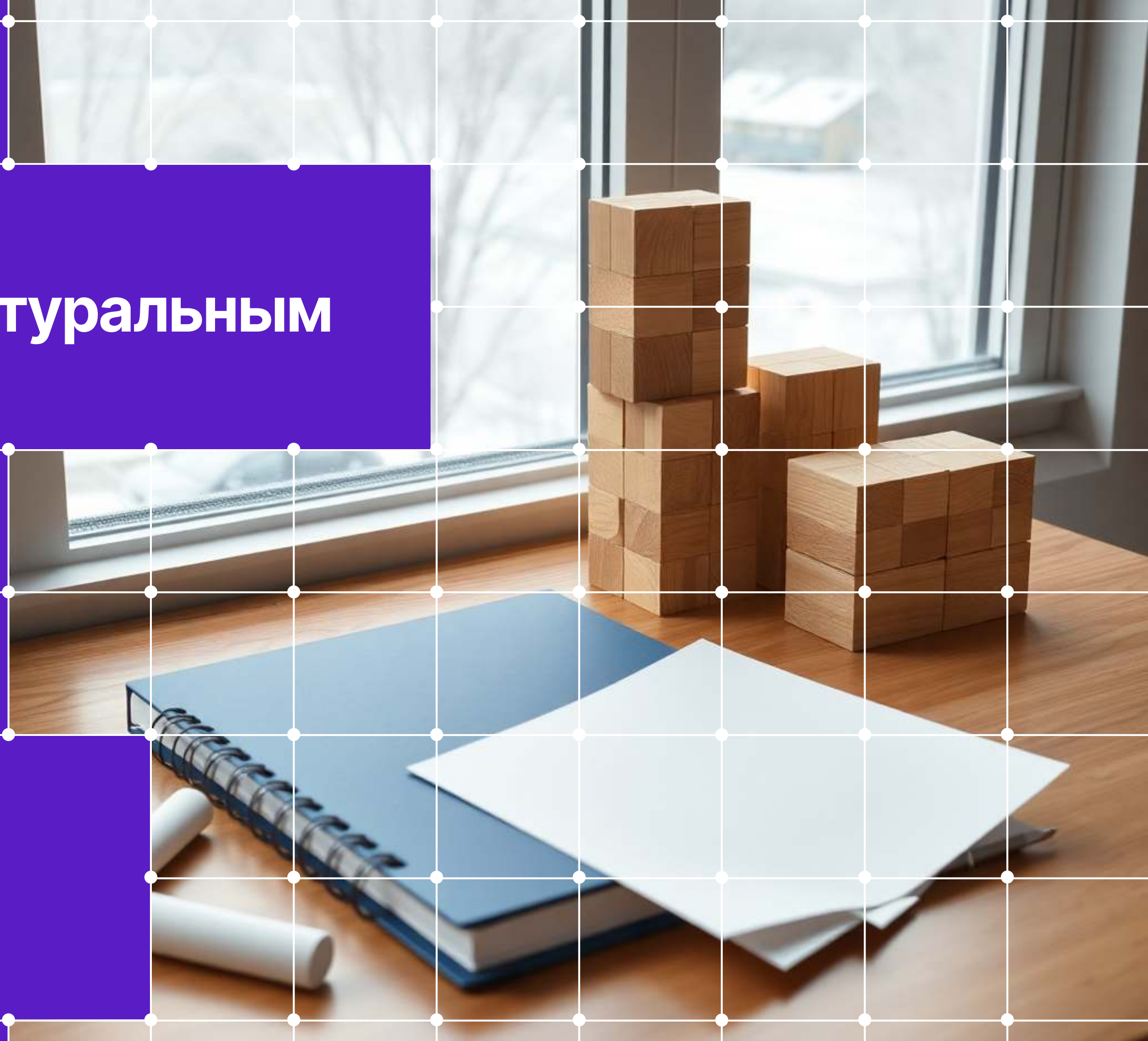


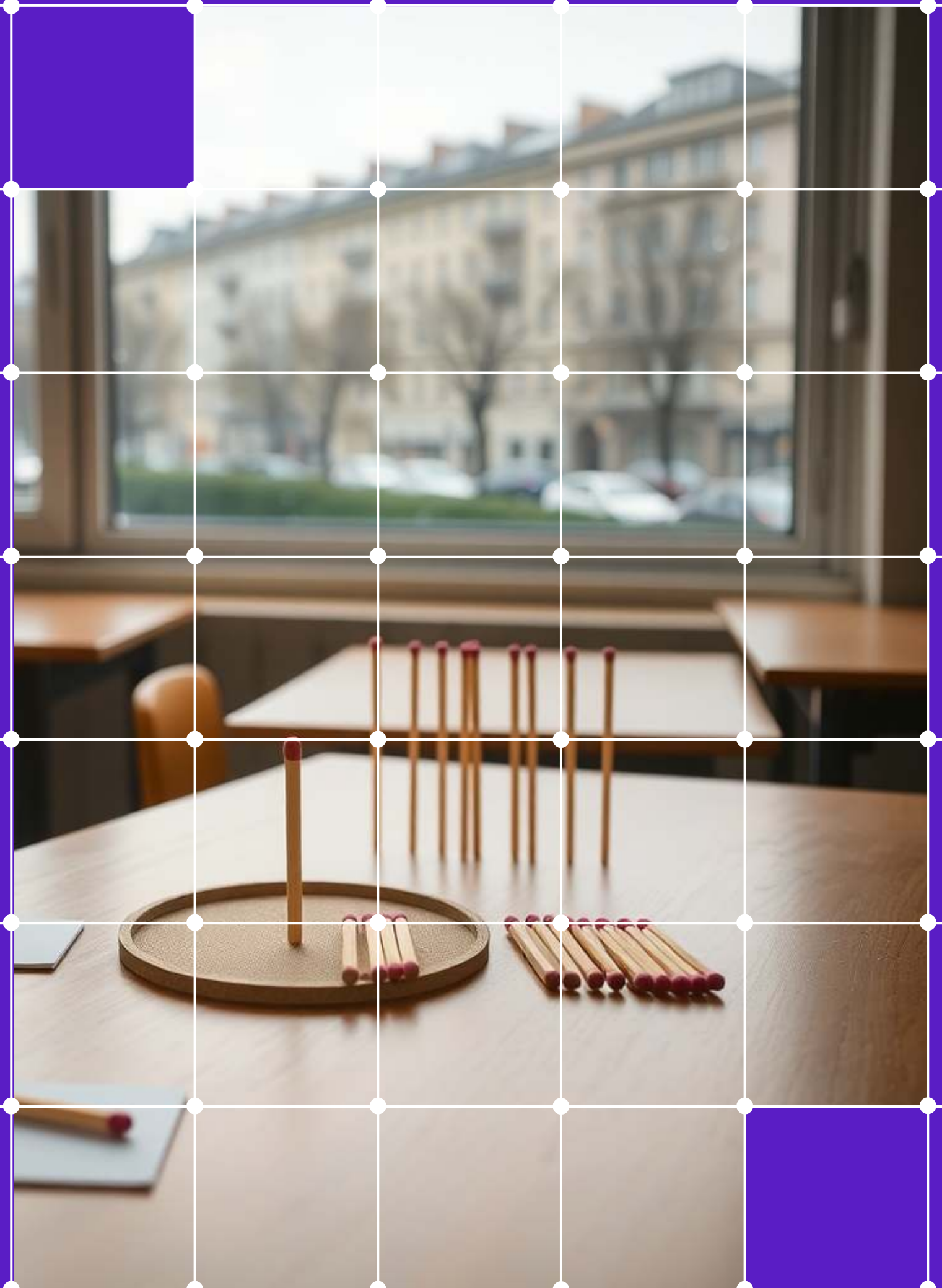
Свойства степени с натуральным показателем

Короткая запись для длинных вычислений и удобных преобразований.



Степени вокруг нас

Степени помогают компактно записывать повторяющееся умножение, работать с формулами и понимать большие числа. В этой теме важно научиться видеть основание и показатель степени, чтобы уверенно упрощать выражения и решать задачи в 7 классе.



Определение степени с натуральным показателем

1. Запись степени

Степень с натуральным показателем записывают как a^n . В такой записи число a называют основанием, а число n — показателем степени. Эта форма показывает повторяющееся умножение одинакового числа.

