

Умножение вектора на число

Как число меняет длину и направление вектора.

Что такое вектор и как его записывают

Вектор — это направленный отрезок с длиной и направлением. На координатной плоскости его можно записать как $(x; y)$, а длину находят по формуле через координаты.



Это особый случай: длина нового вектора становится равной нулю, а направление исчезает.

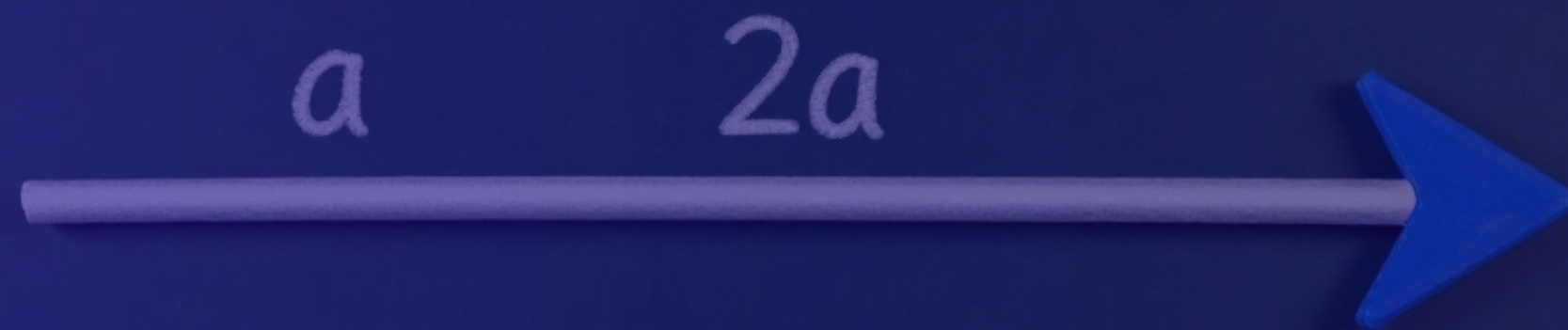
0

превращает любой вектор
в нулевой

Как выглядит результат на чертеже

Одинаковое направление

Вектор a и вектор $2a$ можно изобразить на одной прямой: оба смотрят в одну сторону, но второй заметно длиннее, что сразу видно на рисунке.



Противоположный луч

Вектор $-a$ имеет ту же длину, что и исходный, но его стрелка направлена в обратную сторону. Так знак числа меняет направление, не меняя размер.

Наглядное сравнение

Удобно рисовать несколько векторов рядом: это помогает увидеть связь между коэффициентом и стрелкой, а также понять, почему положительные и отрицательные числа действуют по-разному.

Как меняется вектор при разных значениях k

k	напр.	длина	пример
2	то же	в 2 раза больше	2a
½	то же	в 2 раза меньше	(½)a
-3	противоп.	в 3 раза больше	-3a
0	нет	0	0a

Сравнение показывает, как модуль и знак коэффициента влияют на вектор.

Модуль числа задаёт изменение длины, а знак числа — изменение направления.

Координатная формула умножения

1.

Формула на плоскости

Если вектор задан как $a = (x; y)$, то при умножении на число k получаем $ka = (kx; ky)$. Оба числа в записи меняются одинаково.

2.

