

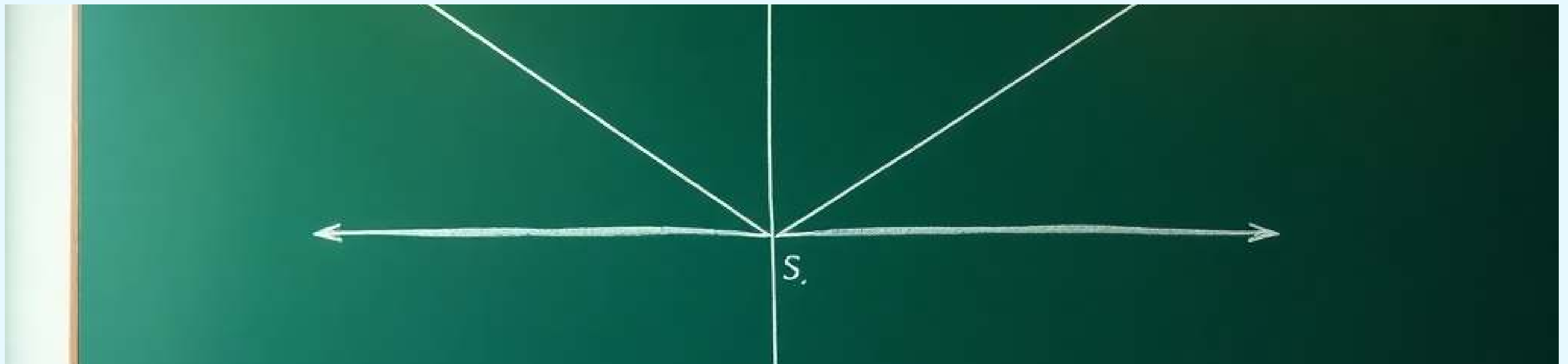
Синус, косинус и тангенс углов α и $-\alpha$



Как меняются тригонометрические функции при отражении угла на окружности?

Зачем разбирать углы α и $-\alpha$

Это правило помогает быстрее преобразовывать тригонометрические выражения, проверять решения уравнений и избегать ошибок со знаками. Свойства отрицательных аргументов напрямую связаны с единичной окружностью и чётностью функций, поэтому тема объединяет геометрию и алгебру.



Определение синуса и косинуса на единичной окружности

01

Единичная окружность

На единичной окружности каждой точке, соответствующей углу α , сопоставляют координаты $P(x, y)$. Именно они задают значения тригонометрических функций и делают их геометрически наглядными.

02

Синус и косинус

Для точки $P(x, y)$ выполняется $\sin \alpha = y$, а $\cos \alpha = x$. Поэтому синус связан с вертикальным положением точки, а косинус — с её горизонтальным положением.

03

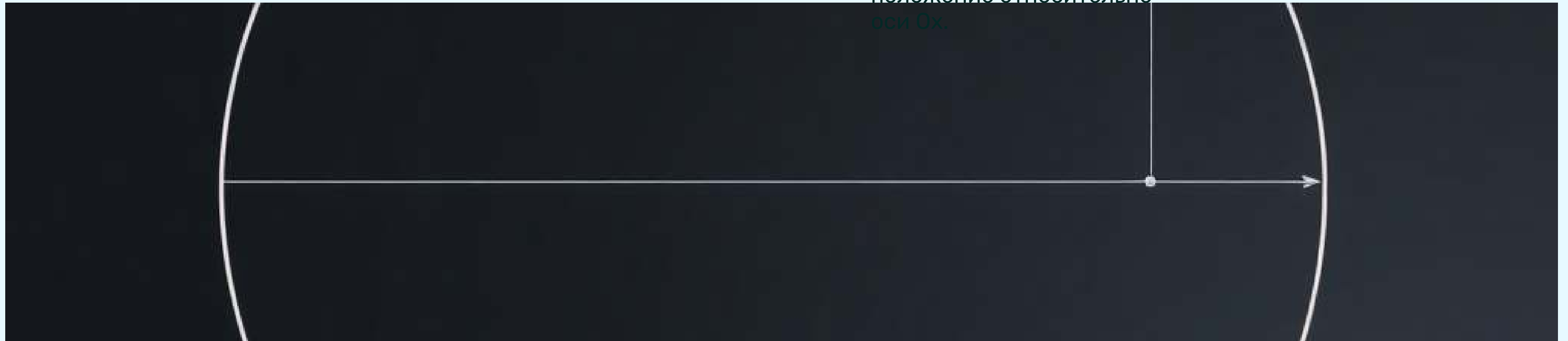
Положительный и отрицательный угол

Положительный угол откладывают против часовой стрелки, а отрицательный — по часовой стрелке. При переходе от α к $-\alpha$ точка смещается в симметричное положение относительно оси Ox .