2. Что означает значение

Значение a^n равно произведению n одинаковых множителей a . Например, $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$, а $5^3 = 125$. Чем больше показатель, тем длиннее цепочка умножения.

3. Простые примеры

Степени удобно считать и с десятичными числами. Так, $10^2 = 100$, потому что 10 умножается само на себя два раза. Такие примеры помогают быстро увидеть смысл записи степени.

4. Особый случай

Если показатель равен 1, то $a^1 = a$. То есть число не изменяется, потому что оно записано как один множитель. Это правило часто используется при упрощении выражений.

Как читается запись степени

Основание и показатель

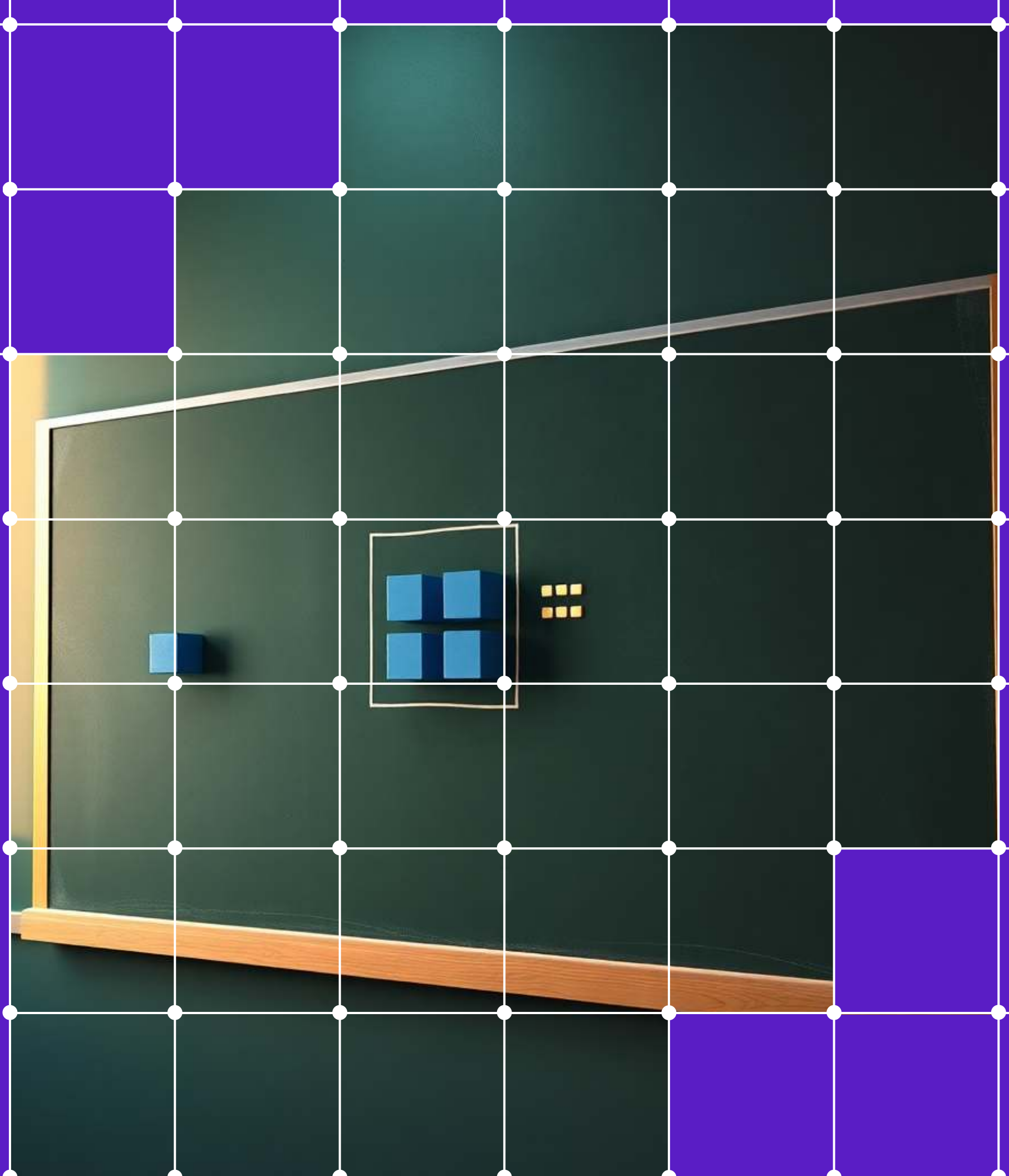
В записи 3^5 основание — это 3, а показатель — 5. Основание указывает, какое число повторяется в произведении, а показатель показывает число повторений.

