

Связанный вектор в пространстве: главная идея темы

Связанный вектор задаёт движение между точками: начало, конец, направление и длину.



Зачем в 8 классе изучают вектор в пространстве

Вектор переводит геометрию в числа и экономит время: меньше построений — больше вычислений. В 8 классе это связывают с координатной прямой, плоскостью и переходом к трём осям x , y , z .



Определение связанного вектора

Связанный вектор — это направленный отрезок, у которого начало и конец заданы однозначно. Он обозначается двумя буквами: первой — точка старта, второй — точка финиша, например $\rightarrow AB$.

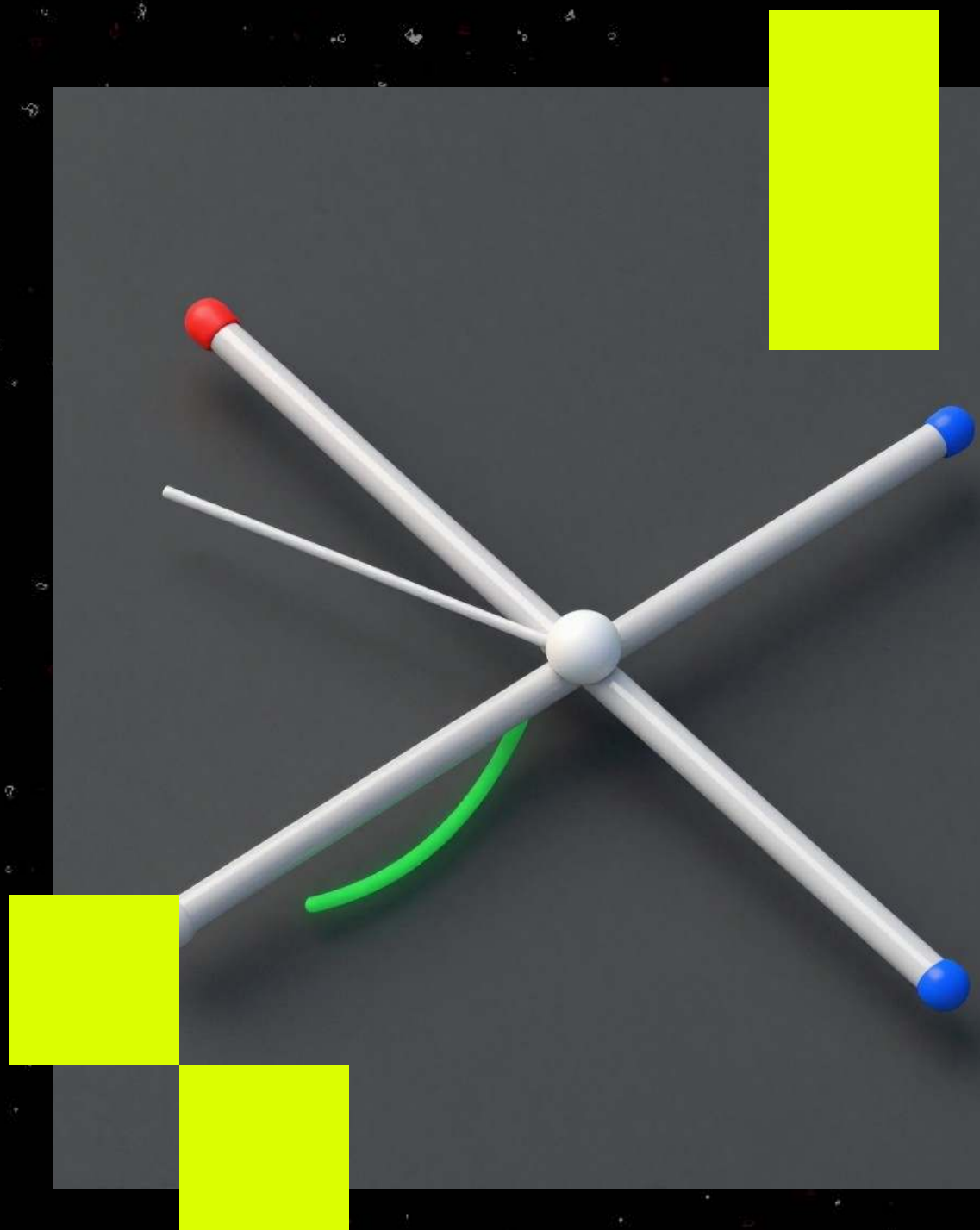
Длина вектора — это расстояние между точками A и B. Чем больше это расстояние на чертеже, тем длиннее вектор, а значит сильнее «перемещение» между исходной и конечной точками.

