



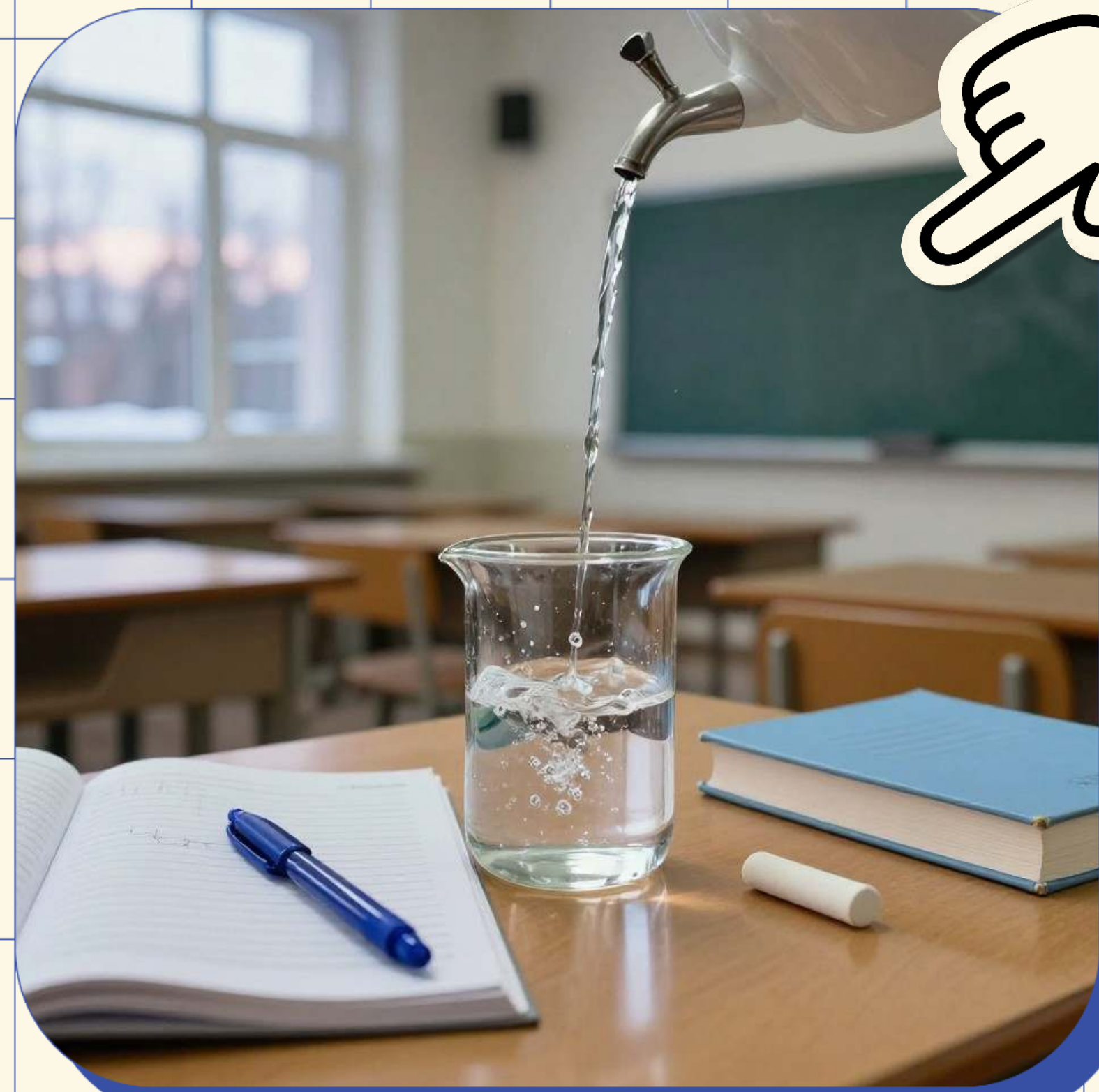
Первообразная и неопределённый интеграл

Обратная операция к дифференцированию и её основные приёмы



Зачем изучать первообразную в 11 классе?

