



Тригонометрические функции числового аргумента

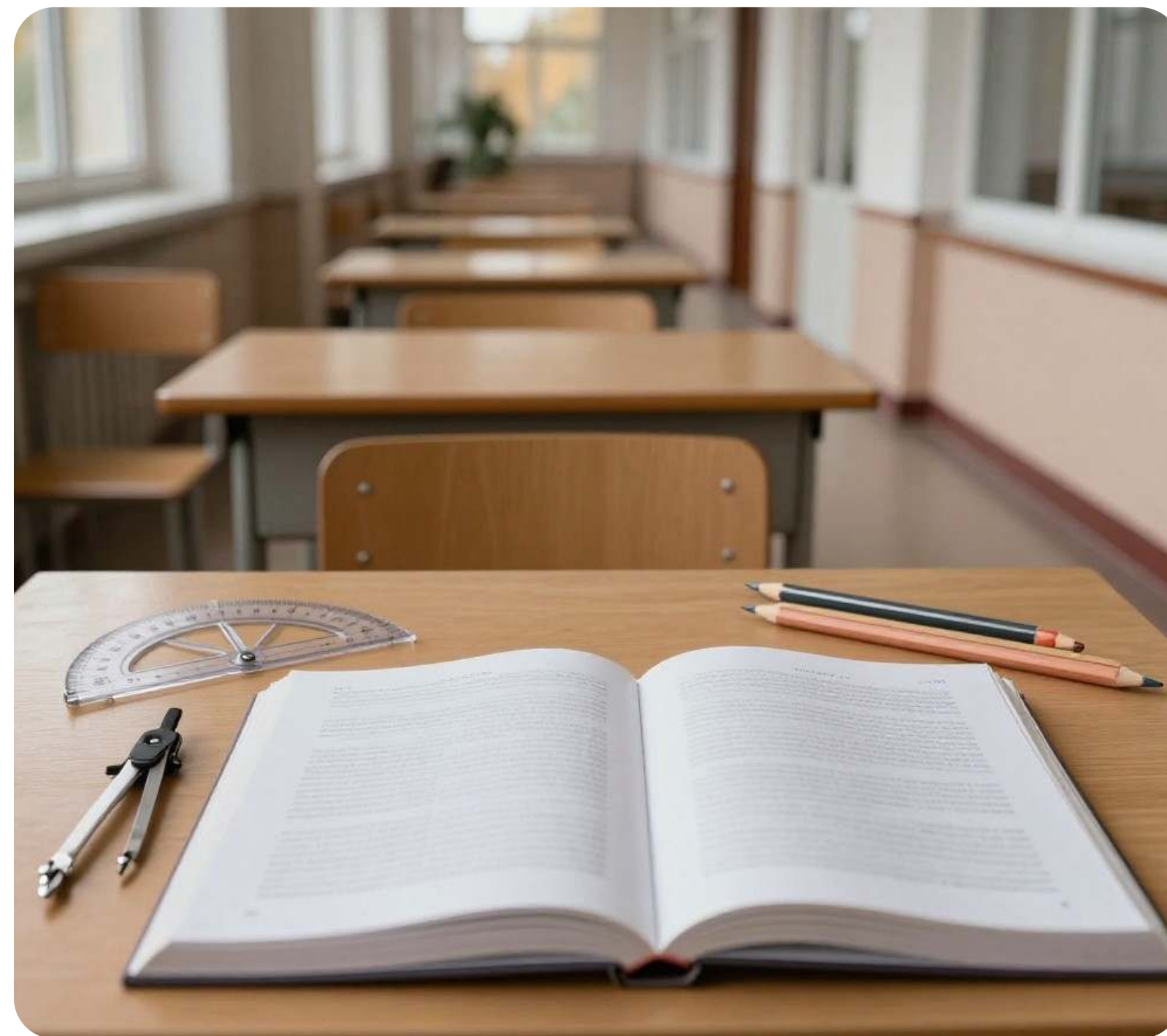
На уроке разберём $\sin$, $\cos$, $\tg$ и $\ctg$ через единичную окружность и радианы.



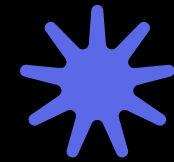
Почему тригонометрия начинается в 10 классе



Тригонометрия связывает геометрию с алгеброй: учит работать с углом как с числом и видеть симметрию на плоскости. Отсюда естественный переход к более глубокому изучению функций, их области определения и периодичности.