Направление вектора показывает, в какую сторону нужно двигаться: от начала к концу. Поэтому один и тот же вектор нельзя «перенести» произвольно — фиксированны его точки на рисунке.

Как изображают вектор в пространстве

Оси и стрелка в 3D

В пространстве используют три оси координат: x , y и z . Вектор рисуют стрелкой, которая начинается в точке A и заканчивается в точке B . Так сразу читаются и направление, и «смысл» перемещения.



Что видно у вектора

У вектора $\rightarrow AB$ выделяют начало A и конец B . Дополнительно отмечают длину $|AB|$ и записывают сам вектор в виде $\rightarrow AB$, $\rightarrow a$ или a . За счёт третьей оси появляется «глубина» движения.

Основные характеристики связанного вектора

Понимание вектора начинается с его признаков: по рисунку и по числам можно решать типовые задачи.

Вектор описывается не только картинкой: координаты и длина дают точные вычисляемые параметры.

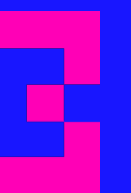
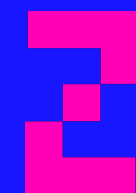
Характеристика	Что означает	Пример записи	Как использовать
Начало	Первая точка	$\rightarrow AB$	Откуда стартует перемещение
Конец	Вторая точка	B	Куда приходит вектор
Длина	Расстояние $A-B$	$ AB $	Находим длину/расстояние
Направление	Сторона стрелки	$\rightarrow AB$	Сравниваем ориентацию
Координаты	Числа в 3D	(x,y,z)	Делаем вычисления

Равные и противоположно направленные векторы

Равные векторы имеют одинаковую длину и одинаковое направление. Их можно встретить в разных местах чертежа, но по смыслу они задают одно и то же перемещение.

Противоположно направленные векторы одинаковой длины «смотрят» в разные стороны. В задачах это важно, потому что при сложении или вычитании перемещения частично компенсируются.

Нулевой вектор имеет длину 0. Направление для него не задают, потому что он не переносит точку ни в какую сторону — начало и конец совпадают.