Как выглядит запись

Показатель степени пишется маленьким числом справа и чуть выше основания. Такая форма делает запись короткой и удобной, особенно когда в выражении встречаются буквы, дроби и скобки.

Примеры чтения

Записи 7^2 , $(-4)^3$ и x^6 читаются по-разному, но принцип один и тот же. Важно внимательно смотреть на скобки и не путать само число с его степенью.



Как быстро растут степени одного и того же числа

Уже на нескольких шагах видно, что значения растут очень быстро. Это одна из причин, почему степень удобно использовать для краткой записи больших чисел и вычислений.

Чем больше показатель, тем быстрее увеличивается значение степени; при основании 3 рост заметно стремительнее, чем при основании 2.

Составлено по значениям степеней 2 и 3.

Умножение степеней с одинаковым основанием

1. Главное правило

Если перемножаются степени с одинаковым основанием, показатели складываются:
 $a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$. Основание не меняется, потому что повторяется одно и то же число.

2. Почему так происходит

При умножении одинаковых оснований мы просто объединяем все множители в одну цепочку. Поэтому вместо двух степеней получается одна степень с суммой показателей.

3. Числовой пример

Например, $2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 128$. Здесь к трём множителям добавляются ещё четыре, а затем всё выражение записывается короче и удобнее.

4. Буквенный пример

Для буквенных выражений правило работает так же: $x^2 \cdot x^5 = x^7$. Это особенно полезно, когда нужно упростить длинные произведения и не потерять общий множитель.

Деление степеней с одинаковым основанием

Правило вычитания

При делении степеней с одинаковым основанием показатели вычитаются: $a^m : a^n = a^{(m-n)}$, если $m > n$. Основание остаётся тем же, потому что делится одно и то же число.

Условие для основания

В делении степеней основание не должно быть равно нулю: $a \neq 0$. Иначе выражение теряет смысл, потому что деление на ноль в математике не допускается.

Пример с числами

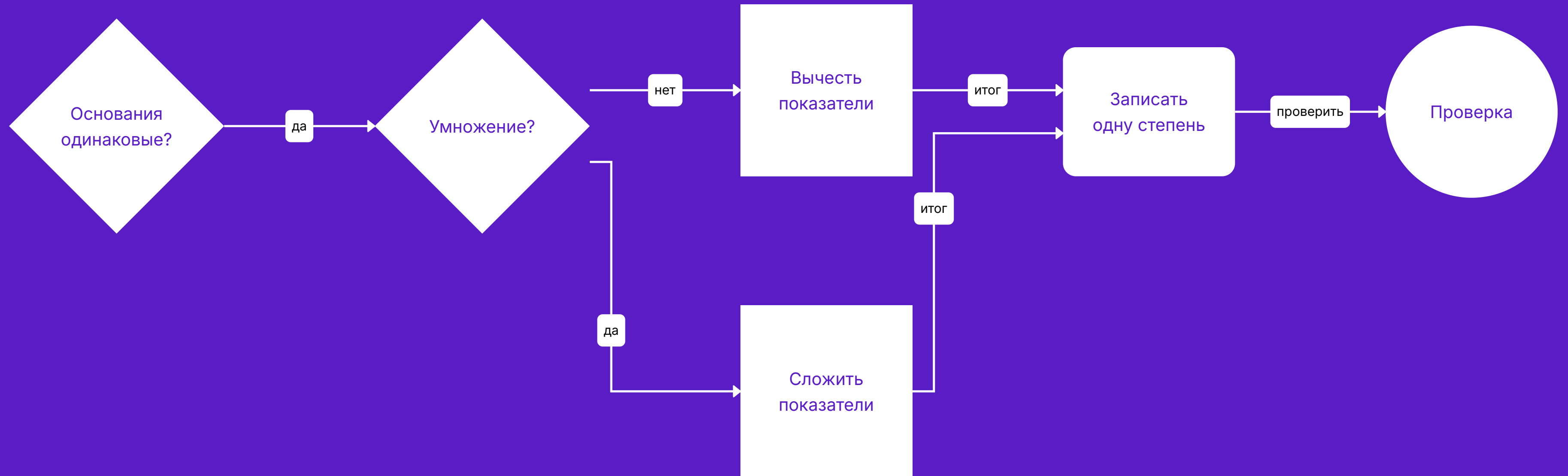
$5^6 : 5^2 = 5^4 = 625$. В этом случае из шести одинаковых множителей убираются два, и остаётся четыре множителя с тем же основанием.

