой. При пересечении плоскостью обычно получается окружность или эллипс, поэтому сначала определяют взаимное положение плоскости относительно оси.

Конус и условия касания

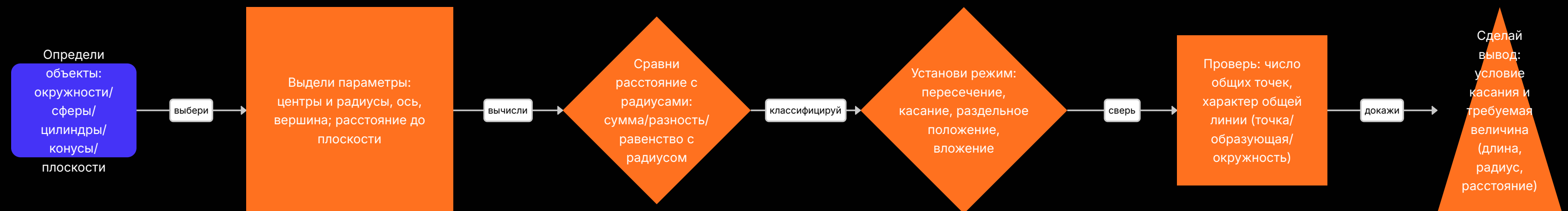
Конус задаётся вершиной, основанием в виде окружности и осью симметрии. Плоскости, рассматриваемые в задачах, обычно «сравнивают» с боковой поверхностью по отношению к оси и образующим.

Плоскость касается конуса по одной образующей, когда проходит через вершину и располагается так, что касается основания или занимает предельное положение относительно боковой поверхности. Тогда общая линия — одна образующая, а не область.

Для прямого кругового конуса касание особенно связано с геометрией «правильной» фигуры: углом при вершине, высотой и радиусом основания. На практике используют отношения между этими параметрами, а также рассматривают сечения плоскостью через ось.

Алгоритм решения задач на касание

Стандартная последовательность действий для фигур: окружности, сферы, цилиндры, конусы и плоскости



Основные формулы касания

Касание задаётся точным равенством: расстояние между центрами (или от центра до плоскости) соответствует геометрическому параметру фигур.

Во всех ключевых случаях касание превращается в проверку одного равенства расстояний и радиусов: либо через сумму/разность, либо через перпендикулярность радиуса.

Объекты	Условие касания
Две окружности	$d = R + r$ или $d = R - r $
Два шара	$d = R + r$ или $d = R - r $
Сфера и плоскость	расстояние от центра до плоскости = радиусу
Радиус и касательная к окружности	радиус перпендикулярен касательной
Радиус сферы и касательная плоскость	радиус перпендикулярен плоскости