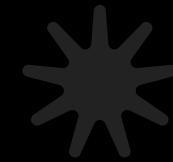


Единичная окружность как основа определения



Рассмотрим единичную окружность: радиус равен 1, а центр находится в начале координат. Для угла x точка пересечения конечной стороны угла с окружностью фиксирует пару чисел.

01



Координаты этой точки записываются как $(\cos x, \sin x)$. Значит, косинус — это абсцисса, а синус — ордината точки на окружности.

02



Такое определение делает значения функций наглядными: двигаясь по окружности, мы прослеживаем, как меняются $\sin x$ и $\cos x$ для любого действительного x .

03

Основные свойства тригонометрических функций

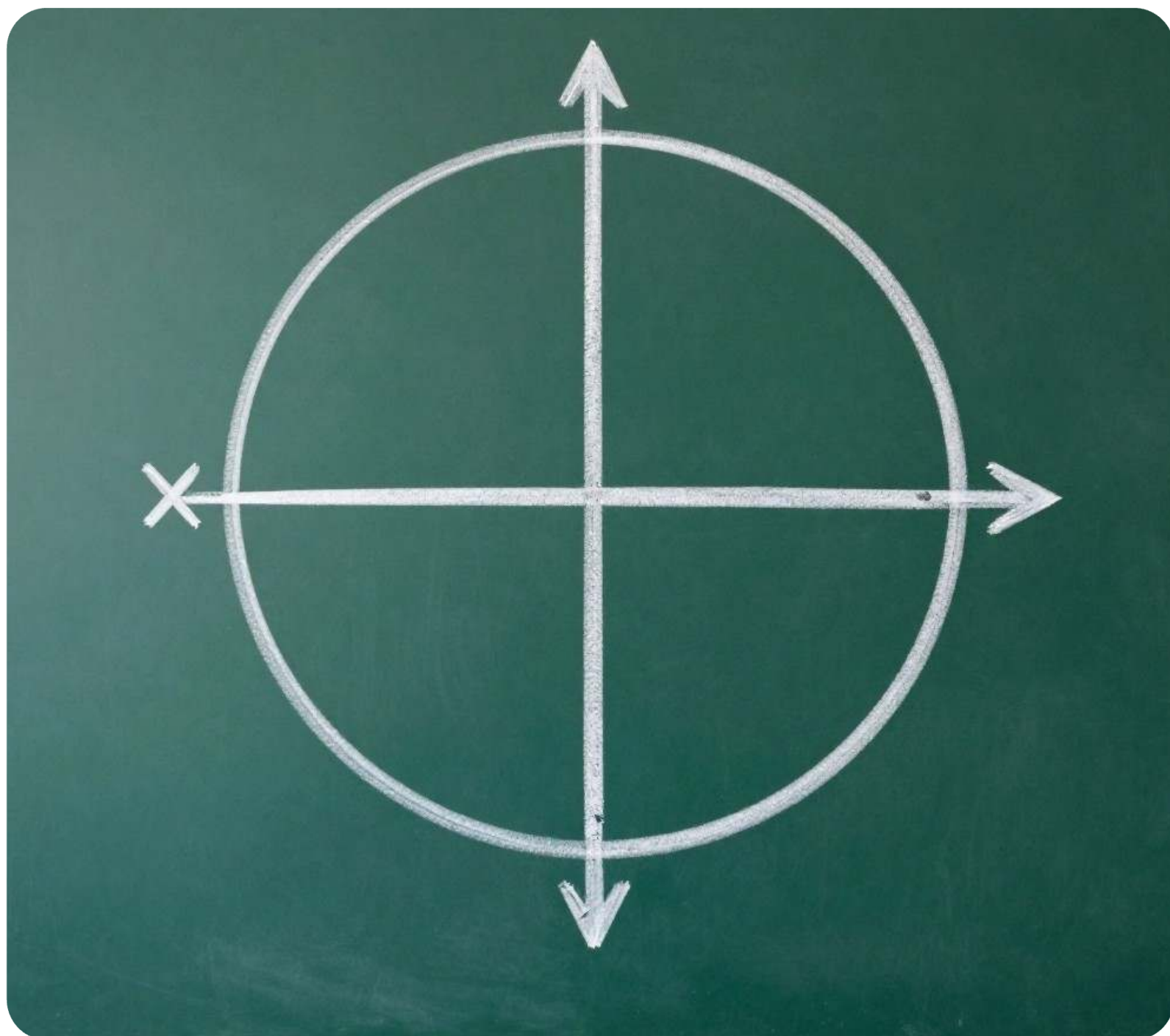
Функция	Область определения	Множество значений	Период	Ограниченность
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$[-1;1]$	2π	ограничена
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$[-1;1]$	2π	ограничена
$\operatorname{tg} x$	$\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + \pi k\}$	$\mathbb{R}$	π	не ограничена
$\operatorname{ctg} x$	$\mathbb{R} \setminus \{\pi k\}$	$\mathbb{R}$	π	не ограничена

Школьный курс алгебры и начал анализа (10 класс)

Ключевые сведения о $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$: область определения, значения, период и ограниченность.