Пример с буквами

Запись $a^8 : a^3 = a^5$ показывает, что правило работает и с буквами. Оно помогает быстро сокращать выражения и не расписывать всё через длинное деление.

Как работать с одинаковыми основаниями

Пошаговый выбор правила: сначала сравниваем основания, затем применяем нужное действие к показателям.



Возведение степени в степень

Сначала смотрим на скобки

Если внутри скобок уже есть степень, нужно понять, что вся эта степень повторяется ещё раз. Именно поэтому задача сводится к работе с показателями.

Затем перемножаем показатели

Для возведения степени в степень действует правило $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$. Внутренняя степень повторяется n раз, поэтому показатели не складываются, а умножаются.

После этого записываем ответ

Примеры выглядят так: $(2^3)^4 = 2^{12}$, $(x^2)^5 = x^{10}$, $(3^2)^3 = 3^6$. Это свойство особенно удобно при упрощении выражений со скобками.

Степень произведения

Когда степень распределяется на множители

Если в скобках произведение, степень нужно применить к каждому множителю отдельно: $(ab)^n = a^n \cdot b^n$. Так выражение остаётся равным исходному, но становится удобнее для вычислений и преобразований. Правило работает и для двух, и для большего числа множителей.

Пример с числами и буквами

В выражении $(2 \cdot 3)^2$ сначала можно увидеть произведение двух чисел, а затем возвести каждое в квадрат: $2^2 \cdot 3^2 = 36$. Точно так же $(4a)^2$ превращается в $16a^2$, потому что и число, и буква получают одну и ту же степень.

Почему это полезно

Это правило помогает быстро раскрывать скобки и не выполнять лишние действия. Особенно удобно оно в выражениях с буквами, где важно сохранить структуру записи и не делать вычисления по частям слишком долго.



Основные свойства степеней в одной таблице

Свойство	Формула	Пример	Результат
Умножение	$a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$	$2^3 \cdot 2^4$	2^7
Деление	$a^m : a^n = a^{(m-n)}$	$5^6 : 5^2$	5^4
Степень степени	$(a^m)^n = a^{(mn)}$	$(x^2)^3$	x^6
Степень произведения	$(ab)^n = a^n \cdot b^n$	$(2 \cdot 3)^2$	$2^2 \cdot 3^2$

Сводная таблица помогает увидеть, как каждое свойство меняет показатели степени и сохраняет основание.

Умножение и деление меняют показатели сложением и вычитанием, а возведение в степень — умножением. Для произведения степень распределяется на каждый множитель.

Степень частного



Правило записи

Степень частного записывают так: $(a:b)^n = a^n:b^n$. Это правило показывает, что при возведении в степень изменяются сразу оба числа в частном.



Как считать

Сначала можно возвести делимое и делитель в нужную степень, а затем выполнить деление. Такой способ удобен и для чисел, и для буквенных выражений.



Пример

В выражении $(6:2)^3$ получаем $6^3:2^3 = 27$. Аналогично $(x:y)^2$ превращается в $x^2:y^2$, если y не равно нулю.

Важное условие

Делить на ноль нельзя, поэтому в записи частного знаменатель обязательно должен быть отличен от нуля. Это условие сохраняется и при возведении частного в степень.

Два способа вычисления: через скобки и через свойства степеней

Во всех примерах свойства степеней позволяют перейти к более короткой записи без лишних промежуточных действий.

Применение свойств уменьшает число шагов и делает преобразование выражений более компактным.

Учебный пример сравнения способов вычисления

1

**получается при возведении
любого ненулевого числа
в нулевую степень.**

Учебное правило о нулевой степени

Это правило удобно для проверки выражений: оно
следует из деления одинаковых степеней и помогает
быстро упрощать записи.

