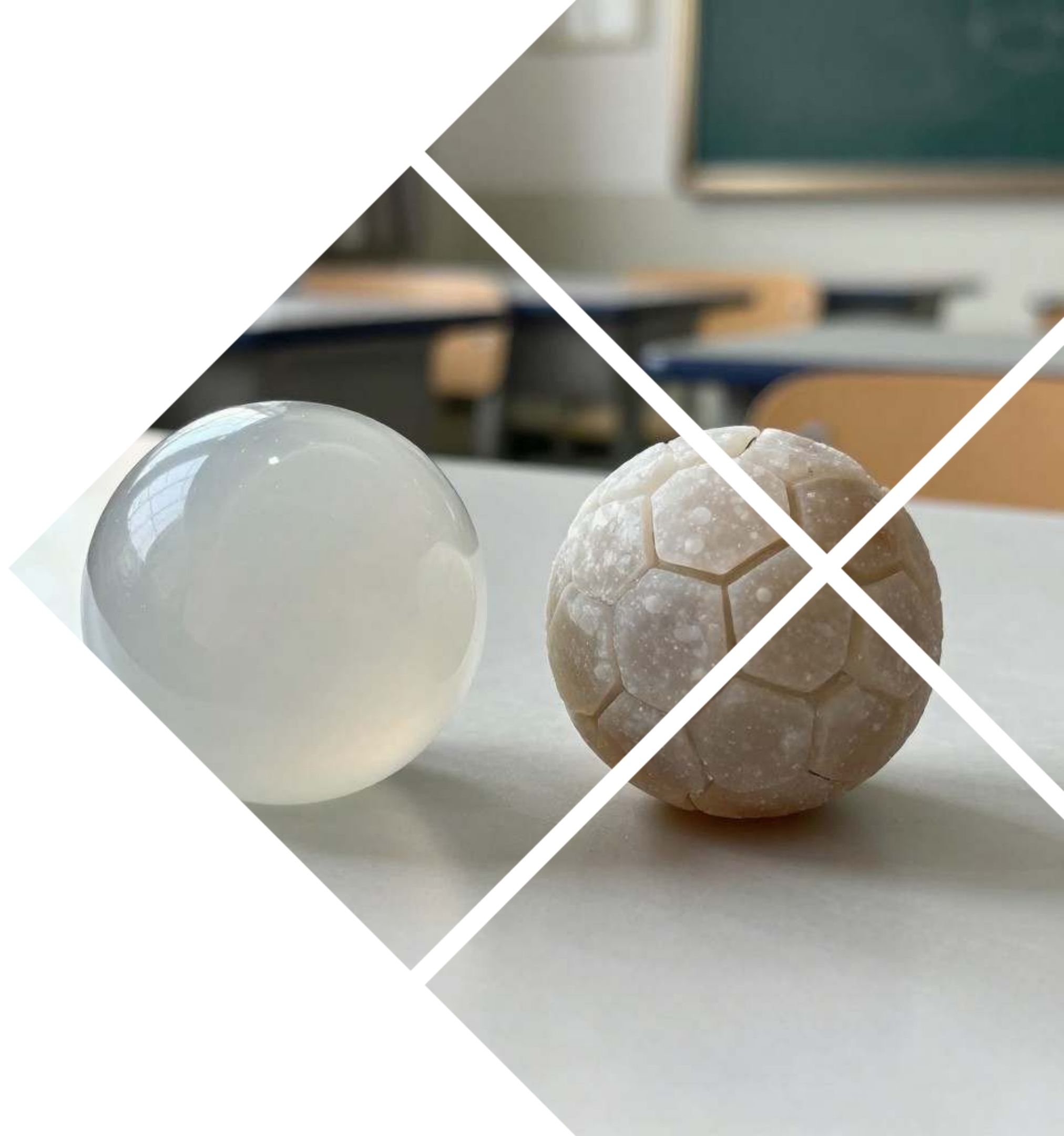


Сфера и шар

Разберём, где заканчивается сфера
и начинается шар.