Первые две функции удобны для описания «плавных» зависимостей, а тангенс и котангенс — для ситуаций с резкими изменениями из-за разрывов.

Синус и косинус на единичной окружности



01

Опорные точки и смысл координат

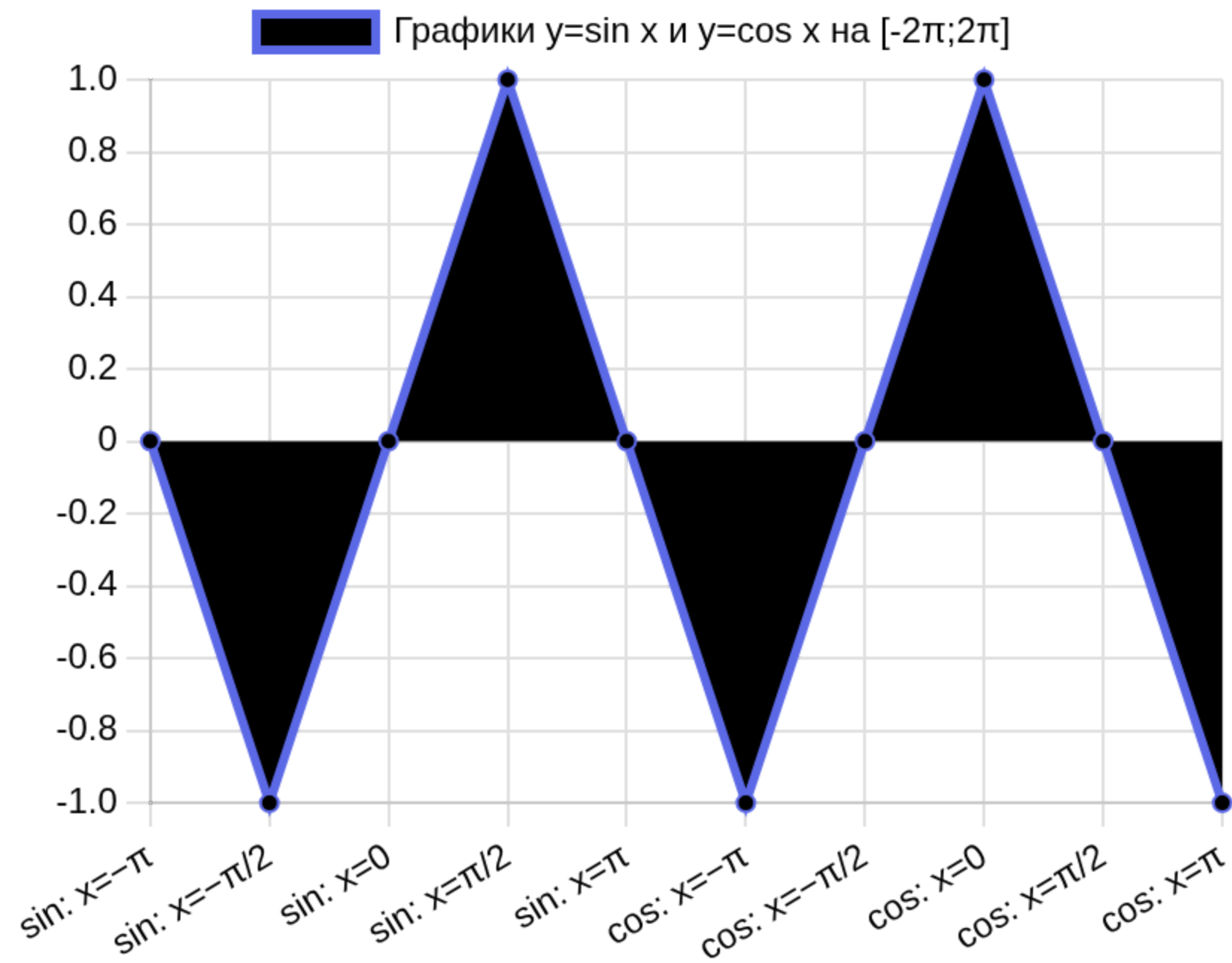
Отметим на окружности точки для углов 0 , $\pi/2$, π , $3\pi/2$ и 2π . При $x=0$ точка имеет координаты $(1,0)$, поэтому $\cos 0=1$ и $\sin 0=0$. Аналогично читаются значения для остальных углов.