Степени отрицательных чисел

1.

Чётный показатель

Если показатель чётный, отрицательное основание даёт положительный результат. Пара скобок сохраняет знак числа внутри степени, поэтому $(-2)^4 = 16$.

2.

Нечётный показатель

При нечётном показателе степень отрицательного числа остаётся отрицательной. Например, $(-2)^3 = -8$, потому что число умножается само на себя три раза.

3.

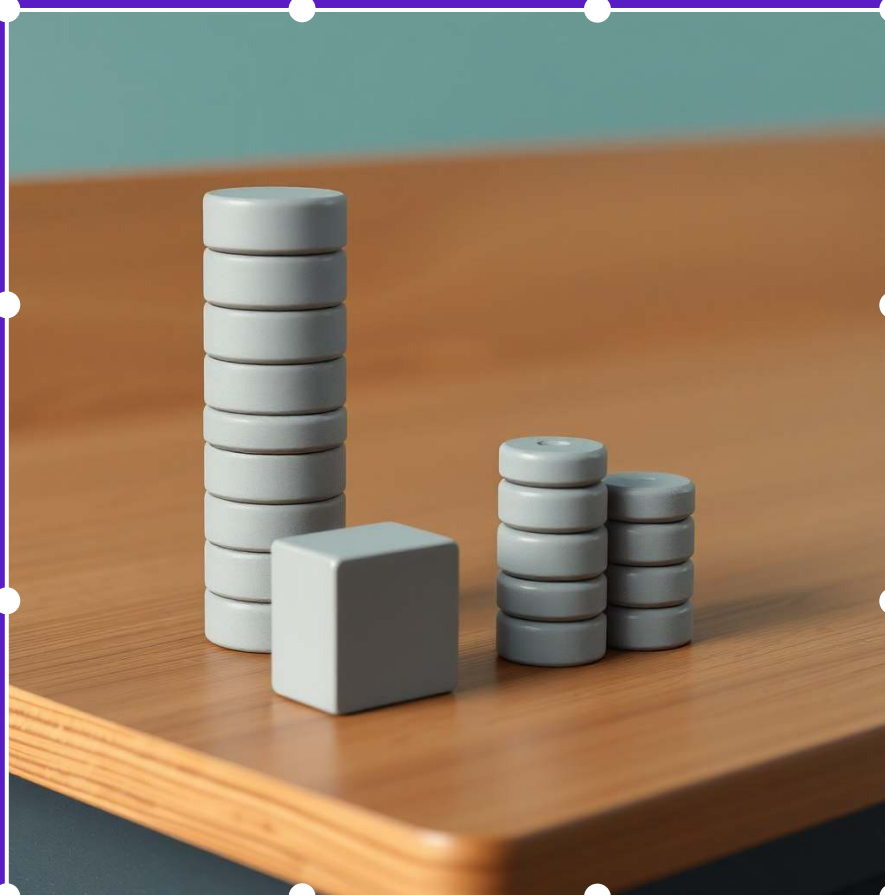
Скобки решают всё

Записи -2^4 и $(-2)^4$ означают разные действия. В первой сначала возводят 2 в степень, а затем ставят минус; во второй степень относится ко всему числу.