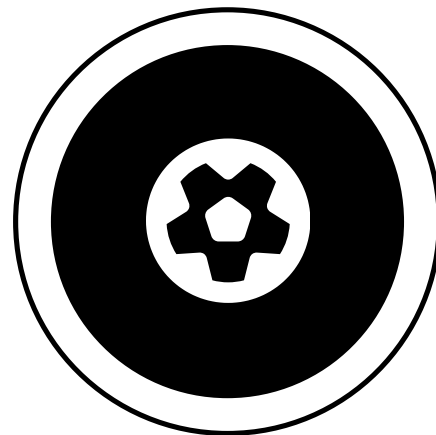


Почему сфера и шар важно не путать

Сфера — это поверхность, а шар — всё тело внутри неё.
От этого зависит, как читать рисунок и выбирать формулу.

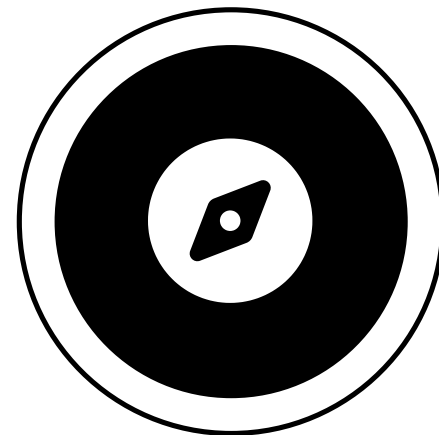


О чём этот урок



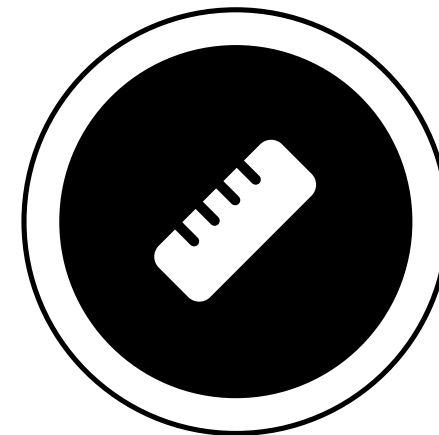
Примеры вокруг нас

Сфера и шар встречаются в привычных предметах: мяче, глобусе, капле воды и модели планеты. На этих примерах удобно видеть, где находится граница, а где — внутренность.



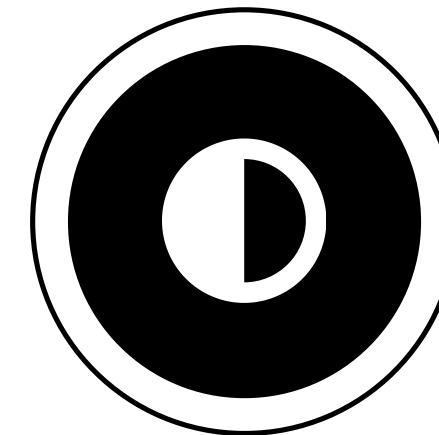
Что нужно уметь

У урока есть практическая цель: научиться отличать поверхность от тела, правильно понимать разрезы и уверенно работать с изображениями в задачах.



Главные размеры

В формулах постоянно встречаются радиус и диаметр. Если перепутать их, ответ получится неверным, даже если вычисления выполнены без ошибок.



Где появляется π

Число π появляется там, где речь идёт о круге и сфере. Его нужно не просто подставить, а понимать, откуда оно берётся.

Сфера и шар: базовые определения

01

Что такое сфера

Сфера задаётся как множество точек, которые находятся на одном и том же расстоянии от центра. Это только поверхность, без внутренней части.