Теоретические свойства касательных и определение касания в школьной геометрии

Сравнение расстояний при разных случаях

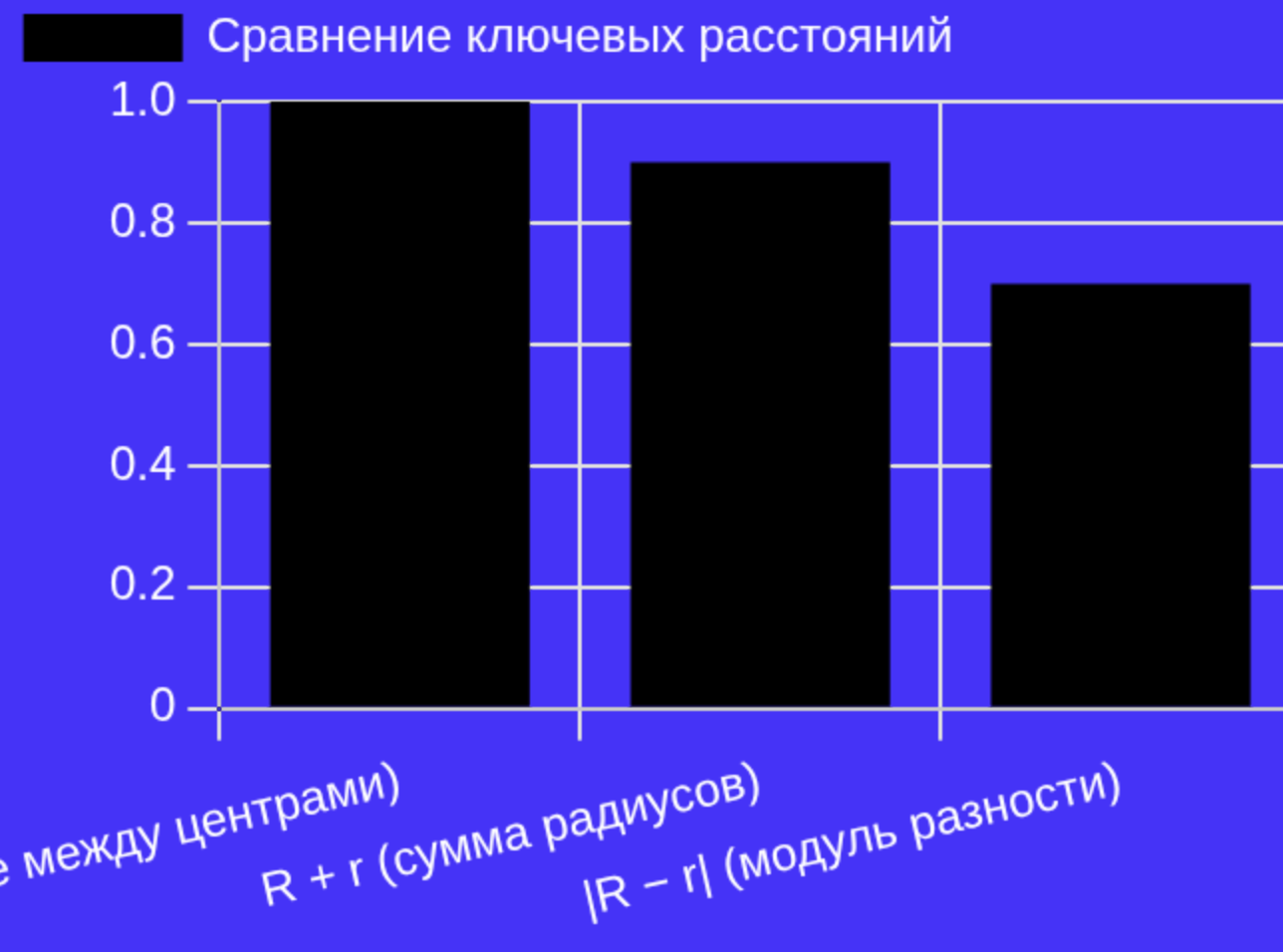


Схема условий взаимного расположения окружностей по параметрам d , R и r (школьная геометрия).

Эта диаграмма помогает быстро ориентироваться: касание — «граница» между режимами, где d больше суммы (нет общих точек), меньше разности (вложение) или лежит между ними.

Когда d совпадает с $R + r$ или с $|R - r|$, число общих точек становится равным 1. При промежуточных значениях появляется пересечение с двумя точками, а при выходе за границы — 0 общих точек.

Типичные ошибки в задачах на касание

- Частая ошибка — смешение касания и пересечения: одну общую точку принимают за касание без проверки, как минимум, второй возможной точки пересечения. Если d не на границе, ситуация почти всегда меняется.
- Вторая ошибка связана с модулем: формула внутреннего касания двух окружностей и двух шаров требует именно $|R-r|$. Без модуля можно получить отрицательные расстояния и неверный вывод о числе общих точек.
- Третья ошибка — подмена расстояния между центрами расстоянием между поверхностями. Для касания критерий формулируется через d , а расстояние между поверхностями появляется лишь как производное величина в вычислениях.
- Ещё одна типичная ловушка — плоскость касается сферы «по расстоянию», но забывают про перпендикулярность радиуса. Для касания сфера и плоскость должны иметь одну общую точку, что обеспечивается перпендикуляром из центра.