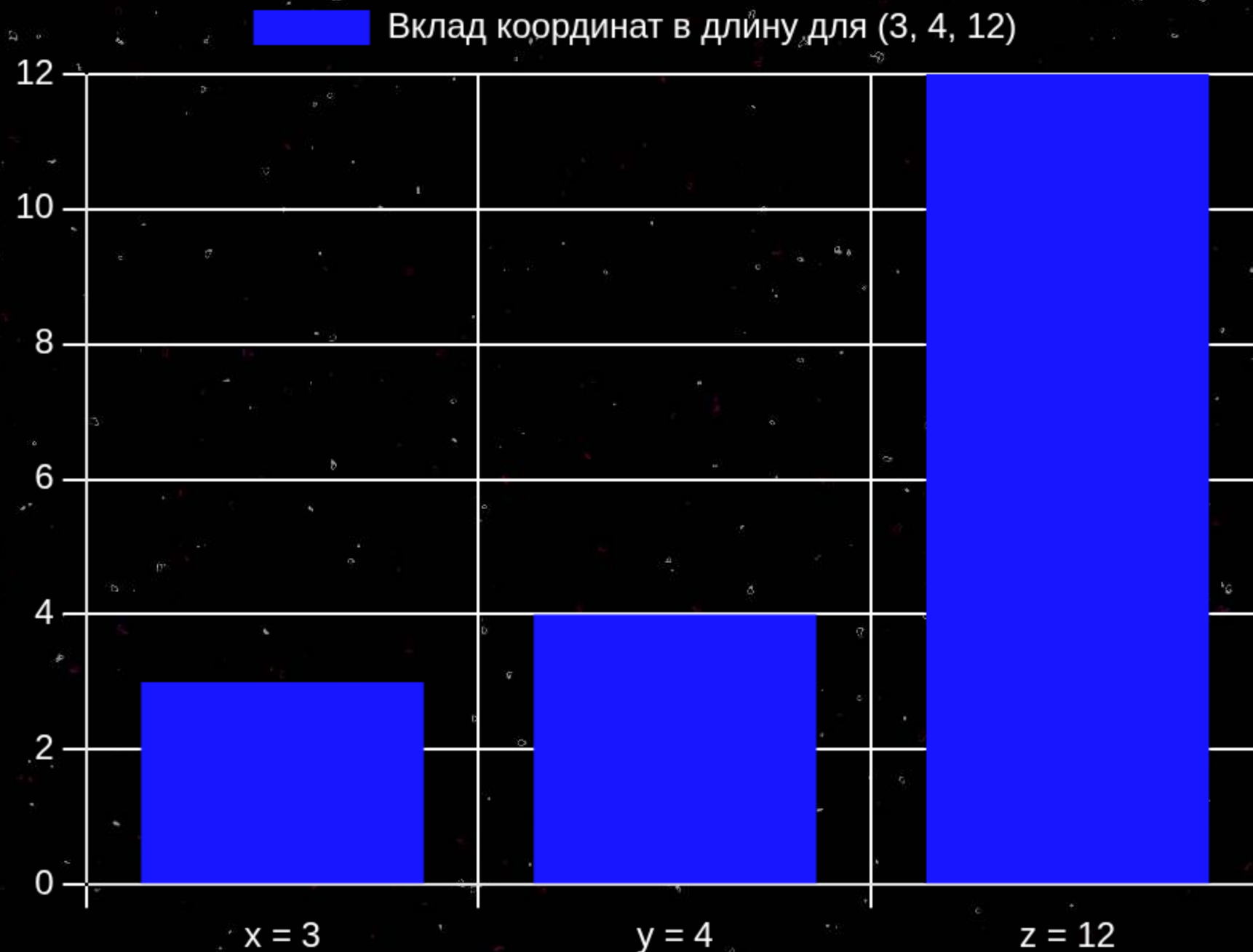


От двух точек — к координатам вектора

Алгоритм: координаты зависят от разности координат конца и начала



Координаты вектора и их вклад в длину



Чем больше модуль координаты, тем сильнее она влияет на значение под корнем при вычислении длины.

В этом примере самая большая координата по оси z , поэтому именно она даёт главный вклад в длину. Полная формула учитывает все три координаты одновременно.

Пример из вычислений по формуле длины вектора (3, 4, 12)

Это число показывает
результат вычисления
длины по формуле $|a| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ для примера
(3, 4, 12).

13

Для вектора длина получается
равной 13 при подстановке
координат в корень.

Рассчитано по формуле из темы «длина вектора
в пространстве»

Сложение векторов

Если сложить два вектора, получается общий вектор. Он соответствует последовательному перемещению: сначала делаем движение по первому вектору, затем — по второму.

В координатах сложение выполняется по компонентам: $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$. Это быстро и удобно для задач с числами.

Такой подход помогает решать не только «сумму отрезков», но и задачи на движение в пространстве. Правило позволяет находить результирующее перемещение без длинных построений.