02

Что такое шар

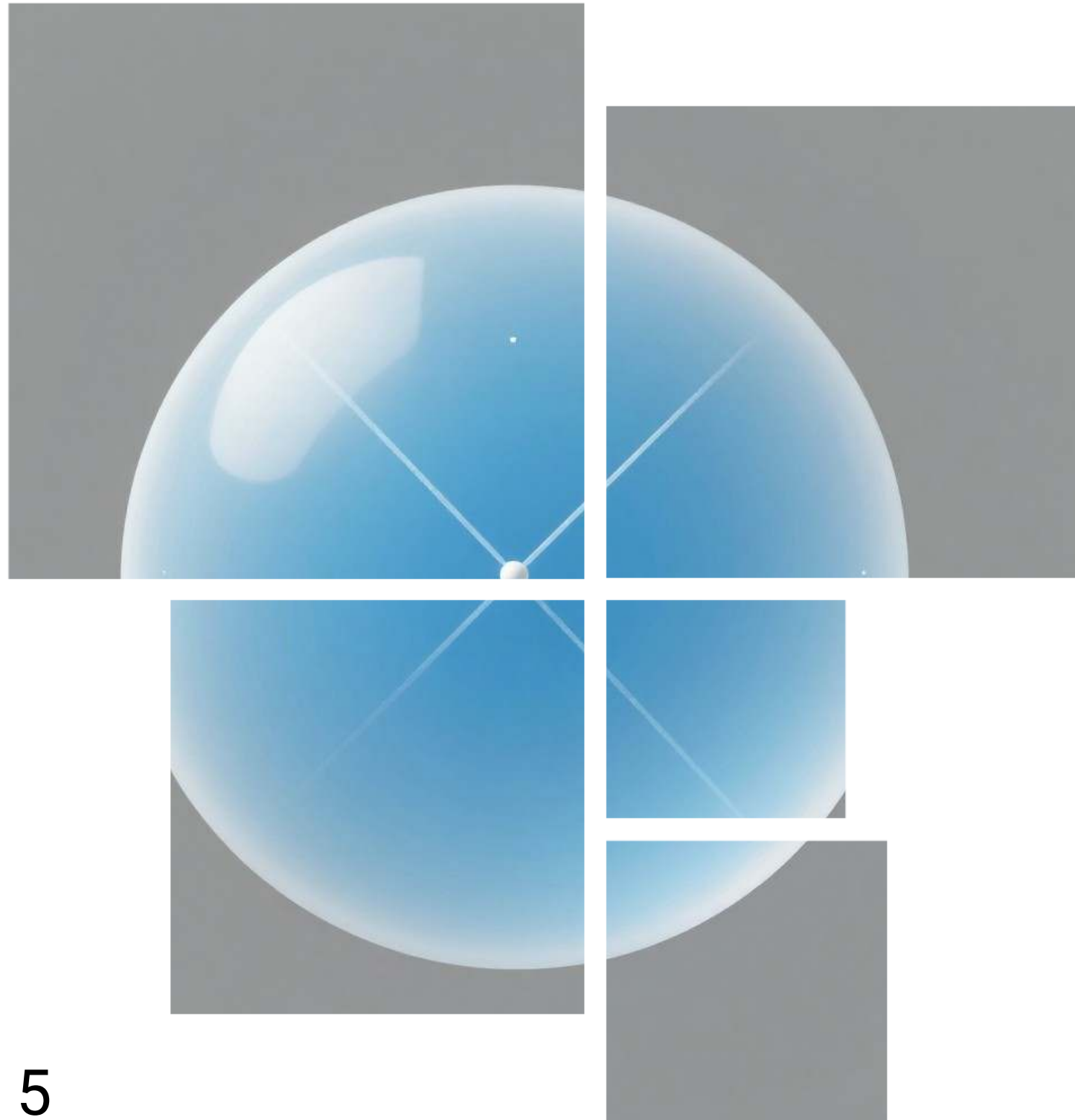
Шар включает все точки внутри сферы, а также саму сферу как границу. Поэтому шар — это уже объёмная фигура, а не только контур.