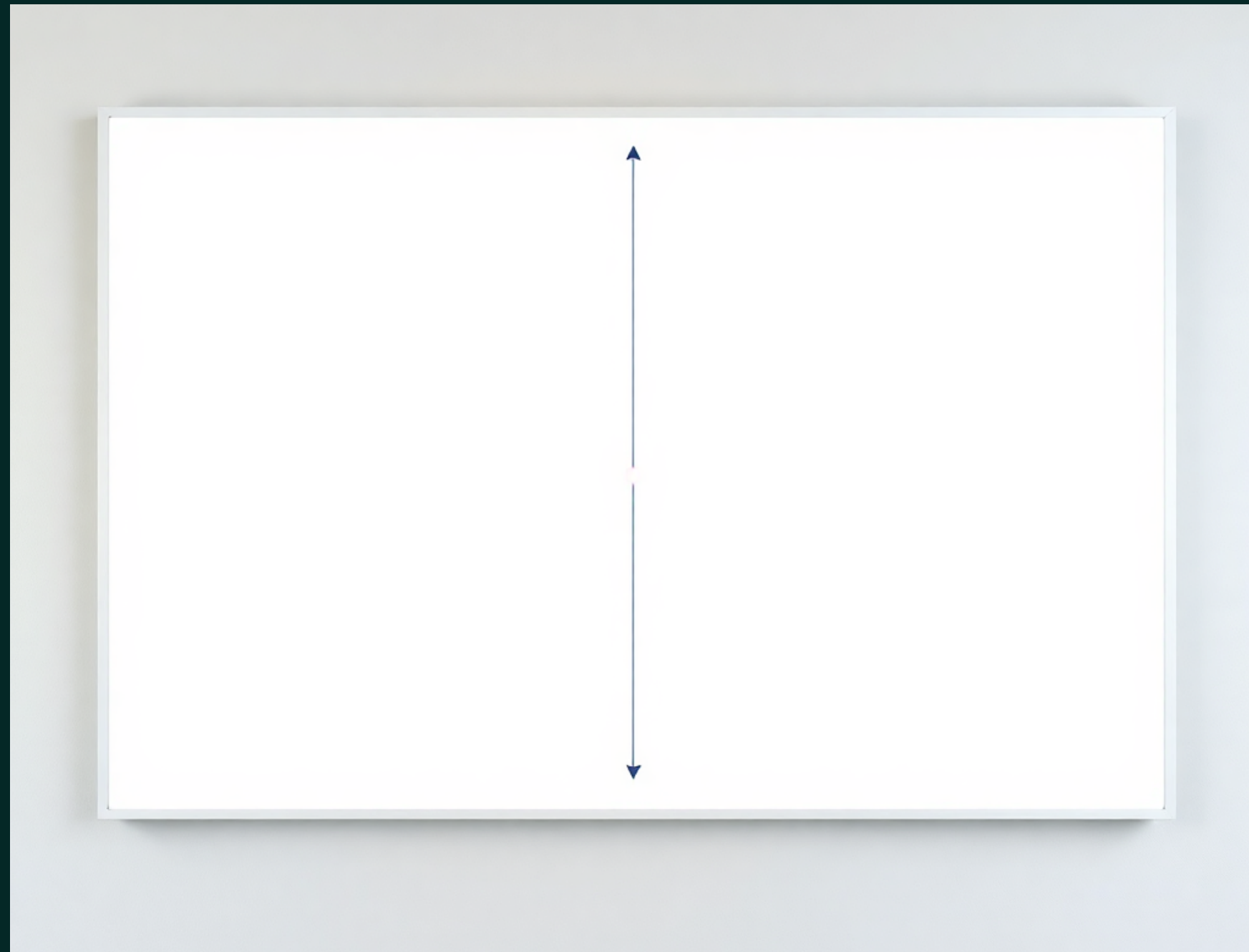
04

Что меняется в координатах

После отражения относительно оси Ox абсцисса остаётся прежней, а ордината меняет знак. Именно это и приводит к разным формулам для синуса и косинуса отрицательного угла.



Геометрический смысл углов α и $-\alpha$



Симметрия точек

Точки, соответствующие углам α и $-\alpha$, лежат по разные стороны от оси Ox , но остаются зеркальными относительно неё. Такая симметрия сразу подсказывает, какие координаты сохраняются, а какие меняются.



Одинаковая абсцисса

У симметричных точек x -координаты совпадают, потому что отражение относительно оси Ox не сдвигает точку по горизонтали. Отсюда следует равенство $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$.



Противоположная ордината

Значения y -координат у точек противоположны по знаку: одна ордината равна y , другая — $-y$. Поэтому $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$, а сама формула вытекает из геометрии, а не из запоминания.

Основные формулы для углов α и $-\alpha$

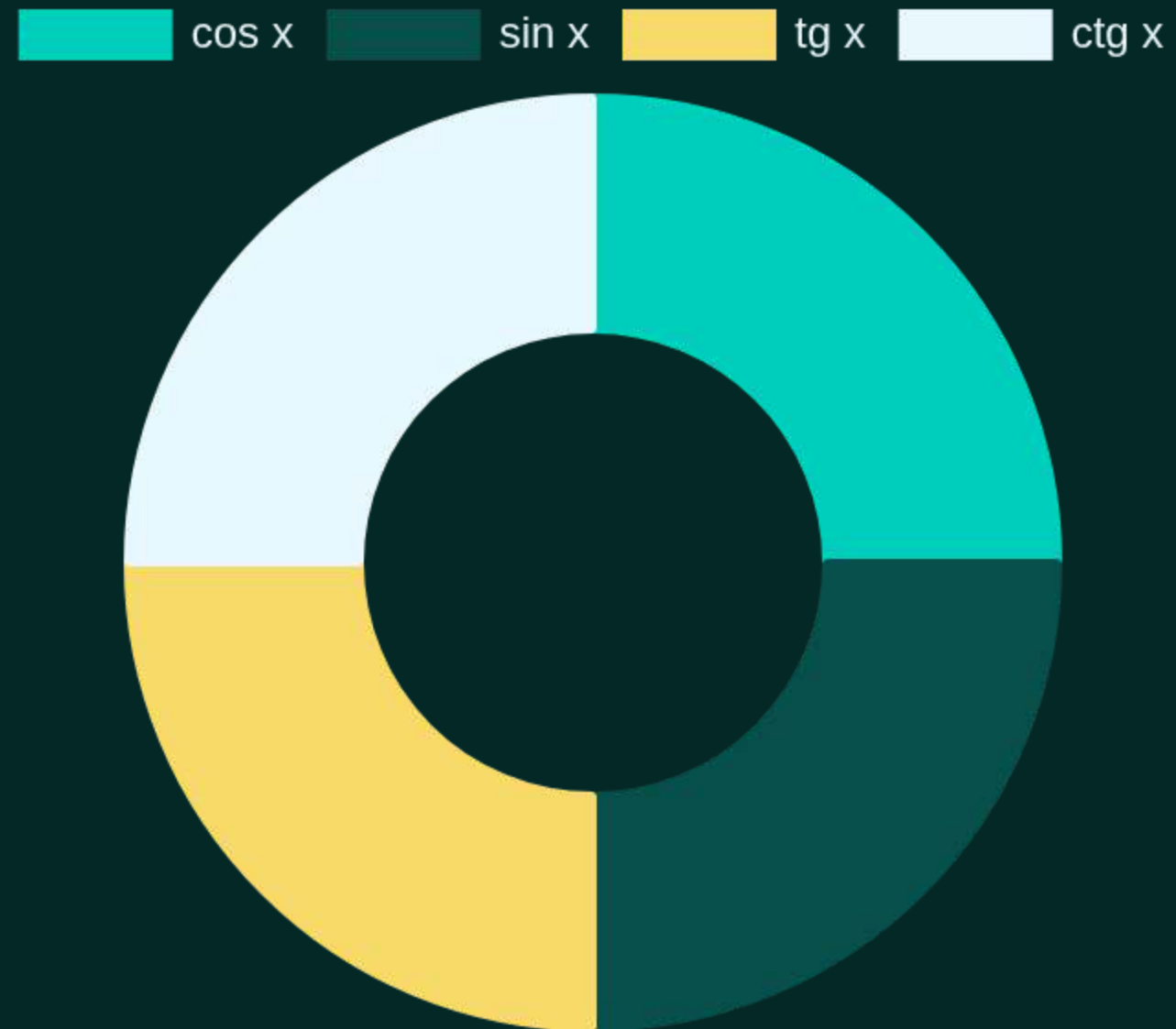
Таблица показывает, как меняются значения тригонометрических функций при замене аргумента на противоположный.