То же в пространстве

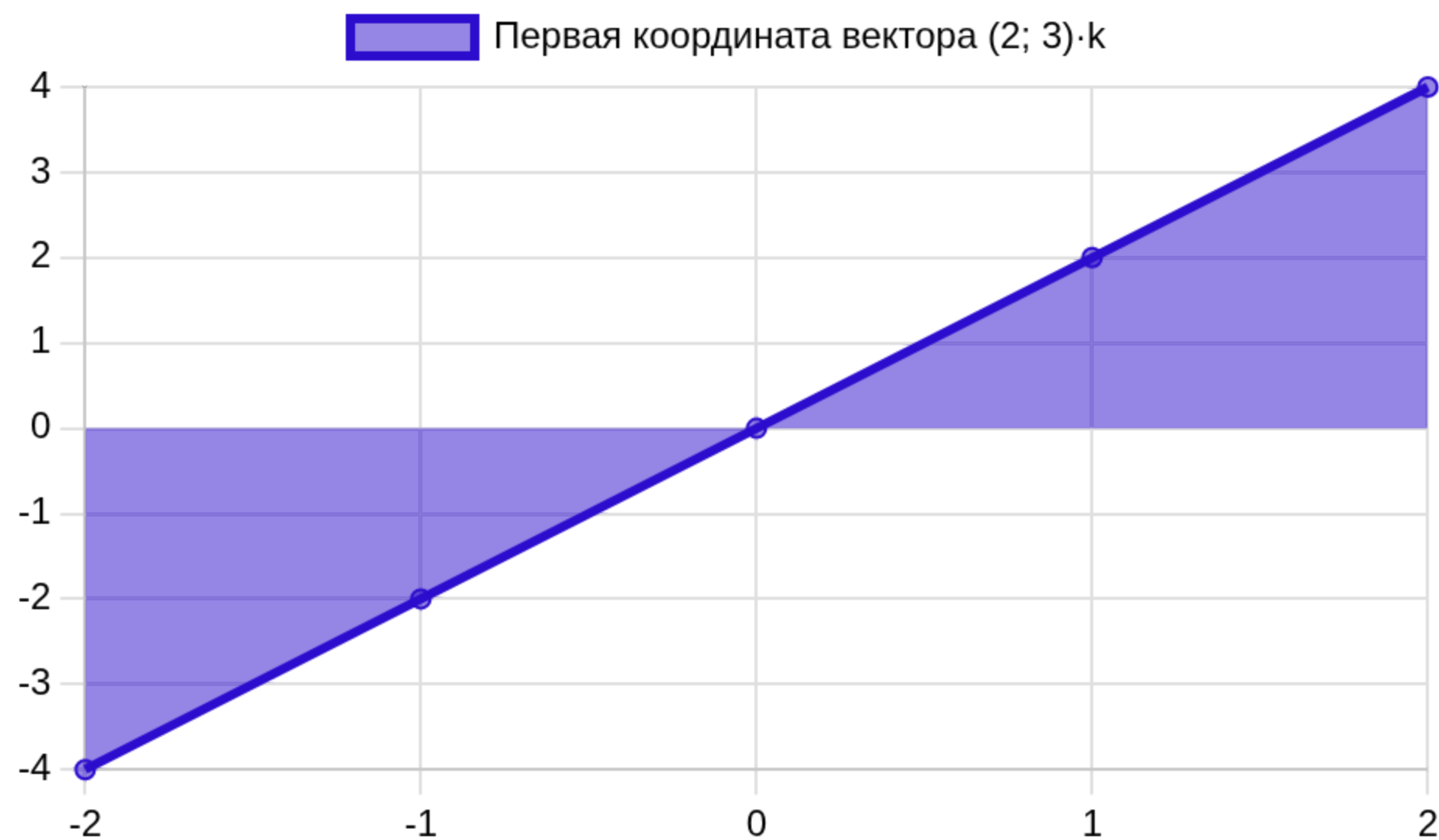
Для трёхмерного вектора правило не меняется: если $a = (x; y; z)$, то $ka = (kx; ky; kz)$. Это удобно, когда чертёж строить долго.

3.

Быстрый способ вычисления

Формула позволяет сразу получить новый вектор по координатам, не измеряя его длину на рисунке. Достаточно умножить каждую координату на один и тот же коэффициент.

Изменение координат при разных k



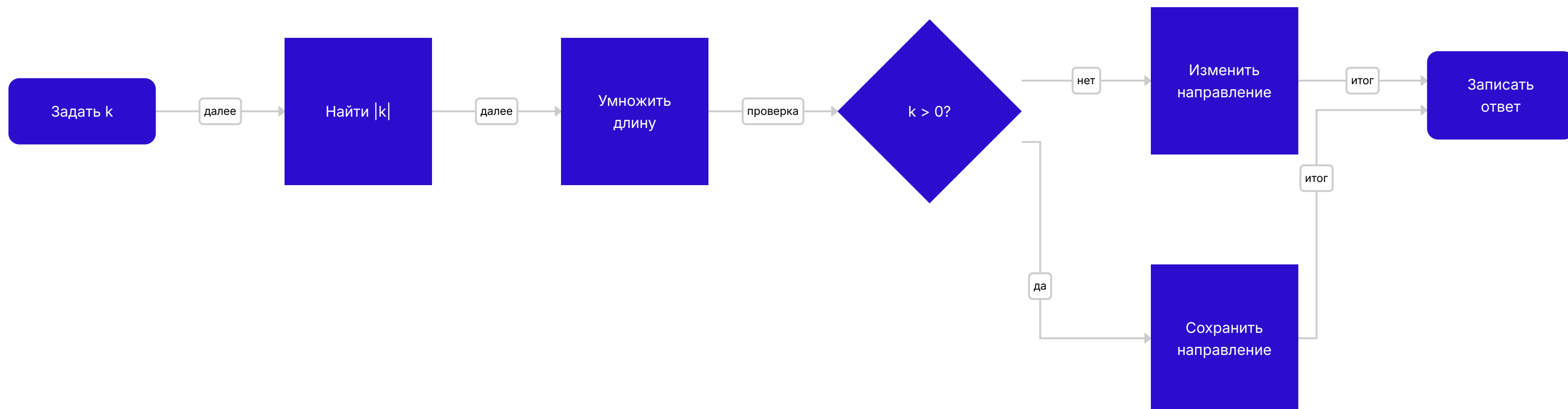
На рисунке показано только изменение первой координаты; вторая меняется так же пропорционально.