02

Повторяемость через 2π

По мере движения точки вдоль окружности меняются абсцисса и ордината, а вместе с ними — косинус и синус. Когда точка возвращается в начальное положение, значения повторяются, то есть появляется период 2π .

Графики синуса и косинуса



На графике видно, как $\sin x$ и $\cos x$ пересекаются и чередуют максимумы и минимумы, оставаясь в пределах от -1 до 1 .

Совпадение периода 2π и ограниченность помогают быстро оценивать значения без вычислений и корректно строить кривые по опорным точкам.

Построение по определениям через единичную окружность; значения $\sin x$, $\cos x$ при углах 0 , $\pm\pi/2$, π .

Тангенс и котангенс: область определения и поведение графиков

01

По определению $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$. Поэтому там, где $\cos x = 0$, дробь не имеет смысла, и тангенс не существует при $x = \pi/2 + \pi k$.

02

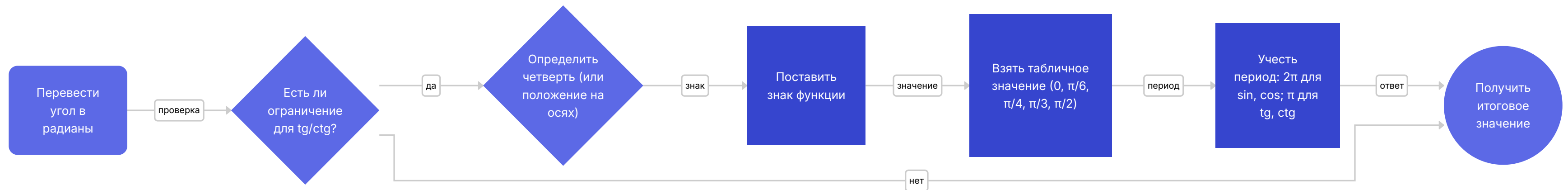
Аналогично $\operatorname{ctg} x = \cos x / \sin x$. Он не определён при $\sin x = 0$, то есть при $x = \pi k$, и потому график котангенса также имеет вертикальные разрывы.

03

Обе функции повторяются с периодом π и принимают любые действительные значения. Вблизи точек разрыва значения резко возрастают или убывают, что и формирует вертикальные асимптоты.

Алгоритм нахождения значения тригонометрической функции

Логика вычислений: область определения, четверть, знак и повторяемость.



Табличные значения основных углов



x	sin x	cos x	tg x
0	0	1	0
$\pi/6$	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	1	0	не существует

Таблица служит для быстрых вычислений $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{tg} x$ для часто встречающихся углов без калькулятора.

Табличные значения дают основу для работы с любыми углами: через периодичность и формулы приведения можно свести задачу к «опорным».

Единичная окружность и свойства прямоугольных треугольников с углами $\pi/6$ и $\pi/4$



Чётность функций и симметрия графиков



01

Синус — нечётная функция: $\sin(-x) = -\sin x$. Это означает, что график $y = \sin x$ меняет знак при отражении относительно начала координат.

02

Косинус — чётная функция: $\cos(-x) = \cos x$. Поэтому его график симметричен относительно оси ординат, и значение при $-x$ не меняется.

03

Тангенс и котангенс также нечётные: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$. Следовательно, в симметричном преобразовании их графики «переворачиваются» по знаку.

04

Эти свойства помогают проверять построения: если отражение даёт верный график, значит знаки и расположение ветвей определены правильно.