03

Главные элементы

Размер фигуры определяют центр, радиус и диаметр. По этим элементам можно описать и поверхность, и внутреннее пространство, не смешивая одно с другим.

Центр, радиус, диаметр



■ Центр фигуры

Центр — это точка, от которой отсчитывают все расстояния в сфере и шаре. Он расположен строго посередине и помогает понять форму фигуры.

■ Радиус

Радиус соединяет центр с любой точкой на сфере. Все такие отрезки одинаковой длины, поэтому радиус удобно использовать как главный размер.

■ Диаметр

Диаметр проходит через центр и соединяет две точки сферы. Его длина вдвое больше радиуса, поэтому между ними всегда есть простая связь.

■ Точка на границе

Точка на сфере лежит точно на границе: она не относится ни к внутренней части, ни к внешнему пространству. Это помогает не путать элементы рисунка.

Большой круг сферы

01

Как получается

Большой круг получают, когда плоскость проходит через центр шара. В этом случае разрез максимально возможный и имеет тот же радиус, что и шар.

02

Формула длины

Его длина выражается формулой $2\pi R$. Здесь R — радиус шара, а π показывает связь с окружностью, которая лежит в основе построения.

03

Почему это важно

Большой круг удобен тем, что соединяет два объекта сразу: круг на плоскости и сферу в пространстве. Через него легко увидеть роль π .

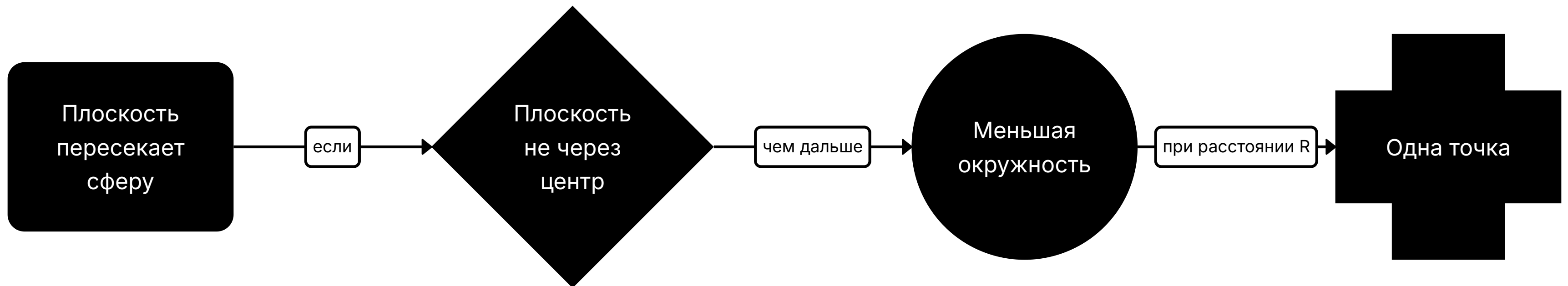


Граница и тело

- **Только граница**
В геометрии сфера — это только наружная поверхность. Она ограничивает фигуру, но не включает всё, что находится внутри.
- **Граница и внутренность**
Шар — это поверхность вместе с внутренним объёмом. Поэтому в задачах нужно внимательно смотреть, идёт ли речь о площади или об объёме.
- **Обычное и математическое значение**
В обычной речи слово «шар» может обозначать и предмет, и форму целиком: мяч, шарик, модель планеты. В математике такое смешение недопустимо.

Сечения сферы плоскостью

Положение плоскости относительно центра определяет вид сечения.



Как меняется сечение

01

Ближе к центру

Если плоскость проходит ближе к центру, радиус сечения получается больше. Поэтому самый крупный разрез у тех плоскостей, которые расположены почти посередине.