Чем больше $|k|$, тем больше модуль координат; при отрицательном k знак меняется, при $k = 0$ обе координаты равны нулю.

Расчёт по формуле $k\mathbf{a} = (kx; ky)$, $k = -2, -1, 0, 1, 2$

Как умножить вектор на число

Последовательность действий для чертежа и координатной записи



Основные свойства операции

1. Распределительное свойство

Если умножить сумму векторов на число, каждый слагаемый тоже умножается на это число: $k(a + b) = ka + kb$. Это помогает раскрывать скобки в вычислениях.

2. Сложение коэффициентов

Когда один и тот же вектор умножают на сумму чисел, можно умножить его отдельно на каждое число: $(k + m)a = ka + ma$. Так проще считать выражения.

3. Последовательное умножение

При нескольких умножениях коэффициенты можно перемножать: $(km)a = k(ma)$. Это удобно, когда действия выполняют по шагам, а не сразу.

4. Единица и минус единица

Если $k = 1$, вектор не меняется. Если $k = -1$, получается противоположный вектор: длина остаётся той же, а направление разворачивается.

5. Связь со сложением

Эти правила показывают, что умножение вектора на число согласуется с его сложением и делает вычисления в геометрии более понятными.

Как масштаб связан с векторами

Увеличение без поворота

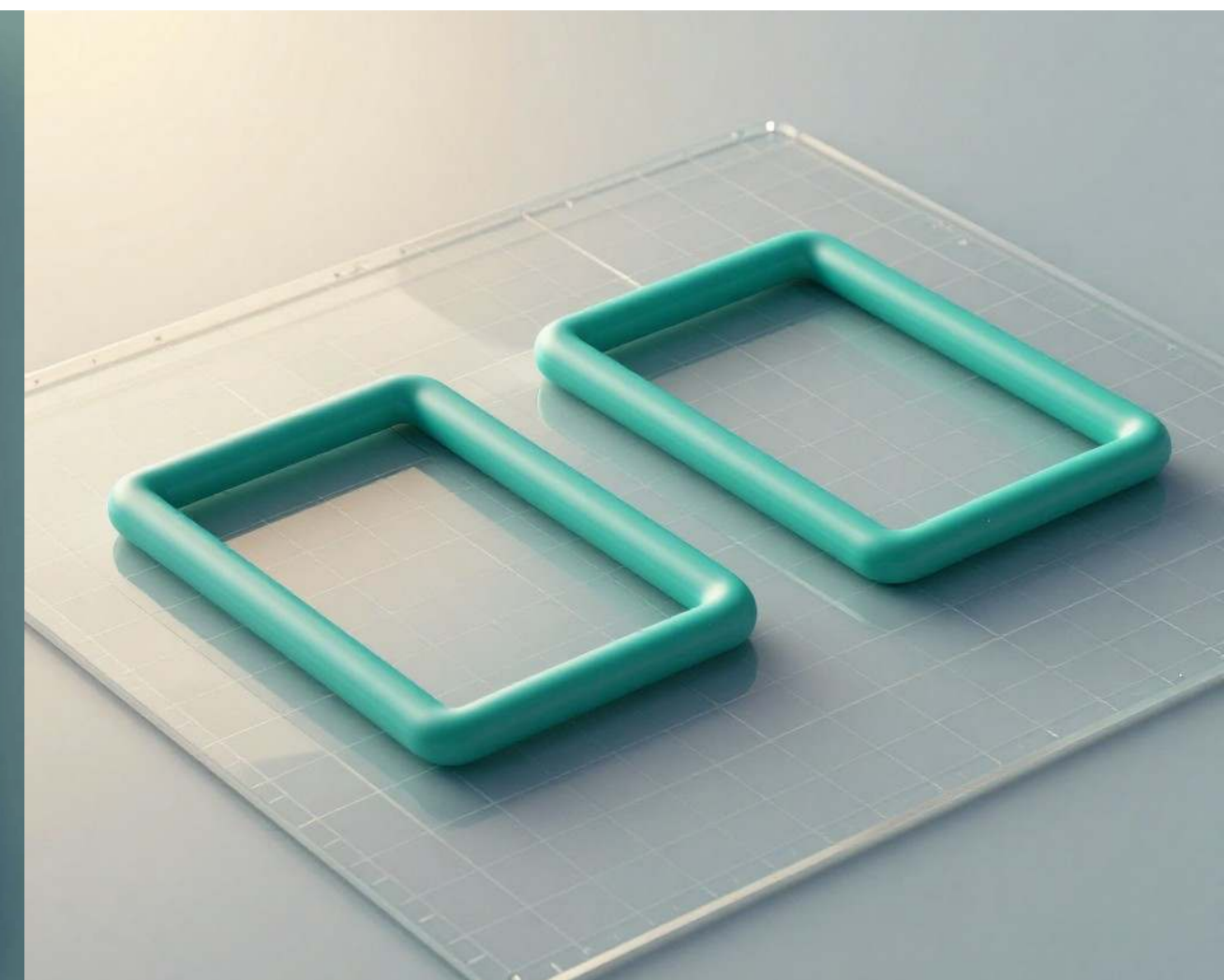
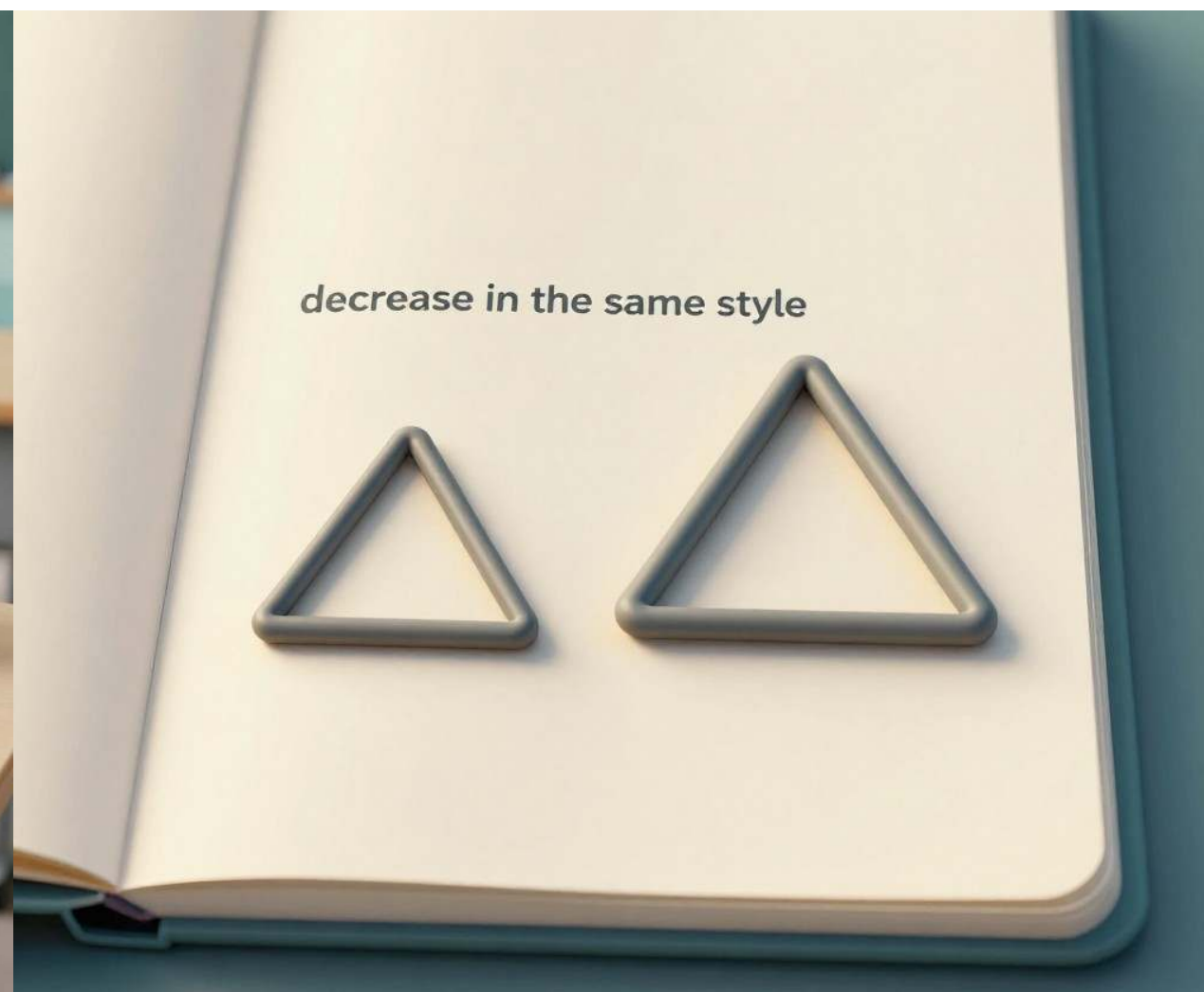
Представьте схему, которую нужно сделать крупнее для плаката. Все линии становятся длиннее, но форма остаётся прежней. Именно так действует умножение вектора на положительное число: оно меняет размер, сохраняя направление и общий вид фигуры.