Связь с движением и колебаниями

Маятник: от положения равновесия к максимальному отклонению

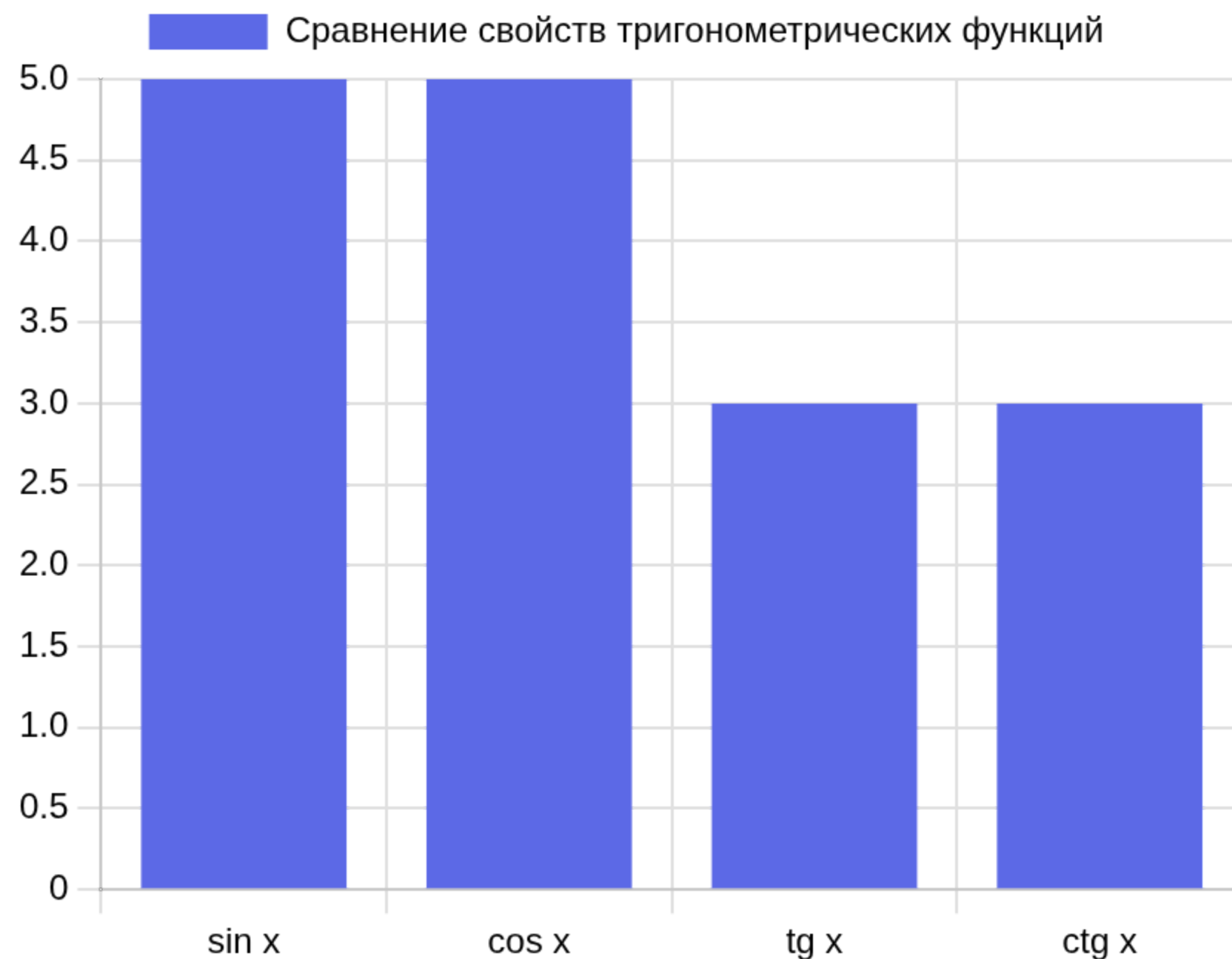
Маятник можно описывать как колебание точки около положения равновесия. Амплитуда соответствует наибольшему отклонению: график расстояния от нуля задаётся функцией синуса и повторяется снова и снова.

Звуковые волны и вращение: почему снова появляется синус

Синус и косинус удобно использовать, когда изменение происходит плавно и циклично: например, при колебаниях звука или при движении проекции точки, равномерно вращающейся по окружности. Тогда период превращается во «время одного оборота».



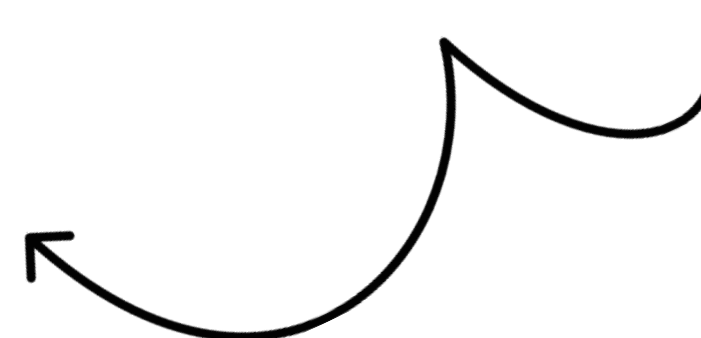
Сравнение основных свойств функций



У $\sin x$ и $\cos x$ нет разрывов: их графики «не обрываются». У $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ разрывы появляются в точках, где знаменатель обращается в ноль.