При замене α на $-\alpha$ знак сохраняет только косинус; остальные тригонометрические функции меняют знак.

Функция	Формула	Свойство
$\sin$	$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	нечётная
$\cos$	$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	чётная
tg	$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$	нечётная
ctg	$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$	нечётная

Единичная окружность и определения чётной и нечётной функции

Чётные и нечётные тригонометрические функции



-
Диаграмма группирует функции по типу симметрии относительно замены аргумента на противоположный.
-
Косинус относится к чётным функциям, а синус, тангенс и котангенс — к нечётным.

Школьные определения чётной и нечётной функции, курс алгебры 10 класса

Почему синус меняет знак

Вертикальная координата

Синус определяется ординатой точки на единичной окружности. Когда точка отражается относительно оси Ox , именно вертикальная координата становится противоположной, а горизонтальная не меняется.

Следствие отражения

Поэтому для любого угла справедливо равенство $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$. Это относится и к острым, и к тупым углам, а также к углам, заданным в радианах.

Геометрическая причина

Нечётность синуса не нужно заучивать отдельно: она естественно следует из того, как функция связана с положением точки на окружности. Геометрия здесь даёт точное объяснение знака.



Почему косинус сохраняет знак

01 | Горизонтальная координата

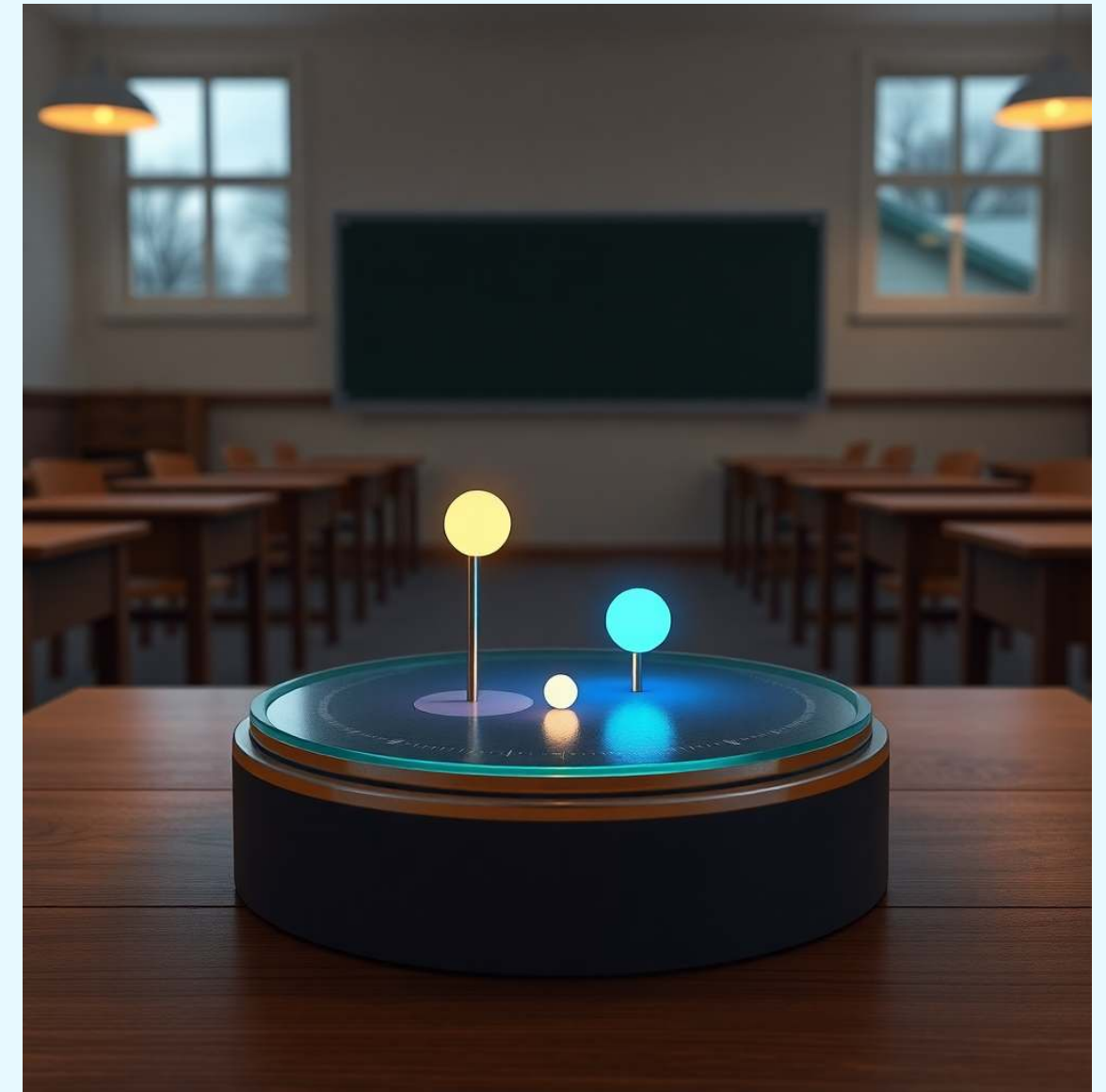
Косинус задаётся абсциссой точки на единичной окружности. При отражении относительно оси Ox горизонтальное положение точки остаётся тем же, поэтому значение функции не меняется.