02

На предельном расстоянии

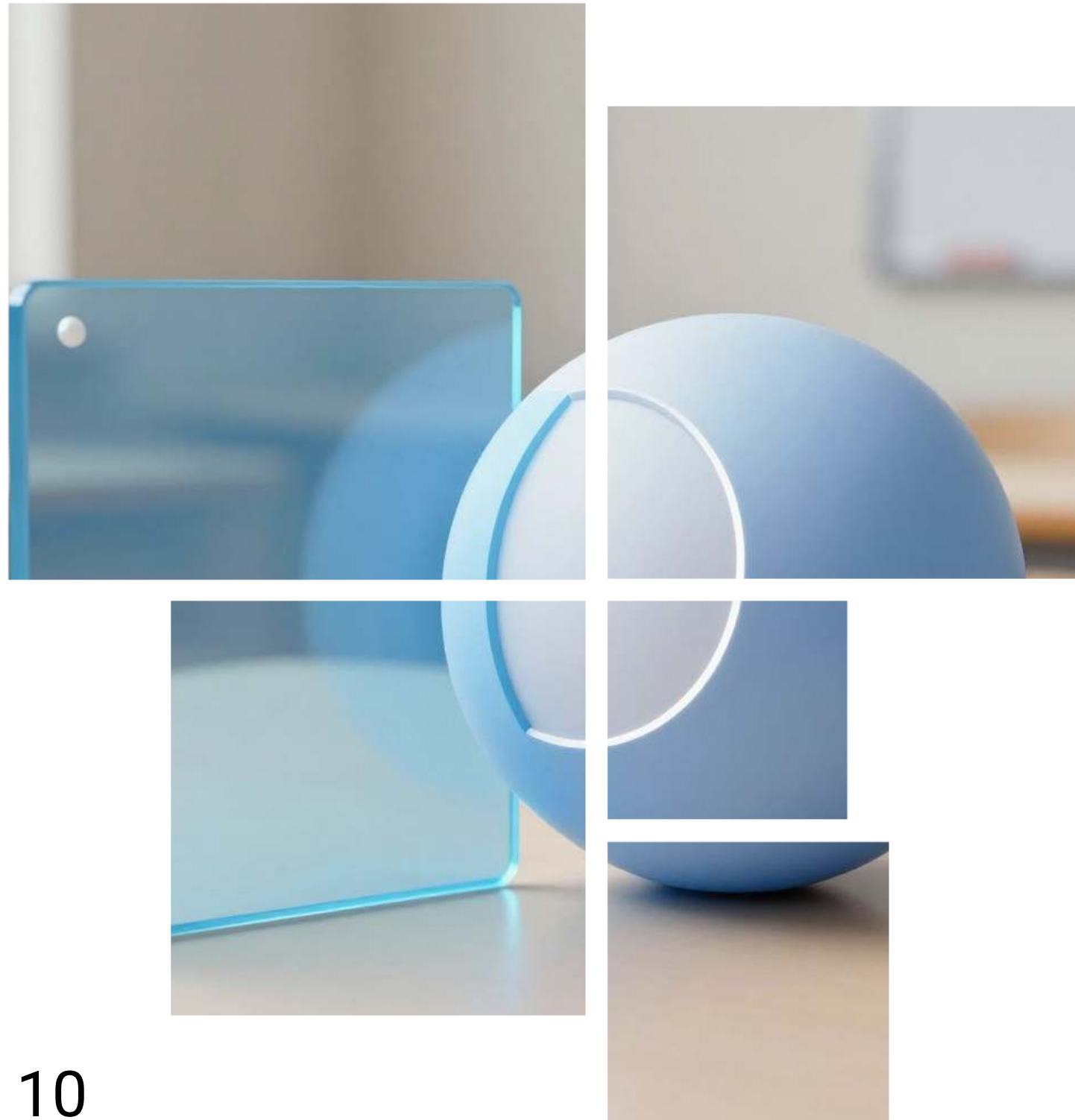
Когда расстояние до центра равно радиусу шара, сечение исчезает и остаётся одна точка. Это уже не окружность, а касание поверхности.