Типичные ошибки при работе со степенями

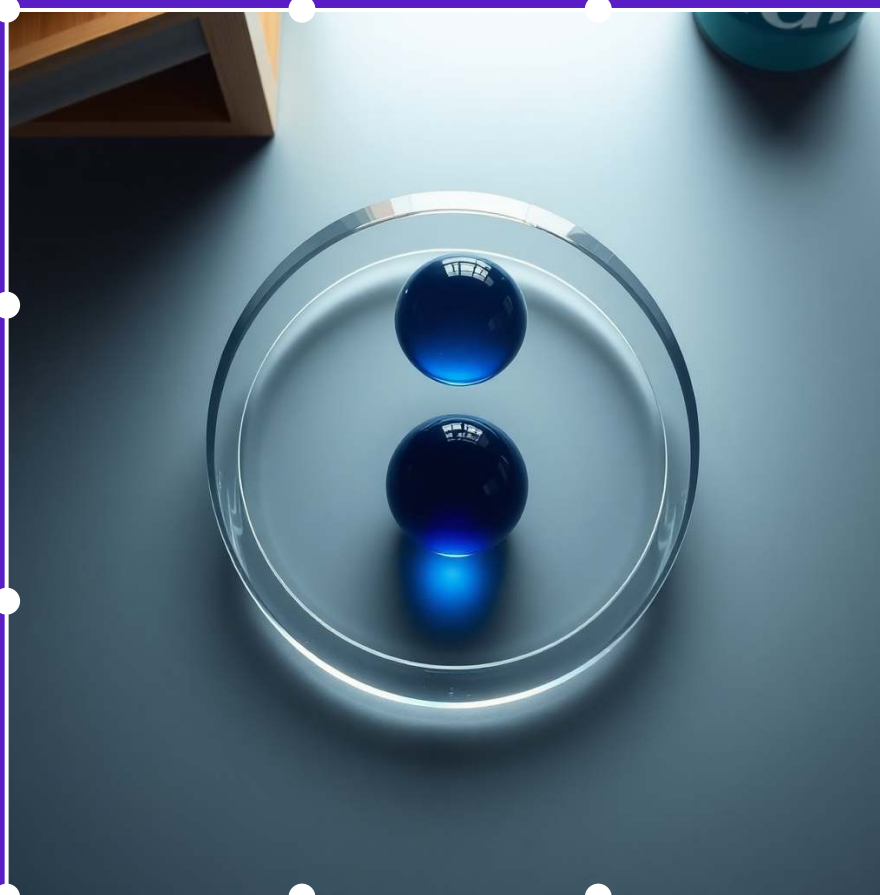
Путают правила умножения

Иногда ученик пытается сложить основания вместо показателей и получает неверный ответ. На изображении это видно по неправильной записи $2^3 \cdot 2^4 = 2^{12}$, хотя правильно 2^7 .



Забывают скобки у отрицательного числа

Ещё одна частая ошибка связана со знаком минус. Без скобок выражение -2^4 означает не то же самое, что $(-2)^4$, поэтому результат меняется сразу.



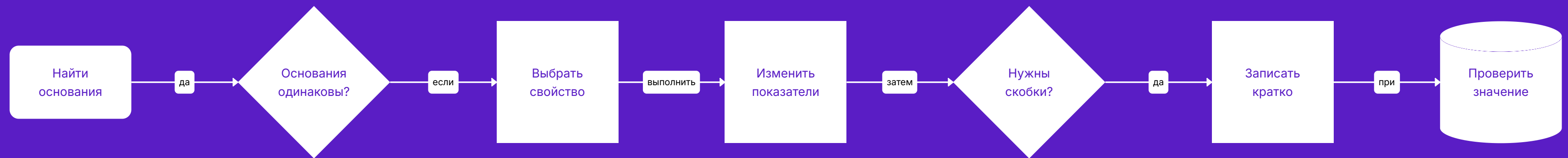
Смешивают сумму и степень

Выражения $a^m + a^n$ и $a^{(m+n)}$ выглядят похоже, но считаются по-разному. На схеме рядом показаны верные и неверные записи, чтобы легко заметить различие.



Алгоритм упрощения выражений со степенями

Последовательность шагов помогает выбрать нужное свойство и получить краткий ответ без лишних действий.



Преимущества степенной записи

Степенная форма особенно удобна в буквенных выражениях, где длинная запись быстро становится громоздкой и трудной для чтения.

Чем короче запись, тем легче выполнять преобразования и контролировать вычисления.

Учебный пример сравнения длины записи

Где степени встречаются в реальных задачах



Большие числа

Степени помогают компактно записывать очень большие числа: 10^3 , 10^6 и 10^9 читаются как тысяча, миллион и миллиард.



Информатика

В компьютерных задачах часто используют $2^{10} = 1024$. Такая запись связана с двоичной системой и помогает понимать объём памяти и единицы измерения.



Геометрия

В формулах площади квадрата $S = a^2$ и объёма куба $V = a^3$ степень показывает, сколько раз величина умножается сама на себя.

Что важно запомнить о степенях

Степень с натуральным показателем делает запись короче и помогает считать быстрее. Знание свойств степеней упрощает выражения, облегчает проверку ответов и готовит к изучению алгебры.