02 | Формула для отрицательного угла

Из сохранения абсциссы сразу следует равенство $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$. Это и есть свойство чётной функции, которое удобно использовать при преобразовании выражений с отрицательными аргументами.

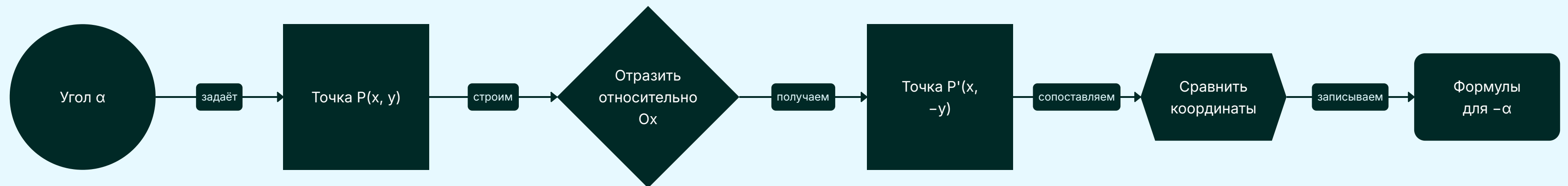
03 | Как быстро проверить

Если нужно определить знак косинуса, достаточно представить, где находится точка относительно оси Ox . Положение выше или ниже оси не влияет на $\cos$, потому что важна только абсцисса.



Как получить формулы для отрицательного угла

Пошаговое отражение точки на единичной окружности и сравнение её координат



Пример для углов 30° и -30°

01

Значения для 30°

Для угла 30° известны точные значения: $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Эти числа удобно использовать как опорный пример.

02

Переход к -30°

При замене угла на -30° меняют знак только синус и тангенс. Поэтому $\sin(-30^\circ) = -\frac{1}{2}$, а $\operatorname{tg}(-30^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, тогда как косинус остаётся прежним.

03

Сравнение результатов

Получаем $\cos(-30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то есть значение не изменилось. Это наглядно подтверждает, что косинус — чётная функция, а синус и тангенс — нечётные.

04

Вывод по примеру

Симметричные лучи на окружности показывают, что отрицательный угол не требует новых вычислений: достаточно знать значение для α и применить правило смены знака.



Сравнение значений для нескольких углов

α	α и $-\alpha$	Значения при α	Вывод
30°	$30^\circ / -30^\circ$	$\frac{1}{2}; \sqrt{3}/2; 1/\sqrt{3}$	$\sin, \operatorname{tg}$ меняются
45°	$45^\circ / -45^\circ$	$\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2; 1$	$\cos$ сохраняется
60°	$60^\circ / -60^\circ$	$\sqrt{3}/2; \frac{1}{2}; \sqrt{3}$	сохраняется только $\cos$

Значения специальных углов из школьного курса алгебры и тригонометрии.

Сопоставление значений для острых углов наглядно показывает, какие функции меняют знак при переходе к противоположному аргументу.

Во всех примерах косинус остаётся неизменным, а синус и тангенс при отрицательном аргументе меняют знак.

Ключевые идеи о чётности и нечётности



Общее правило

Чётность и нечётность задают поведение функции при замене аргумента на противоположный. Это универсальный признак, который помогает сразу предсказать результат без лишних вычислений и проверок.



Чётная функция

Если значение функции не меняется при переходе от x к $-x$, функция называется чётной. В тригонометрии так ведёт себя косинус, что удобно использовать при упрощении выражений.



Нечётная функция

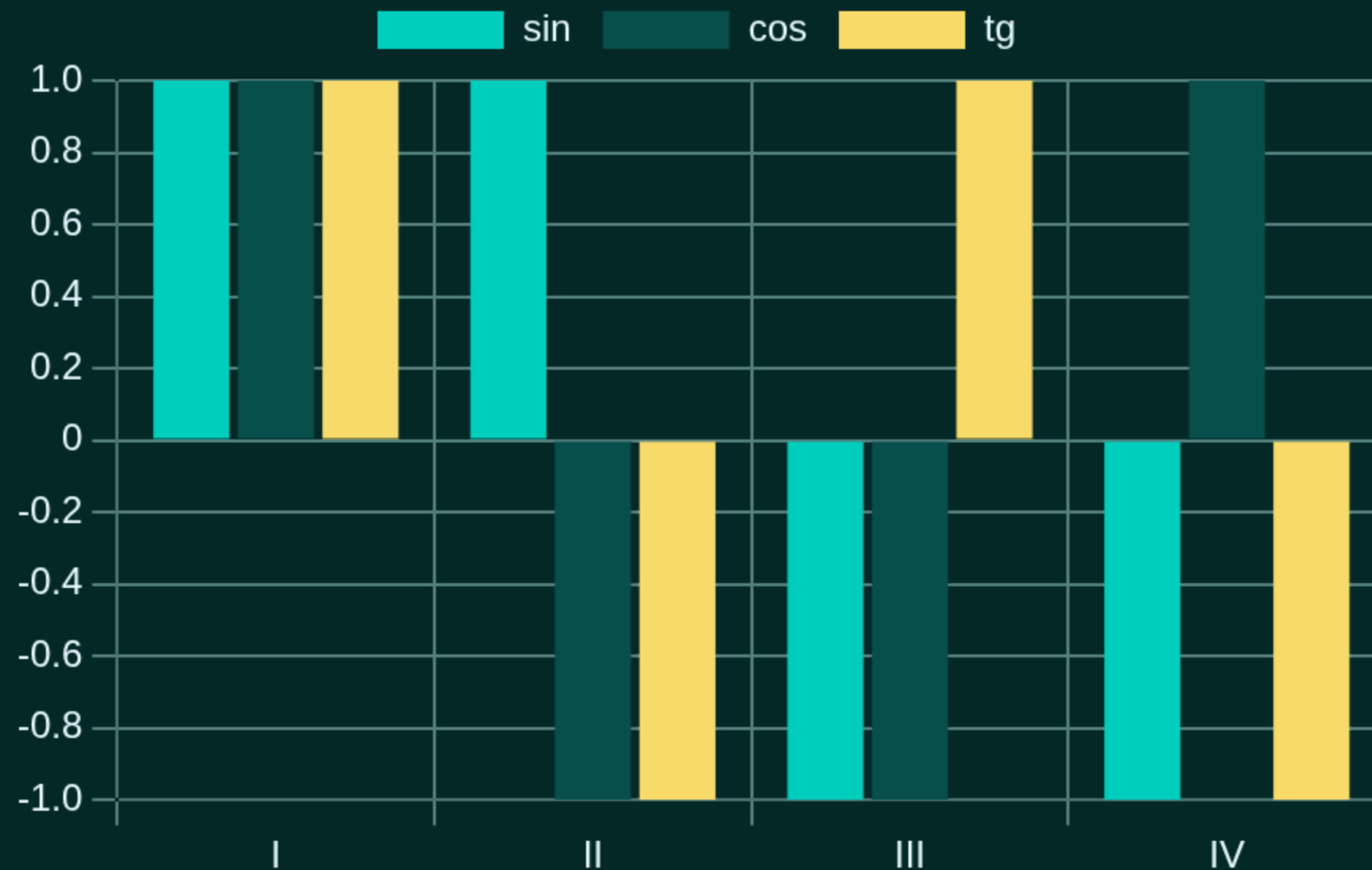
Если при замене x на $-x$ значение меняет знак, функция является нечётной. Именно так ведут себя синус, тангенс и котангенс, что связано с симметрией относительно начала координат.