03

Частный случай

Большой круг — это особый случай сечения, когда плоскость проходит через центр. Тогда радиус разреза равен радиусу шара.

Касание и пересечение



■ Одно касание

Если плоскость лишь касается поверхности, общая точка только одна. Такой случай легко заметить: разрез не образует ни окружности, ни дуги.

■ Окружность сечения

Когда плоскость проходит сквозь шар, на рисунке появляется окружность. Это самый частый тип сечения в задачах и чертежах.

■ Что видно на чертеже

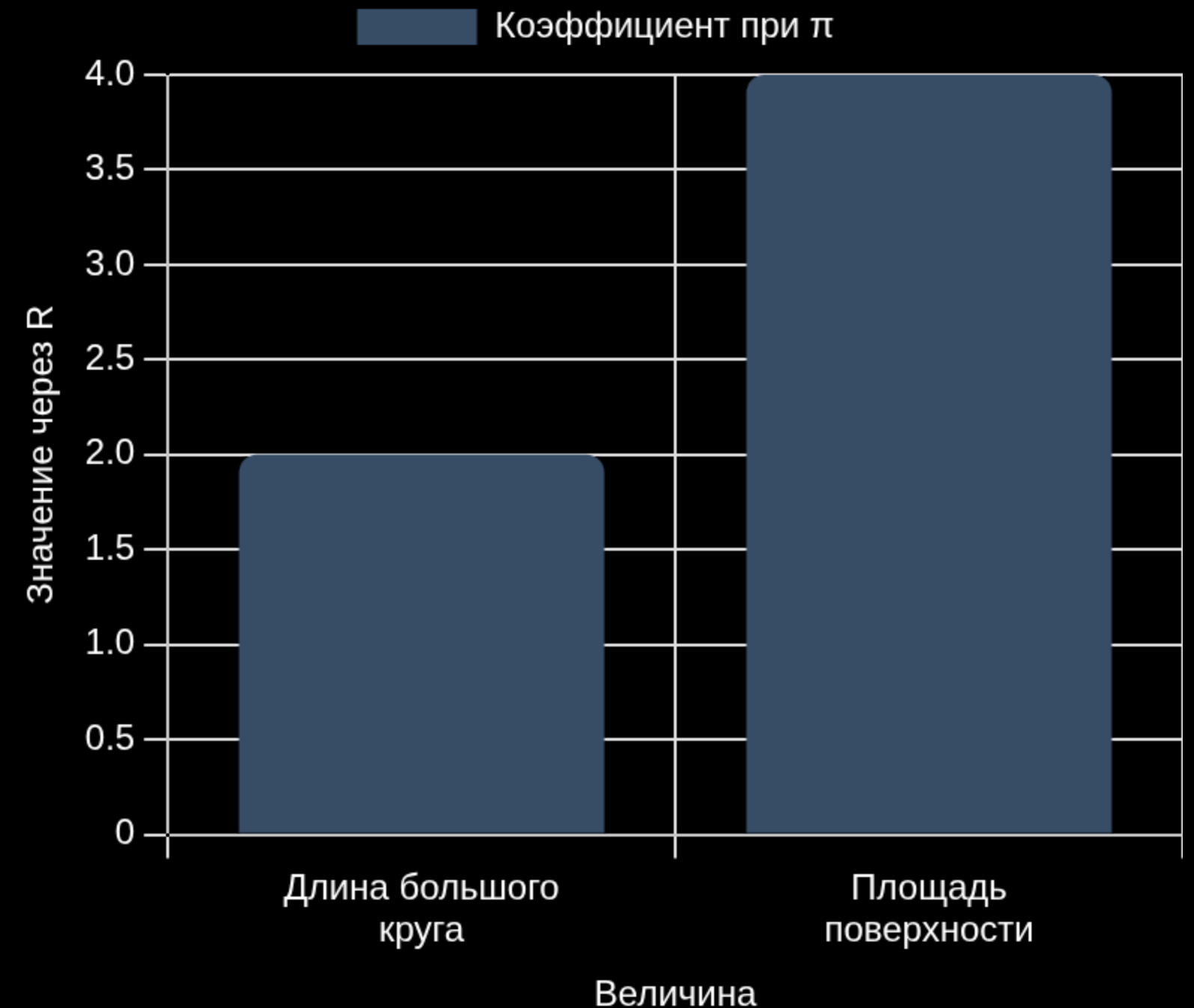
Важно не путать разрез сферы с другими линиями на чертеже. У сферы сечение плоскостью всегда даёт окружность или одну точку.