Уменьшение в том же стиле

Теперь возьмём тот же рисунок и сделаем его меньше, как уменьшенную копию в тетради. При коэффициенте $\frac{1}{2}$ каждый соответствующий отрезок становится короче, но пропорции не нарушаются. Вектор ведёт себя так же аккуратно и предсказуемо.

Почему это полезно

В геометрии такой приём помогает сравнивать подобные фигуры и быстро строить новые точки на координатной сетке. Один и тот же коэффициент одинаково влияет на все связанные отрезки, поэтому результат легко проверить глазами.



Примеры с координатами

1.

Вектор a

Для вектора $a = (-3; 4)$ умножение на 2 даёт $(-6; 8)$, а на -1 — $(3; -4)$. Координаты меняются одинаково, поэтому легко проверить результат по каждой записи.

2.

Дробный коэффициент

Если взять $0,5a$, получится $(-1,5; 2)$. Такой пример показывает уменьшение длины вектора в два раза без изменения направления, когда коэффициент положительный.

3.

Вектор b

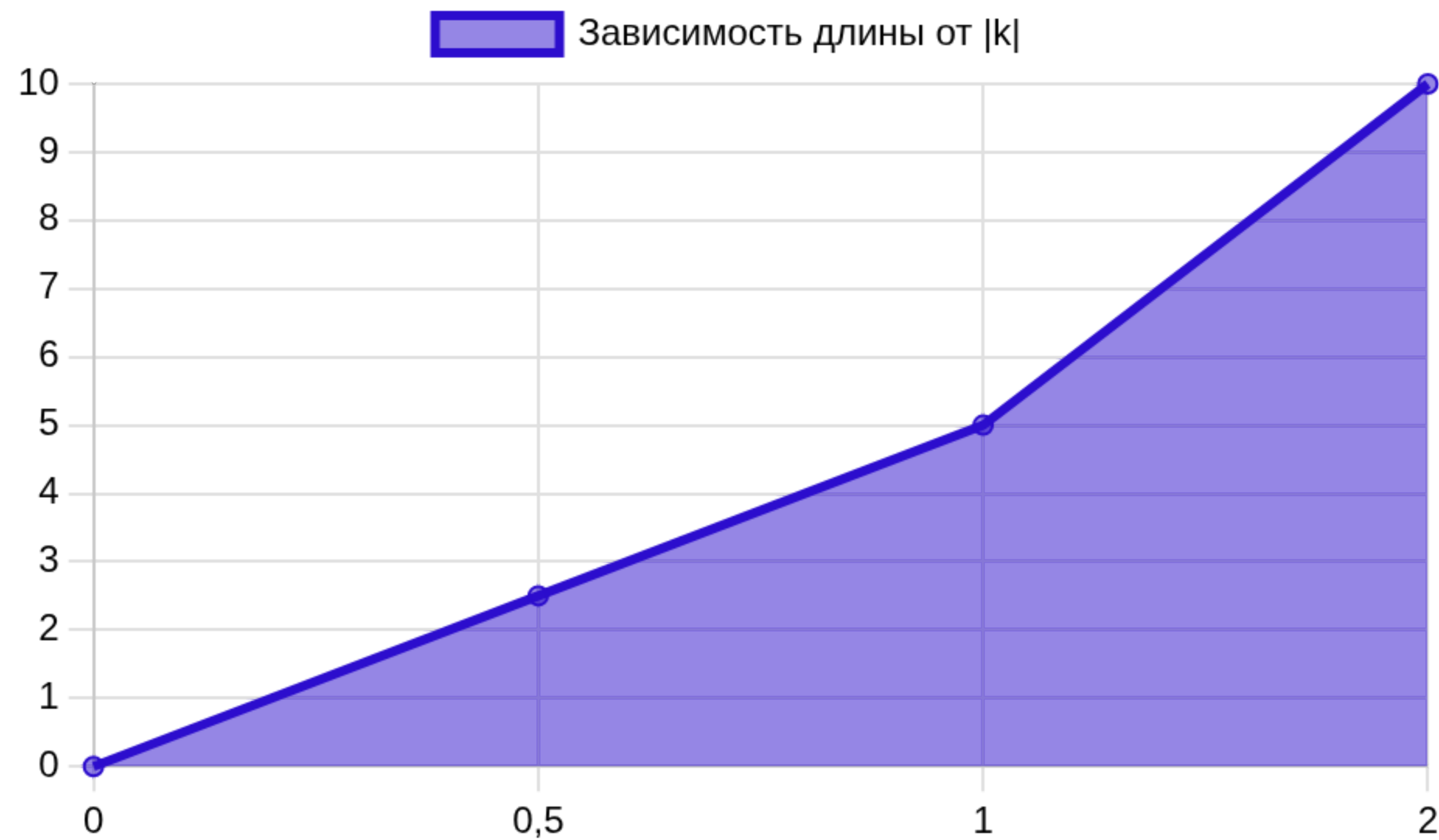
Для $b = (5; -2)$ имеем $3b = (15; -6)$. Здесь обе координаты умножаются на 3, поэтому вектор сохраняет направление, но становится в три раза длиннее.