Связь с окружностью

На единичной окружности эти свойства имеют наглядное геометрическое объяснение: отражение точки относительно оси Ox сохраняет абсциссу, но меняет ординату, а вместе с ней и значения функций.

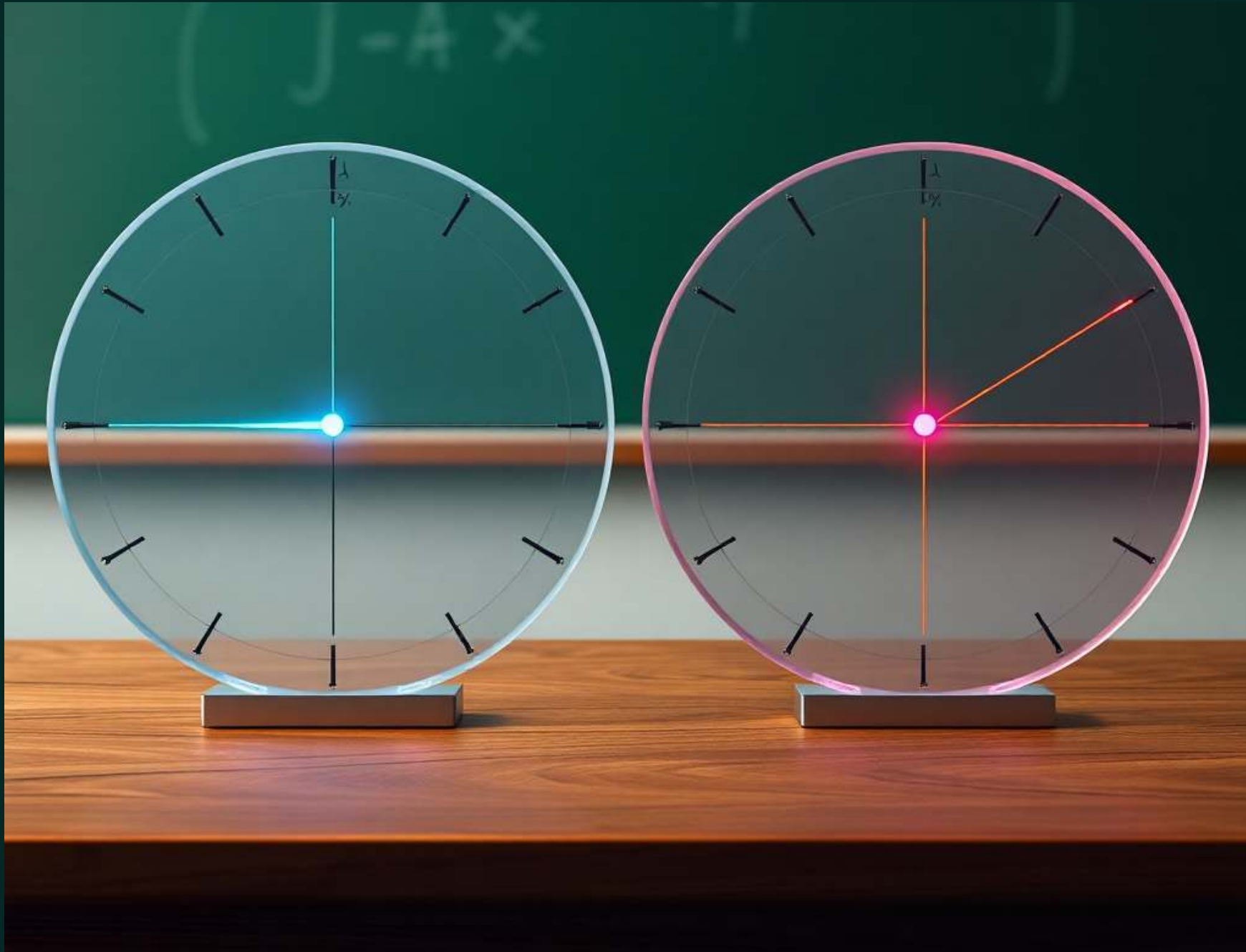
Знаки тригонометрических функций в координатной плоскости



Правила знаков тригонометрических функций по четвертям координатной плоскости.