Диаграмма подчеркивает: функции, задающие плавные процессы, оказываются более «стабильными» по непрерывности, а тангенс и котангенс полезнее там, где нужны резкие переходы.

Составлено на основе школьных определений и свойств: период, ограниченность, непрерывность и разрывы (оценки условные, 1–5).



Формулы приведения в школьном курсе

01

Формулы приведения позволяют свести вычисления для углов вида $\pi \pm x$, $2\pi \pm x$, $\pi/2 \pm x$ к значениям той же функции от угла x . Тем самым уменьшается число случаев и ускоряются преобразования.

03

Рассуждать можно через симметрию единичной окружности: сдвиги на π или отражения относительно осей переводят точку в положение, где абсцисса и ордината приобретают нужные знаки.

02

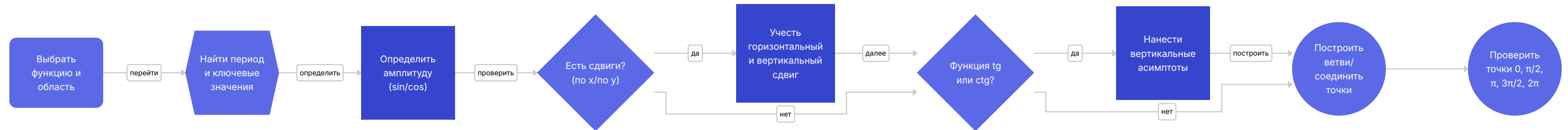
В формулах меняется либо знак, либо даже тип функции: например, $\sin(\pi/2 - x)$ выражается через $\cos x$. Это связано с тем, как координаты точки на единичной окружности переставляются местами.

04

Если углы различаются на $2\pi k$, значения $\sin x$ и $\cos x$ сохраняются, а для $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ период составляет πk . Поэтому формулы приведения естественно сочетаются с периодичностью функций.

Построение графика тригонометрической функции

Алгоритм по шагам: от опорных точек к асимптотам и ветвям



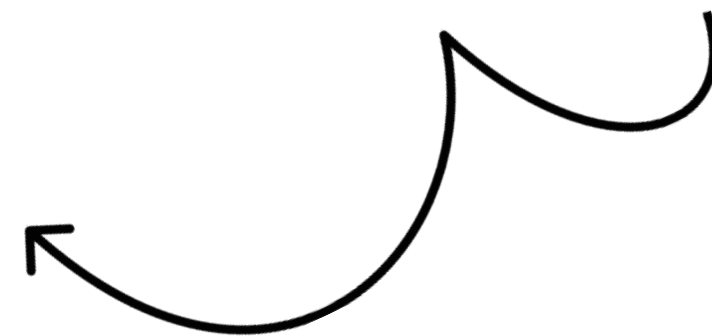
Влияние коэффициентов на график синуса



При переходе от $y = \sin x$ к $y = 2\sin x$ меняется только «высота» колебаний, а период остается прежним. В случае $y = \sin 2x$ частота возрастает.

График наглядно разделяет два эффекта: амплитуда влияет на масштаб по вертикали, а коэффициент при x меняет период и, следовательно, частоту повторений.

Составлено по аналитическим свойствам функций: амплитуда $|A|$ и период $2\pi/|k|$ для $\sin(kx)$ (моделирование графиков).



Типичные ошибки при работе с тригонометрическими функциями



Ошибка	Причина	Правильный результат
Смещение градусов и радиан	Аргумент подставляют без перевода	Все значения углов используют в радианной мере при работе с периодичностью $2\pi/\pi$
Неверный знак в III–IV четвертях	Знак определяют по «не той» четверти	Знак функции уточняют по положению точки на единичной окружности
Подстановка $\operatorname{tg} x$ в точке, где $\cos x = 0$	Не проверено условие области определения	В точках $x = \pi/2 + \pi k$ $\operatorname{tg} x$ не существует

Собрано по типовым причинам ошибок в школьных заданиях по теме тригонометрических функций (методическая практика).

Выявление частых затруднений помогает быстрее диагностировать причину неверного ответа и выбрать правильный ход рассуждений.

Ошибки концентрируются вокруг области определения и знаков по четвертям; контроль аргумента и проверка условий $\operatorname{tg} x/\operatorname{ctg} x$ существенно повышают точность.

Применение тригонометрич еских функций в задачах

Тригонометрия помогает описывать движение по окружности: зная угол поворота точки, можно находить её координаты, скорость проекции и направления изменения. Это напрямую связано с $\sin$ и $\cos$ на единичной окружности.