Две главные формулы для сферы

На рисунке видно, как число π связано с кругом и сферой: одна и та же величина входит и в длину, и в площадь.

Площадь поверхности сферы в два раза больше коэффициента у длины круга и зависит от квадрата радиуса.

Формулы геометрии сферы: $C = 2\pi R$, $S = 4\pi R^2$.



Объём шара



- **Что измеряет формула**

Объём шара показывает, сколько пространства занимает тело внутри поверхности. Это уже не линия и не площадь, а трёхмерная величина, поэтому единицы измерения будут кубическими.

- **Почему степень 3**

В формуле $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ радиус возводится в третью степень. Так отражается зависимость объёма от всех трёх измерений: длины, ширины и высоты.

- **Роль π и роста**

Число π остаётся и здесь, потому что шар связан с кругом. Если радиус увеличить, объём растёт очень быстро, и это легко заметить на примерах.

Масштаб и единицы

Сравним, как меняются единицы измерения и результат при увеличении радиуса.

Длина, площадь и объём меняются по-разному: чем больше размерность, тем сильнее рост при увеличении радиуса.

Величина	Единицы	При $R \times 2$
Длина	см	$\times 2$
Площадь	см ²	$\times 4$
Объём	см ³	$\times 8$

Правила измерения длины, площади и объёма в геометрии.

Пример: площадь поверхности

01

Дано

Записываем известное: радиус шара равен 5 см. Для площади поверхности подходит формула $S = 4\pi R^2$, потому что нужна именно внешняя граница тела.

02

Подстановка

Подставляем значение: $S = 4\pi \cdot 5^2 = 4\pi \cdot 25$. Получаем точный ответ $100\pi \text{ см}^2$, не теряя π в вычислениях.

03

Приближённый ответ

Если нужно, оцениваем число: $100\pi \approx 314 \text{ см}^2$. Такая запись удобна, когда требуется приблизительный ответ для проверки или сравнения.

04

Проверка

Проверяем смысл: площадь поверхности должна быть больше площади одного круга с радиусом 5 см. Это подтверждает, что ответ выглядит разумно.



Площадь по диаметру

01

Находим радиус

Сначала переводим диаметр в радиус: $d = 12$ см, значит $R = 6$ см. Без этого шага формулу площади поверхности применить нельзя.

02

Считаем площадь

Подставляем в формулу $S = 4\pi R^2$. Получаем $S = 4\pi \cdot 6^2 = 4\pi \cdot 36$, то есть 144π см².

03

Полезная привычка

Важно помнить: в задачах на сферу чаще всего нужен именно радиус. Если дан диаметр, его всегда делят пополам перед вычислением.

Пример: объём шара

01

Исходные данные

Дано: радиус шара равен 3 см. Для объёма используем формулу $V = \frac{4}{3} \pi R^3$, потому что считаем всё внутреннее пространство.

02

Подсчёт

Вычисляем куб радиуса: $3^3 = 27$. Затем получаем $V = \frac{4}{3} \pi \cdot 27 = 36\pi \text{ см}^3$, не забывая про единицы объёма.

03

Оценка ответа

Для прикидки можно взять $\pi \approx 3,14$. Тогда объём получается чуть больше 110 см^3 , что помогает проверить, не ошиблись ли в вычислениях.