- Положительный или отрицательный знак функции определяется четвертью, в которой находится точка на окружности, связанная с углом.
- При отражении относительно оси Ox меняются знаки синуса и тангенса, а знак косинуса сохраняется.

Типичные ошибки при работе с углом $-\alpha$



Меняют всё сразу

Частая ошибка — автоматически ставить минус перед каждым тригонометрическим выражением. На самом деле знак меняется только у синуса, тангенса и котангенса; косинус при этом остаётся без изменения.

Путают знак аргумента

Неверно считать, что отрицательный аргумент обязательно делает значение функции отрицательным. Знак результата зависит не от самого минуса, а от чётности или нечётности функции.

Игнорируют симметрию

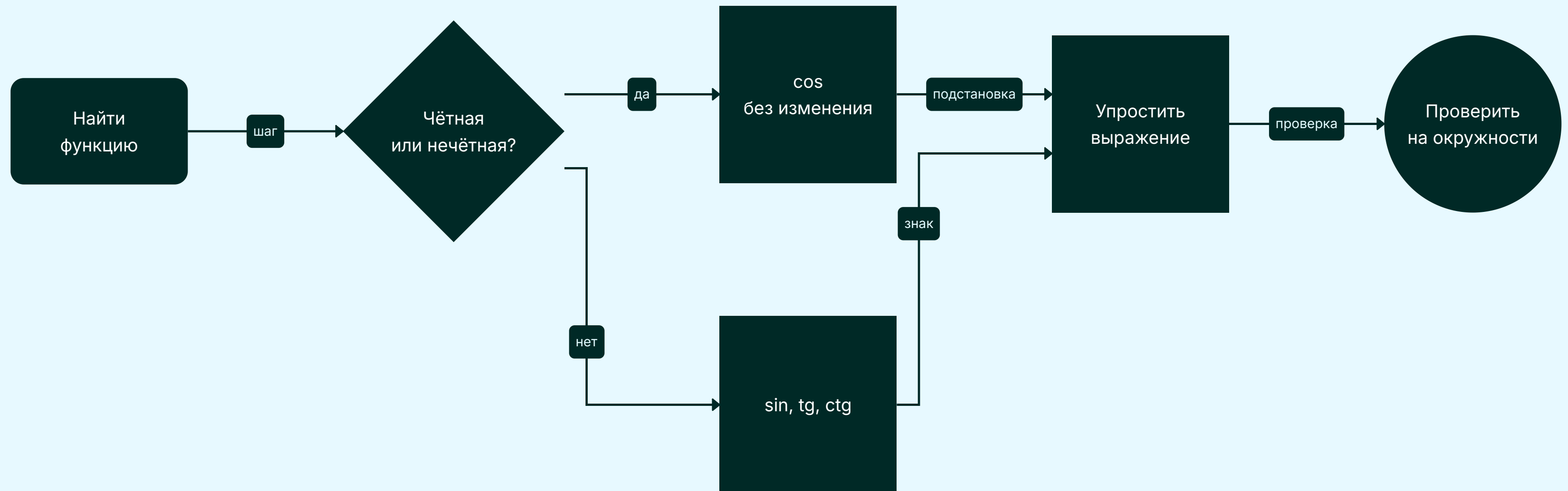
Если не представить точку на единичной окружности, легко ошибиться в ответе. Геометрическая проверка показывает, что отражение относительно оси Ox сохраняет абсциссу и меняет ординату.

Забывают котангенс

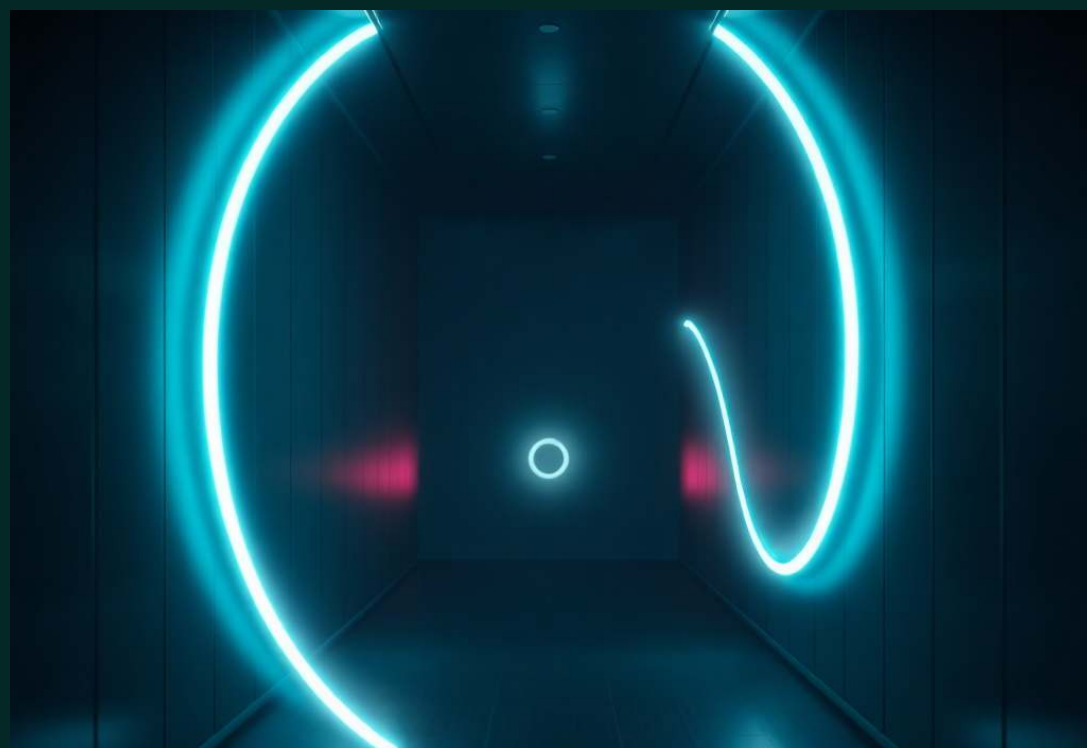
Ещё одна ошибка — учитывать правило только для синуса и тангенса. Котангенс тоже нечётная функция, поэтому при замене α на $-\alpha$ его знак обязательно меняется.