4.

Отрицательный множитель

При $-2b$ получаем $(-10; 4)$. Отрицательное число меняет знак каждой координаты и одновременно переворачивает направление вектора на противоположное.

Как зависит длина вектора от $|k|$



На графике показано, что для исходного вектора длиной 5 изменение происходит без скачков: каждый новый коэффициент даёт предсказуемую длину.

Зависимость линейная: длина нового вектора равна $5 \cdot |k|$. Чем больше модуль коэффициента, тем сильнее растягивается или сжимается вектор.

Составлено по правилам умножения вектора на число; исходная длина вектора принята равной 5.

Типичные ошибки при умножении вектора

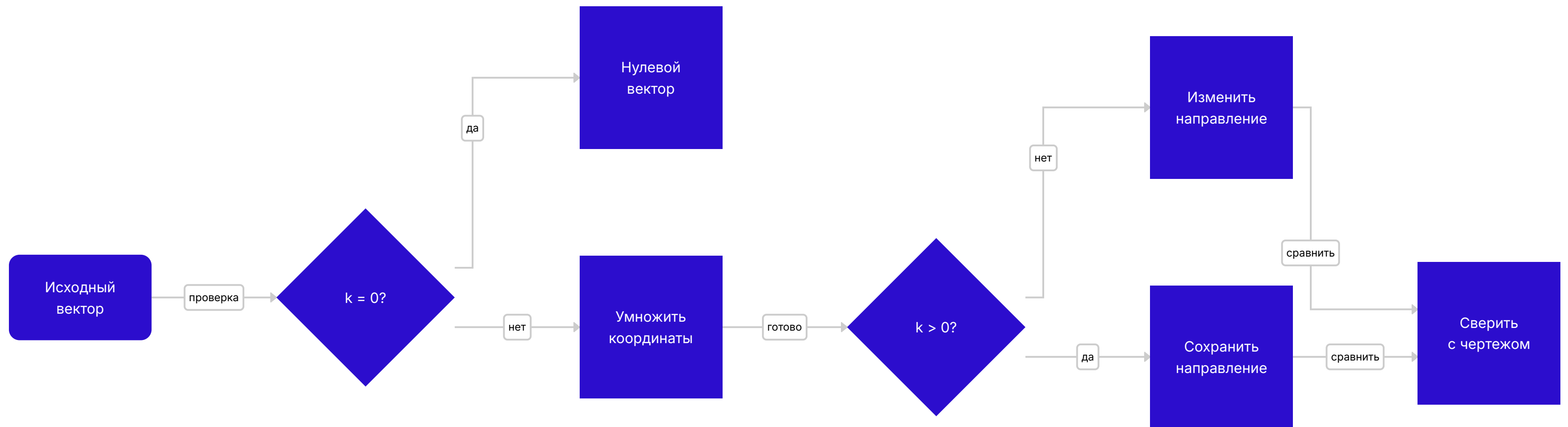
В таблице собраны самые частые ошибки и показано, как избежать неверного ответа при работе с координатами и знаком числа.

Главные источники ошибок — знак коэффициента, дробные числа и случай, когда $k = 0$. Проверка обеих координат помогает избежать неточностей.

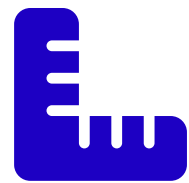
Ошибка	Неверно	Правильно
$k < 0$	знак не меняют	меняют направление
$\frac{1}{2}$	путают с вычит.	уменьшает длину
$0a$	считают a	получают 0

Проверка правильности ответа

Последовательность проверки результата умножения вектора на число по чертежу и по координатам.

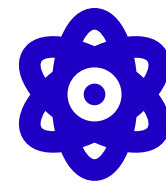


Где используется эта операция



Геометрия

В геометрии умножение вектора на число помогает строить подобные фигуры, увеличивать или уменьшать стороны и сохранять форму рисунка без лишних перестроений.



Физика

В физике с его помощью описывают изменение величины скорости или силы. При этом удобно показывать, как меняется направление действия вектора.



Компьютерная графика

При масштабировании изображений векторные объекты можно делать крупнее или меньше, не теряя чёткости. Это похоже на умножение всех координат на одно число.