Применение касания в технике и повседневной жизни

Шины и ролики: точное сопряжение контакта

Колёса, ролики и подшипники работают так, чтобы поверхности соприкасались корректно и предсказуемо. Когда детали «тяготеют» к касательному контакту, нагрузка распределяется стабильнее, а трение и износ становятся управляемыми за счёт геометрии.



Шестерни и механизмы: согласование профилей

В зубчатых передачах касание помогает настроить точное взаимодействие элементов. Геометрически это выражается в согласовании форм и расстояний, чтобы контакт происходил в допустимой конфигурации, а не превращался в нежелательное пересечение поверхностей.



Упаковка и раскладка кругов: экономия места

Когда круглые предметы нужно разложить плотно, касание становится естественным ориентиром. Если круги соприкасаются по касательной, их размещение получается компактным и симметричным, а пустоты между элементами сокращаются.

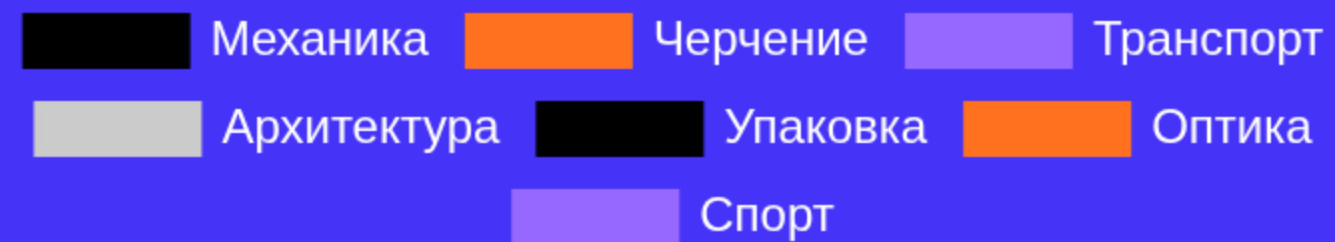


Арки, трубы и соединительные детали

В архитектуре и машиностроении касание используют при проектировании дуг, арок и соединительных элементов. Точное сопряжение по кривым поверхностям помогает сохранить прочность и аккуратный внешний вид, особенно в узлах примыкания.



Сферы применения касания круглых тел



Условная сравнительная оценка направлений применения в учебных и практических задачах (без привязки к статистике).

Касание регулярно появляется там, где важны точные сопряжения поверхностей и предсказуемый контакт: от работы механизмов до построения аккуратных чертежей и моделей.

Диаграмма показывает, что наибольшее внимание обычно уделяют механике и черчению: именно там касание позволяет задавать контакт через строгие геометрические условия и быстро выполнять вычисления.

Касание как основа доказательств и вычислений

01

Доказательства на касание опираются на перпендикулярность: радиус, проведённый в точку касания, образует прямой угол с касательной. Аналогично в стереометрии радиус до точки касания перпендикулярен касательной плоскости.

02

Когда возникает прямоугольный треугольник, задача быстро превращается в вычисление по теореме Пифагора. Дополнительно помогают сравнение длин и формулы расстояния между точкой и прямой или между точкой и плоскостью.

03

Если условие касания записано через равенство расстояний, то становится возможным перевести «сложную картинку» в точные числовые соотношения. Поэтому тема особенно эффективна в олимпиадных и экзаменационных задачах по геометрии.



Касание — это строгая геометрическая граница между пересечением, раздельным положением и вложением. Для окружностей, шаров, сферы, цилиндра и конуса оно выражается через расстояния, радиусы, оси и плоскости, что упрощает доказательства и вычисления в 11 классе.

Касание круглых тел: граница между
«сходятся» и «пересекаются»