1

2

3

Действия над векторами в координатах

Действие	Формула	Пример	Результат
Сложение	$(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$	$(1, 2, 3)+(4, -1, 2)$	$(5, 1, 5)$
Вычитание	$(x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2)$	$(5, 3, 1)-(2, 1, 4)$	$(3, 2, -3)$
Умножение	$k(x, y, z)$	$2(1, -3, 4)$	$(2, -6, 8)$
Длина	$ a =\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	$ (3, 4, 12) $	13

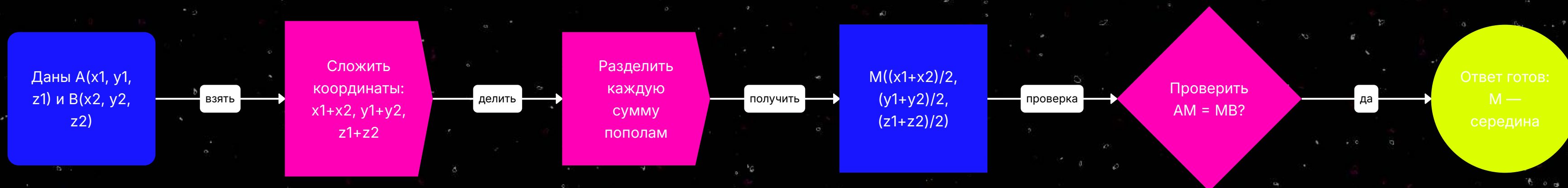
Таблица показывает, как выполнять операции над векторами в 3D, используя только их координаты. Это упрощает решение задач: вместо рисунка и догадок вы работаете по формулам, получая аккуратный результат.

Координаты позволяют выполнять действия с векторами так же чётко, как с обычными числами: складываются, вычитаются и масштабируются одноимённые компоненты, а длина вычисляется по корню из суммы квадратов.

Учебные формулы для векторов в пространстве (координатный подход).

Как найти середину отрезка по координатам

Шаги вычисления точки середины M при известных координатах концов A и B .