Алгоритм проверки выражения с отрицательным углом

Последовательность действий основана на свойствах чётных и нечётных тригонометрических функций и их геометрическом смысле.

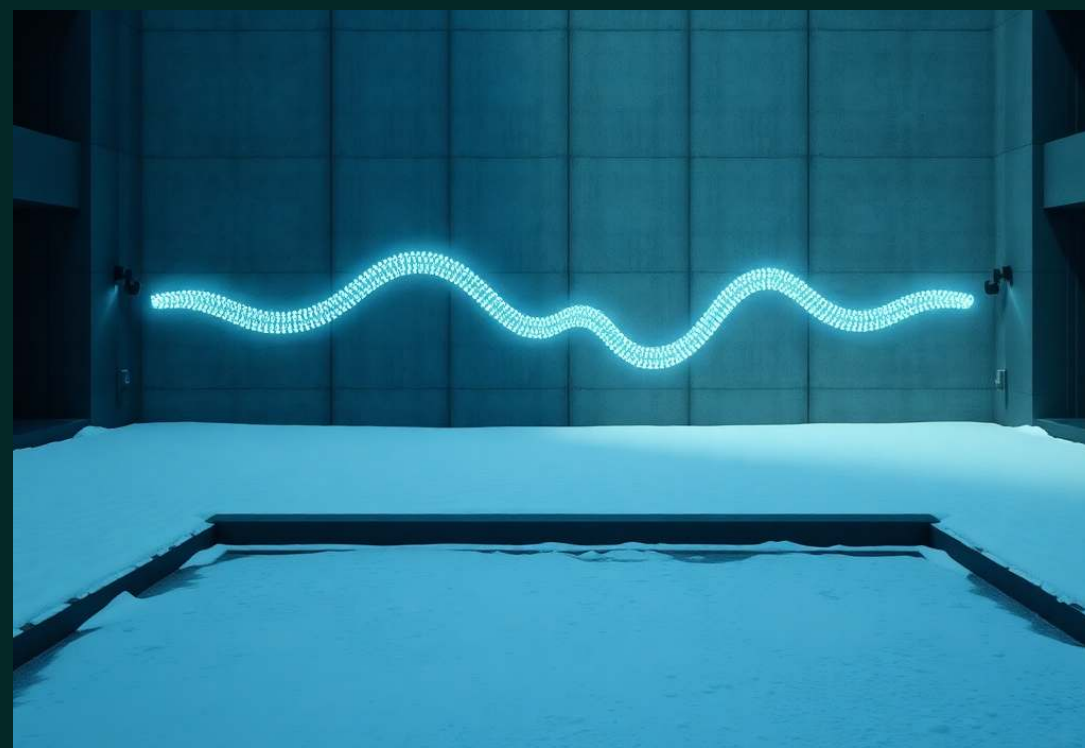


Графическое подтверждение на графиках функций



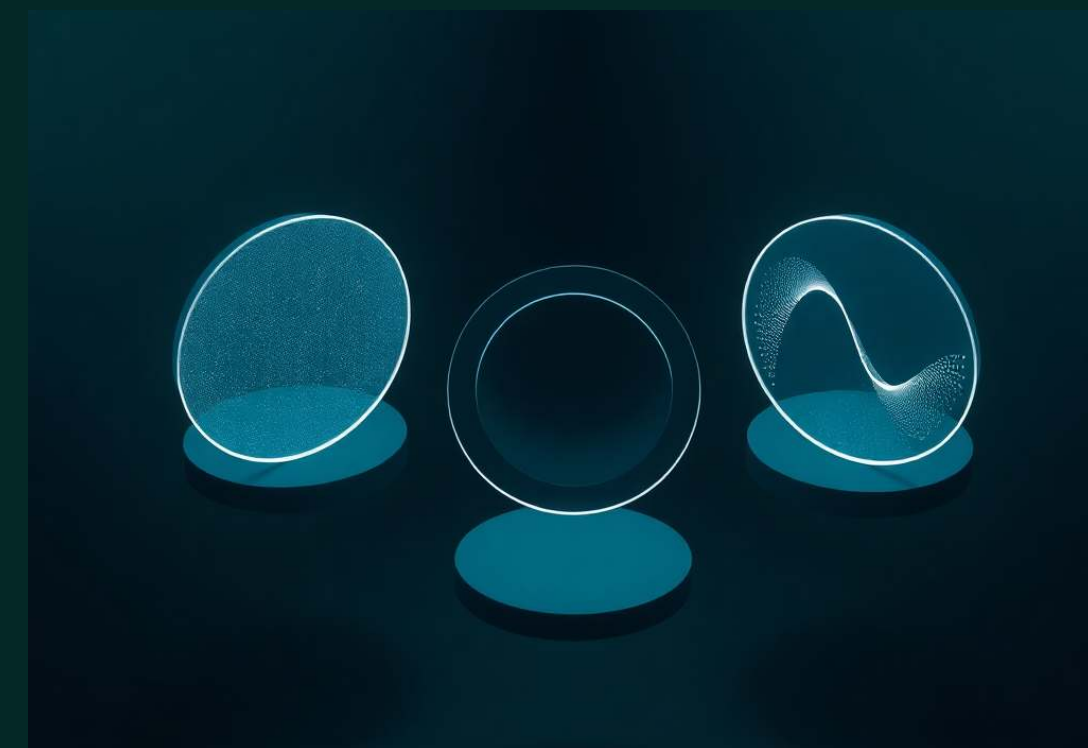
Синус и тангенс: зеркальная динамика

На графиках $y=\sin x$ и $y=\tan x$ точки с аргументами x и $-x$ располагаются симметрично относительно начала координат. Это означает, что соответствующие значения равны по модулю, но противоположны по знаку, что и выражает нечётность функций.



Косинус: устойчивость к смене знака

График $y=\cos x$ ведёт себя иначе: точки при x и $-x$ имеют одинаковую высоту. Такая симметрия относительно оси Oy наглядно подтверждает, что косинус — чётная функция и не меняет значение при смене знака аргумента.