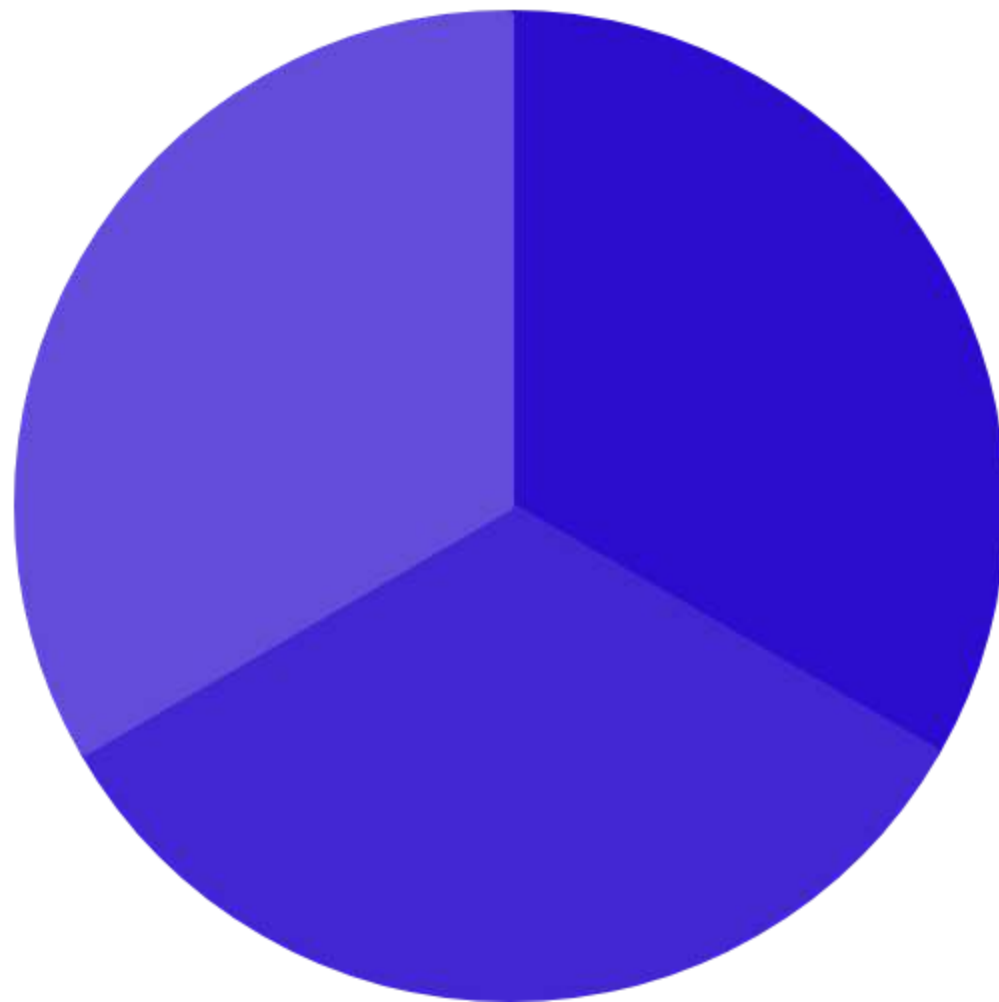


Координатные задачи

В задачах на плоскости операция помогает быстро находить новые точки и сравнивать расстояния. Она упрощает вычисления, когда важны только координаты и направление.

Положительное, отрицательное и нулевое число

■ Положительное k ■ Отрицательное k ■ $k = 0$



Каждый случай удобно рассматривать отдельно: именно знак коэффициента определяет, повернётся ли вектор или останется в том же направлении.

Три варианта дают разные результаты: сохранение направления, его изменение или исчезновение в нулевой вектор. Модуль числа влияет только на длину.

Составлено по правилам умножения вектора на число.