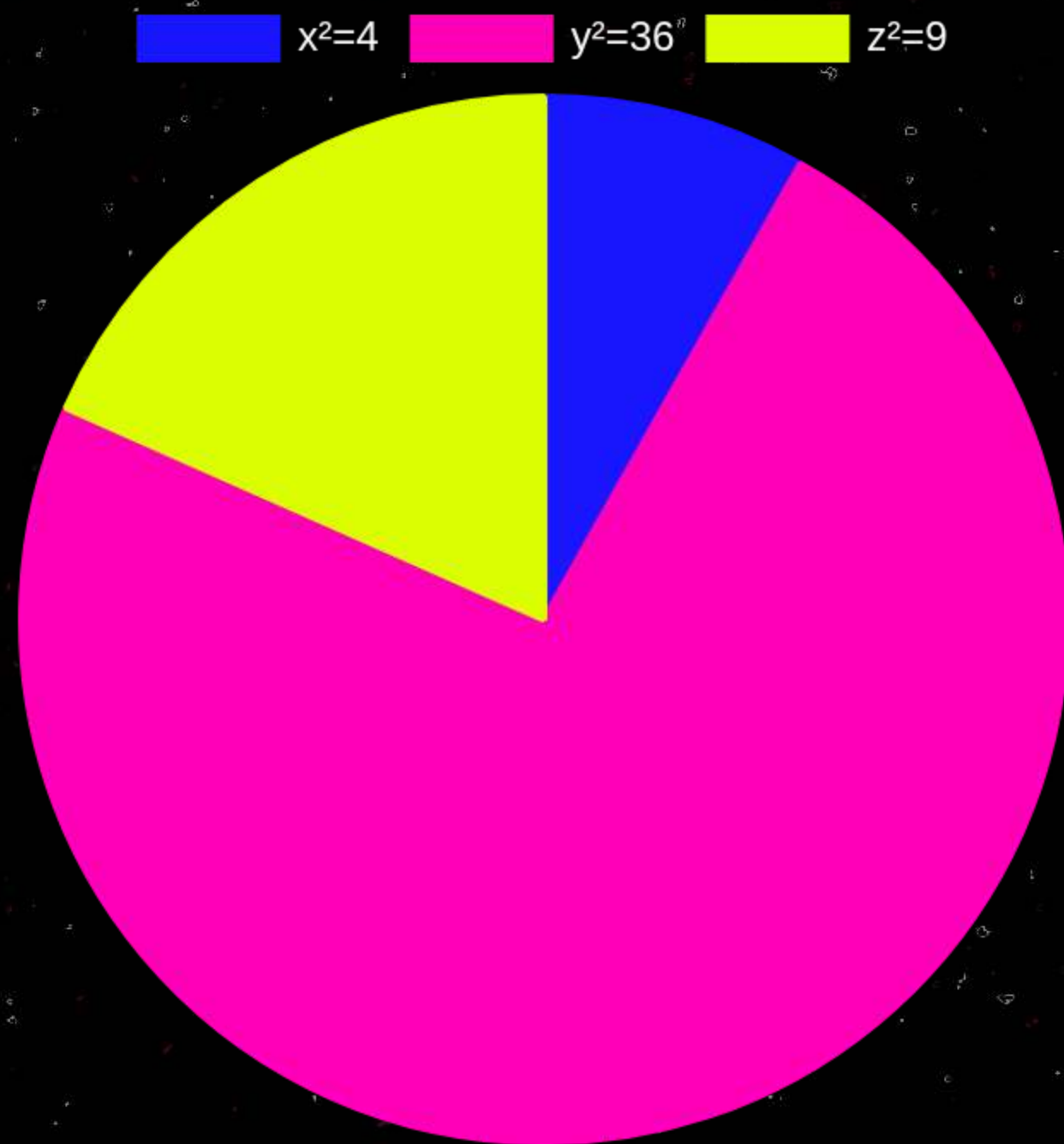
Проекции вектора на оси координат



В пространстве вектор можно «разобрать» на три взаимно перпендикулярные проекции на оси x , y и z . Каждая проекция показывает, какую часть перемещения даёт движение в одном направлении.

Координаты вектора в выбранной системе как раз и совпадают с величинами этих проекций. Поэтому вместо одного рисунка вы получаете три числа, которые затем удобно использовать в формулах.

Сравнение вкладов координат в квадрат длины

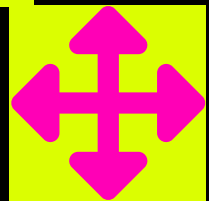


Квадраты координат складываются, когда вы переходите к длине: при (2, 6, 3) сумма $4+36+9 = 49$. Диаграмма показывает, что y сильнее всего влияет на результат.

Большая доля у компоненты y означает, что именно «подъём» по оси y больше изменяет длину вектора. При других координатах доминировать может другая ось.

Расчёт по координатам вектора (2, 6, 3); значения долей:
 $x^2=4$, $y^2=36$, $z^2=9$.

Коллинеарность и компланарность векторов



Коллинеарные векторы

Коллинеарные векторы лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Они бывают одинаково направленными или противоположно направленными, что важно для сложения и вычитания.



Компланарные векторы

Компланарные векторы лежат в одной плоскости. В задачах это помогает понять, можно ли расположить несколько перемещений на одном рисунке без «выхода» из плоскости.



Как это упрощает решение

Признаки коллинеарности и компланарности помогают быстрее находить параллельные стороны и диагонали, а также проверять, следует ли ожидать прямого ответа через свойства геометрических фигур.

Признаки коллинеарности в координатах

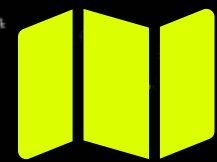
В таблице собраны удобные способы проверки коллинеарности векторов по их координатам. Обычно достаточно проверить условие пропорциональности компонент или учесть частные случаи.