04

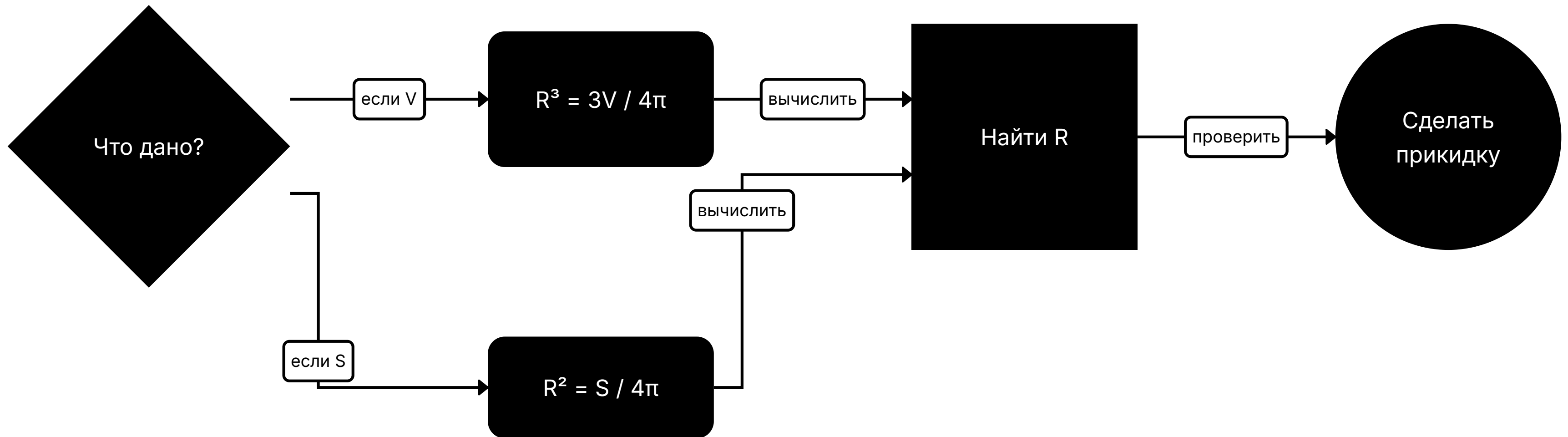
Смысл роста

Чем больше радиус, тем быстрее растёт объём. Поэтому даже небольшое увеличение шара заметно меняет результат в кубических сантиметрах.



Как найти радиус по известным данным

Переход от площади или объёма к радиусу и последующая проверка результата.



Типичные ошибки

► Таблица напоминает, на что чаще всего нужно обращать внимание при решении задач по теме.

► Большинство ошибок связано не со сложностью формул, а с невнимательностью к обозначениям и единицам измерения.

Ошибка	Как исправить
Сфера и шар	Разделять
Диаметр вместо R	Делить пополам
Единицы площади	Писать см ²
Потерянное π	Не сокращать

Анализ типичных ошибок в задачах по теме «сфера и шар».

Мини-викторина

■ Сфера содержит внутренность?

Нет. Сфера — это только поверхность, а внутренняя часть относится к шару. Важно различать границу и всё тело целиком.

■ Площадь в см^3 ?

Нет. Площадь измеряется в квадратных единицах: см^2 , м^2 и так далее. Кубические единицы подходят только для объёма.

■ Большой круг и центр

Да. Большой круг получается, когда плоскость проходит через центр шара, поэтому его называют особым сечением сферы.

■ Как меняется объём?

Да. При увеличении радиуса в 2 раза объём растёт в $2^3 = 8$ раз, потому что в формуле есть куб радиуса.

Сфера и шар без ошибок

Сегодня главное — не путать поверхность и тело. Если помнить три формулы, правильно выбирать радиус и проверять единицы, задачи по сфере и шару становятся понятными и решаемыми.