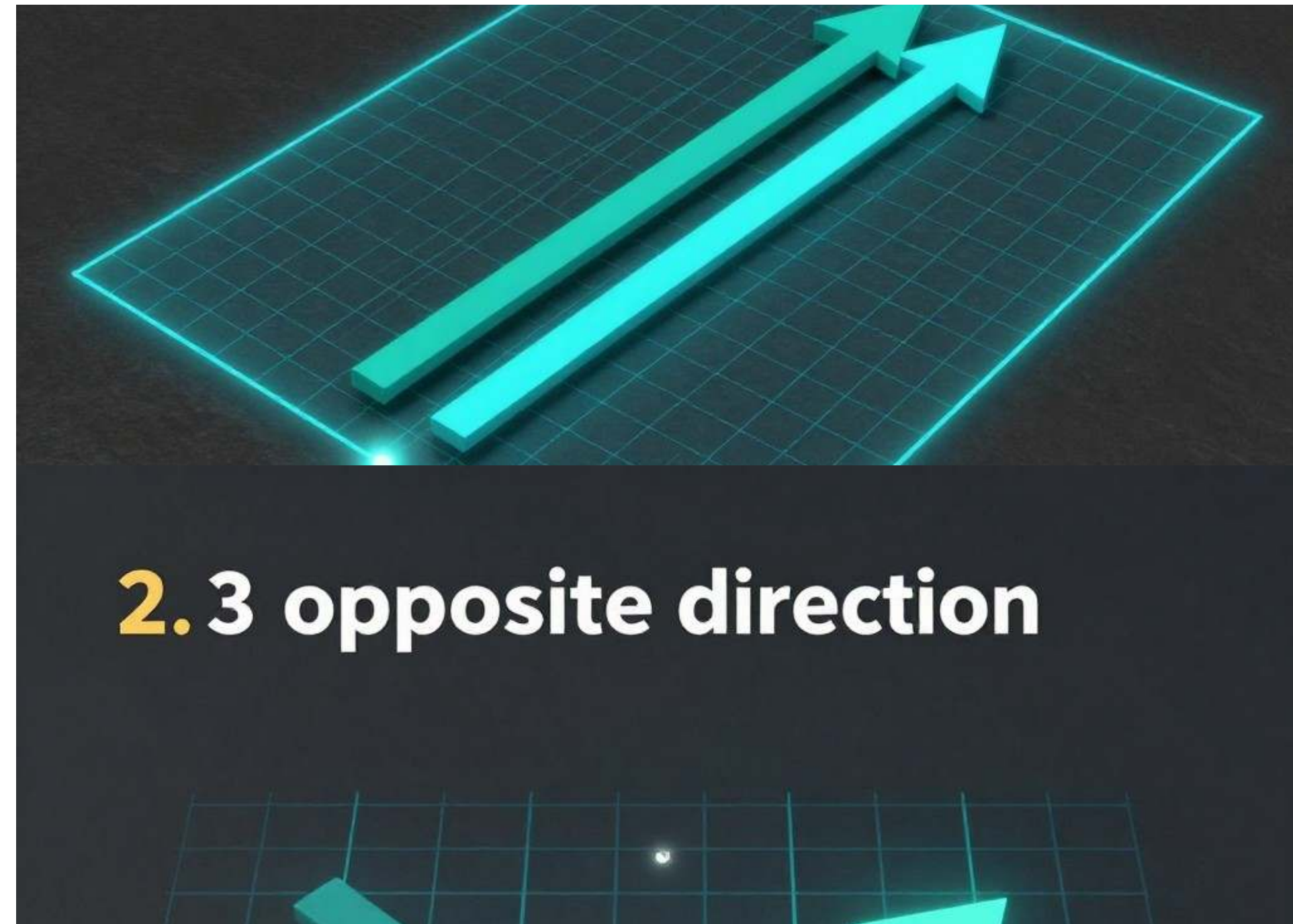
Векторы на координатной сетке

Одна линия для разных векторов

На координатной сетке векторы $(1; 2)$, $(2; 4)$ и $(3; 6)$ удобно расположить так, чтобы их концы лежали на одной прямой. Видно, что они направлены одинаково и отличаются только длиной. Это наглядно показывает действие умножения на число.

Противоположное направление

Если взять вектор $(-1; -2)$, его можно изобразить на той же прямой, но в обратную сторону. Такой рисунок помогает заметить, что отрицательный коэффициент не меняет саму линию, а только переворачивает вектор относительно начала отсчёта.



Короткие правила для запоминания

1. Смотри на модуль

Модуль числа показывает, во сколько раз изменится длина вектора. Если $|k|$ больше 1, вектор растягивается; если меньше 1, он укорачивается.

2. Смотри на знак

Положительное число сохраняет направление, а отрицательное переводит вектор в противоположную сторону. Поэтому знак всегда проверяют первым после вычислений.

3. Умножай обе координаты

При записи в координатах каждую координату умножают на одно и то же число. Если изменить только одну, ответ получится неверным.

4. Помни про ноль

Когда $k = 0$, любой вектор превращается в нулевой. Это особый случай, который нужно сразу узнавать и не путать с обычным уменьшением.

Итоговые примеры для закрепления

Вектор	Число	Результат
(4; -1)	2	(8; -2)
(2; 5)	-3	(-6; -15)
(-6; 3)	$\frac{1}{2}$	(-3; 1,5)
(1; -4)	0	(0; 0)

Эти примеры показывают, как работают положительные, отрицательные, дробные и нулевые коэффициенты при умножении вектора на число.

Результат зависит и от величины коэффициента, и от его знака. Таблица помогает быстро увидеть все основные случаи в одной записи.

Что нужно помнить о векторе и числе

Умножение вектора на число — это простой способ изменить его длину и направление. Если запомнить правило для знака и координат, задачи становятся понятнее и решаются быстрее.