Пропорциональность координат является самым удобным способом проверки коллинеарности: сравнивайте отношение одноимённых компонент и учитывайте случаи с нулевым вектором.

Признак	Условие	Пример	Вывод
Пропорциональность	$(x_2, y_2, z_2) = k(x_1, y_1, z_1)$	(2,4,6) и (1,2,3)	Коллинеарны
Нулевой вектор	Один из векторов нулевой	(0,0,0) и любой a	Коллинеарен любому
Знак одинаково	Компоненты меняют знак вместе	(3,-6,9) и (1,-2,3)	Коллинеарны

Учебные свойства коллинеарности векторов в координатах.

Где применяются связанные векторы



Навигация и маршруты

Связанные векторы удобно использовать для описания перемещения по карте: начало задаёт стартовую точку, конец — точку прибытия. Так проще сравнивать направления и «складывать» шаги.



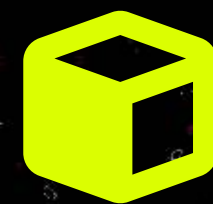
Силы и скорость

В физике связанные векторы применяются, когда требуется описывать силу или скорость: важно и направление, и «длина» величины. Координаты позволяют считать результаты по формулам.



Движение транспорта

В задачах про движение в физике и геометрии связанные векторы помогают задавать направление скорости и перемещения, а также рассматривать последовательные манёвры как сумму векторов.

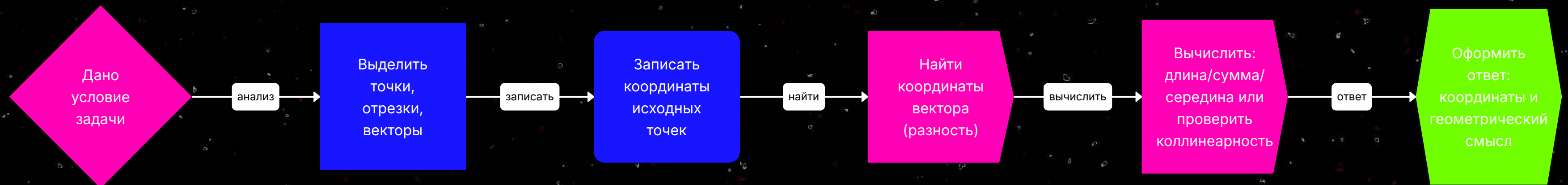


Геометрия фигур в пространстве

В задачах с параллелепипедом и рёбрами связанные векторы задают диагонали и проверяют соотношения направлений. Это помогает находить расстояния и середины отрезков без лишних построений.

Алгоритм решения задач на вектор в пространстве

Последовательность действий: от условия к координатам и финальному ответу.



Типичные ошибки при работе с векторами

Частая ошибка — перепутать начало и конец: тогда вектор меняет направление. Следствие — знаки координат получаются «перевёрнутыми», а ответ выходит противоположным правильному направлению.

Неправильно записанные знаки в координатах и ошибки в формулах длины тоже встречаются часто. Например, длину нельзя находить просто по координатам без возведения в квадрат и суммирования.

Иногда смешивают равные и противоположно направленные векторы. На рисунке они могут быть похожи по длине, но при сложении и вычитании дают разные результаты, поэтому важно различать направление стрелок.

При проверке коллинеарности смотрят не на все компоненты: достаточно упустить одну координату, и вывод окажется ошибочным. Надёжнее сверять пропорциональность сразу по x , y и z одновременно.

Связанный вектор — это мост между рисунком и числами

Связанный вектор в пространстве задаёт направление и длину отрезка между двумя точками. По его координатам находят длину, середину, сумму и разность векторов, а также проверяют коллинеарность; ключевые формулы используют разности координат, корень из суммы квадратов и полусумму координат.