01

02

В геометрии тригонометрические функции применяют для нахождения сторон и углов, особенно в прямоугольных треугольниках, где отношения связаны с $\sin$, $\cos$ и $\tg$. Так формулы становятся «мостом» между углом и длиной.

В физике и технике тригонометрические зависимости встречаются при моделировании колебаний, распространении волн и вращении механизмов. По графикам удобно читать амплитуду и период, а значит — предсказывать поведение системы.

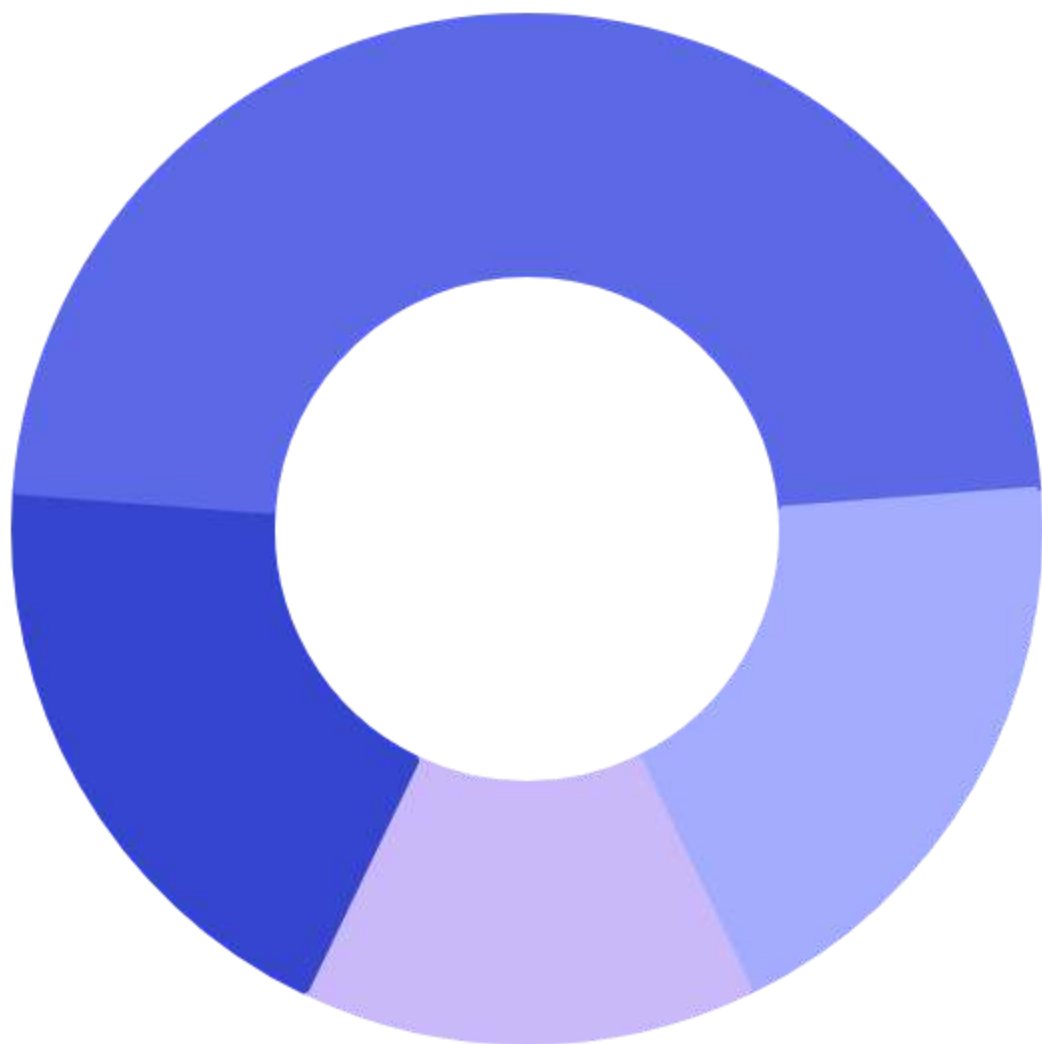
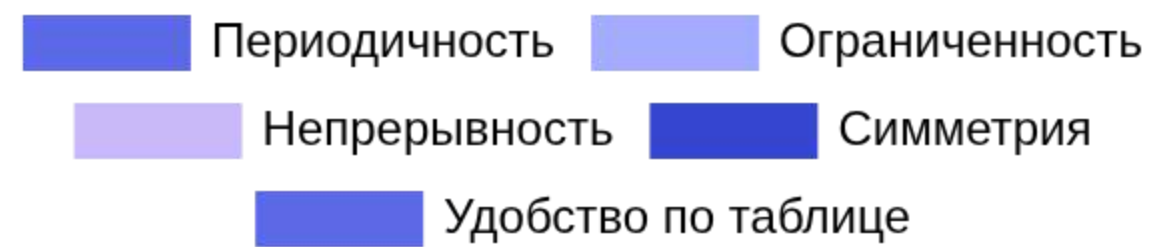