Три графика — одно правило

Если нанести пары точек на каждый график, различие становится очевидным без формул. Синус и тангенс показывают противоположные ординаты, а косинус сохраняет их, связывая алгебраические правила с наглядной геометрией.

Памятка формул для отрицательных аргументов

Краткая таблица помогает быстро восстановить правила при решении задач и проверке преобразований.

Из всех основных функций только косинус сохраняет значение при замене аргумента на противоположный.

Функция	Формула	Свойство	Смысл
$\sin$	$-\sin \alpha$	нечётная	знак меняется
$\cos$	$\cos \alpha$	чётная	значение сохраняется
tg	$-\operatorname{tg} \alpha$	нечётная	знак меняется
ctg	$-\operatorname{ctg} \alpha$	нечётная	знак меняется

Свойства чётных и нечётных функций в тригонометрии.

Применение формул в задачах 10 класса

01 Упрощение выражений

При наличии аргумента $-\alpha$ сначала применяют формулы чётности и нечётности, а затем сокращают запись. Это позволяет быстро убрать лишние знаки и привести выражение к более удобному виду.

02 Преобразование тождеств

В доказательствах тождеств формулы для отрицательных аргументов помогают заменить часть выражения на эквивалентную, но более простую форму. Благодаря этому промежуточные преобразования становятся короче и прозрачнее.

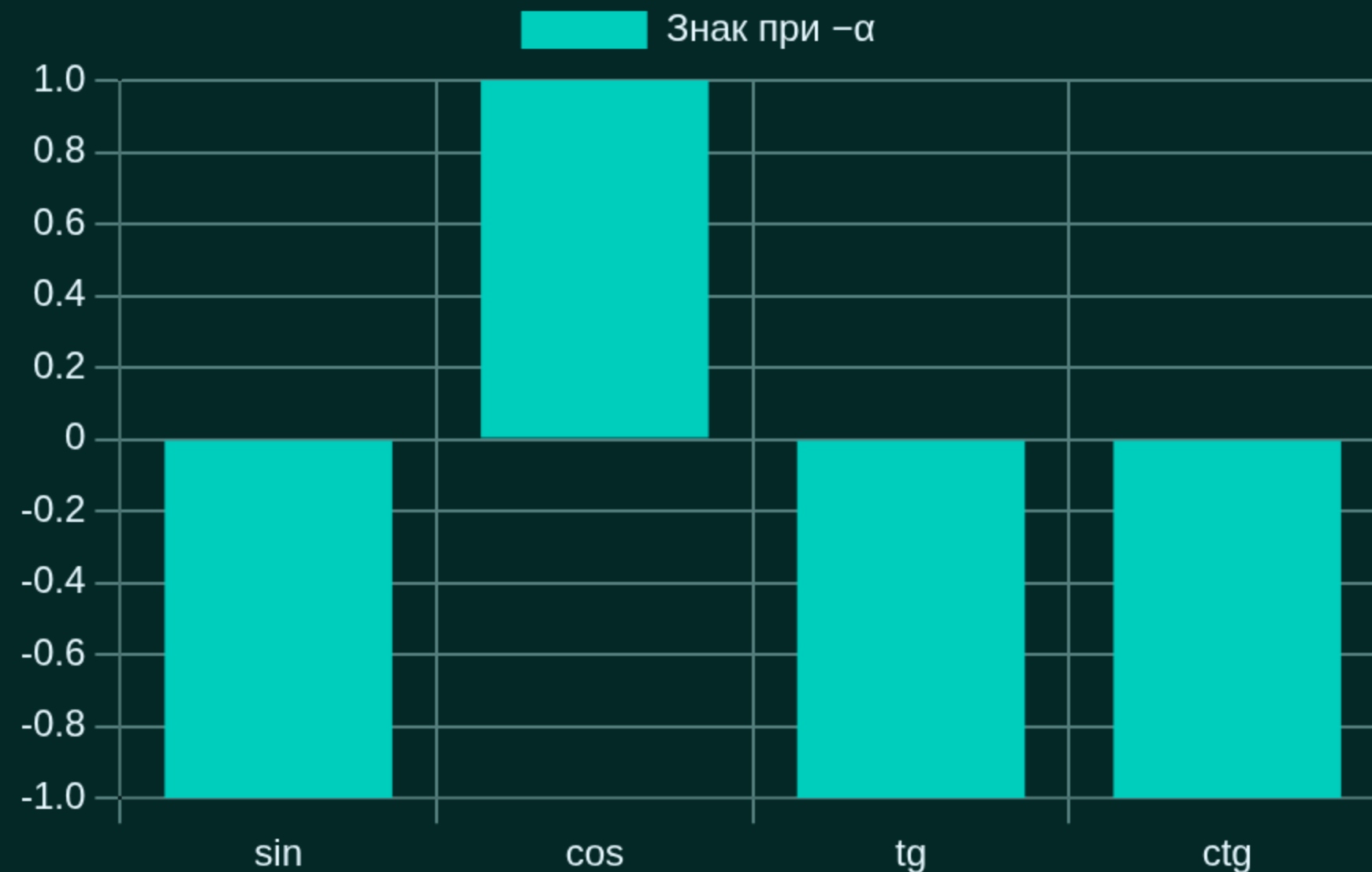
03 Решение уравнений

Если уравнение содержит синус, косинус или тангенс от отрицательного угла, свойства функций позволяют перейти к аргументу α . Так легче свести задачу к известным формулам и стандартным значениям.

04 Проверка ответа

После вычислений полезно оценить результат через геометрический смысл: знак синуса и тангенса должен соответствовать положению точки, а косинус — сохранять значение при отражении относительно оси Ox .

Итоговая схема изменения значений при замене α на $-\alpha$



Итог по свойствам тригонометрических функций от отрицательного аргумента.

- Сравнение показывает единственное исключение: косинус сохраняет значение, тогда как остальные основные функции меняют знак.
- Все правила выводятся из отражения точки относительно оси Ox на единичной окружности.

Главный вывод по теме

Углы α и $-\alpha$ связаны зеркальной симметрией на единичной окружности, поэтому $\sin$ и tg меняют знак, $\cos$ сохраняется, а ctg также становится противоположным.