Радианная мера и числовая ось

- Радианная мера связывает длину дуги s и радиус r формулой $x = s/r$: это измерение аргумента «естественно» для окружности. Если $r = 1$, то x численно равно длине дуги.
- По числовой оси легко отмечать стандартные углы: 0 , $\pi/2$, π , $3\pi/2$ и 2π . Такая разметка делает вычисления более единообразными: один и тот же аргумент одновременно используется и в геометрии, и в графиках функций.



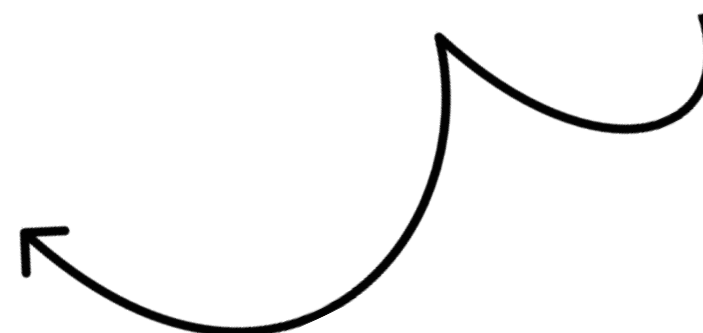
Сравнение свойств синуса, косинуса, тангенса и котангенса



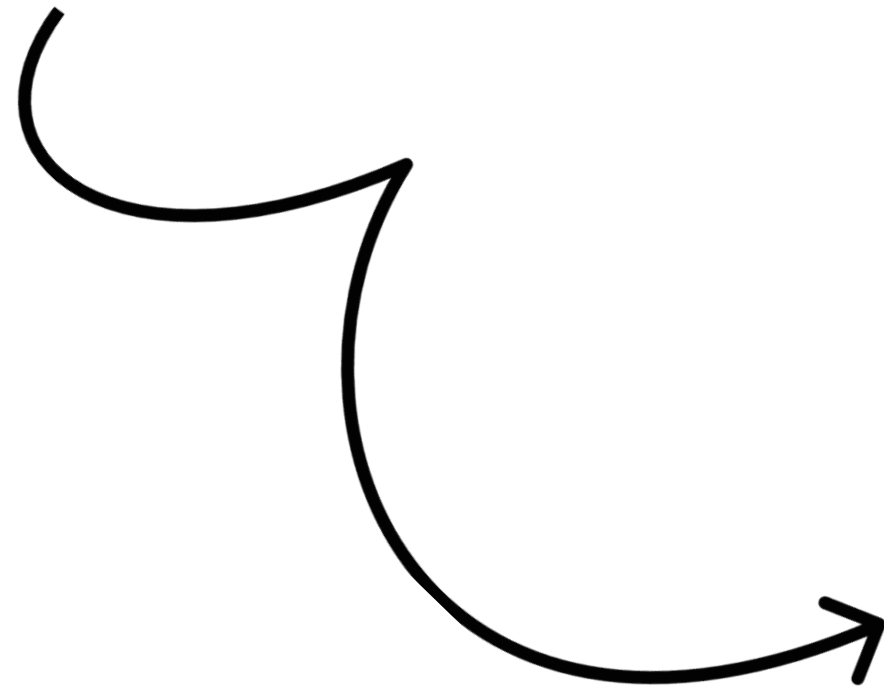
Синус и косинус обычно выбирают, когда важны плавность и непрерывное изменение величины. Тангенс и котангенс полезнее там, где важны угловые наклоны и касательные к графикам.

Различие проявляется в «качестве графика»: функции без разрывов стабильнее для анализа, а функции с асимптотами требуют аккуратной проверки точек и области определения.

Сводка свойств из школьного курса (оценки по критериям условные, для наглядного сравнения).



Итоги изучения темы



Тригонометрические функции числового аргумента определяются через единичную окружность и радианную меру. $\sin x$ и $\cos x$ ограничены и непрерывны с периодом 2π , а $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ имеют период π и разрывы. Освоив знаки, таблицу, периодичность и формулы приведения, легко решать школьные задачи точно.