Интегрирование позволяет восстанавливать функцию по её производной, а значит связывает изменение, движение и накопление. Именно эта идея лежит в основе математического анализа и помогает решать задачи о площадях, пути и законах изменения.



Определение первообразной



1

Связь с производной

Функция $F(x)$ называется первообразной для $f(x)$ на промежутке, если её производная совпадает с исходной функцией: $F'(x)=f(x)$.

2

Бесконечно много решений

Для одной и той же функции обычно существует не одна, а бесконечно много первообразных. Они отличаются только на постоянную величину, потому что производная числа равна нулю.

3

Простой пример

Если $f(x)=2x$, то одной первообразной будет x^2 , а общее решение записывают как x^2+C . Постоянная C показывает все возможные варианты семейства.



Неопределённый интеграл и его запись

Обозначение

1

Неопределённый интеграл записывают так: $\int f(x)dx$. Эта запись означает поиск всех функций, производная которых равна $f(x)$, то есть всего семейства первообразных.

Роль dx

2

Символ dx указывает переменную, по которой ведётся интегрирование. Он помогает понять, относительно какой переменной ищется первообразная, особенно в выражениях с несколькими буквами.

Почему нужна C

3

Константа C обязательна, потому что производная любой постоянной равна нулю. Без неё ответ был бы неполным и описывал бы только одну функцию вместо целого семейства.

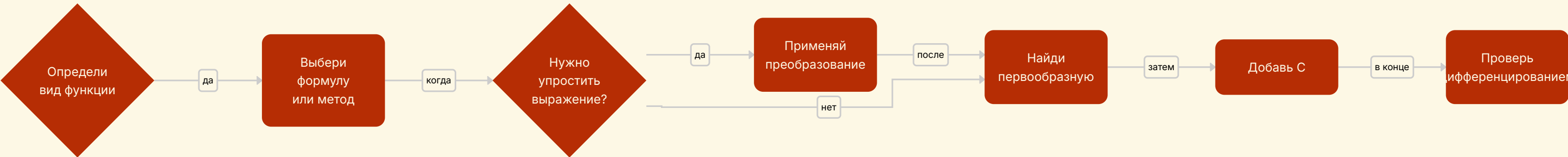
Связь с первообразной

4

Если $F'(x)=f(x)$, то $\int f(x)dx=F(x)+C$. Тем самым неопределённый интеграл не даёт единственный ответ, а фиксирует общий вид всех подходящих функций.

Как находить первообразную

Алгоритм школьного решения: от распознавания вида функции до проверки результата



Базовые формулы первообразных

Эти соответствия служат опорой для большинства школьных задач и позволяют быстро переходить от функции к её первообразной.

Несколько стандартных формул покрывают значительную часть типовых примеров и ускоряют решение более сложных задач.

Школьный курс алгебры и начал математического анализа

Функция					Первообразная									
x^n					$x^{(n+1)/(n+1)}+C$									
$1/x$					$\ln x +C$									
e^x					e^x+C									
$\sin x$					$-\cos x+C$									
const					$kx+C$									

Свойства неопределённого интеграла



Линейность

Интеграл суммы равен сумме интегралов. Это свойство позволяет разбивать сложное выражение на части и рассматривать каждое слагаемое отдельно, не теряя общей структуры задачи.



Постоянный множитель

Числовой коэффициент можно вынести за знак интеграла. Благодаря этому сначала удобно упростить запись, а затем применять подходящую формулу без лишних вычислений.



Сведение к простому виду

Линейные свойства помогают преобразовывать выражения так, чтобы они стали похожи на знакомые табличные интегралы. Именно поэтому многие задачи решаются быстрее после предварительного упрощения.

Геометрический смысл семейства первообразных

Одинаковая производная

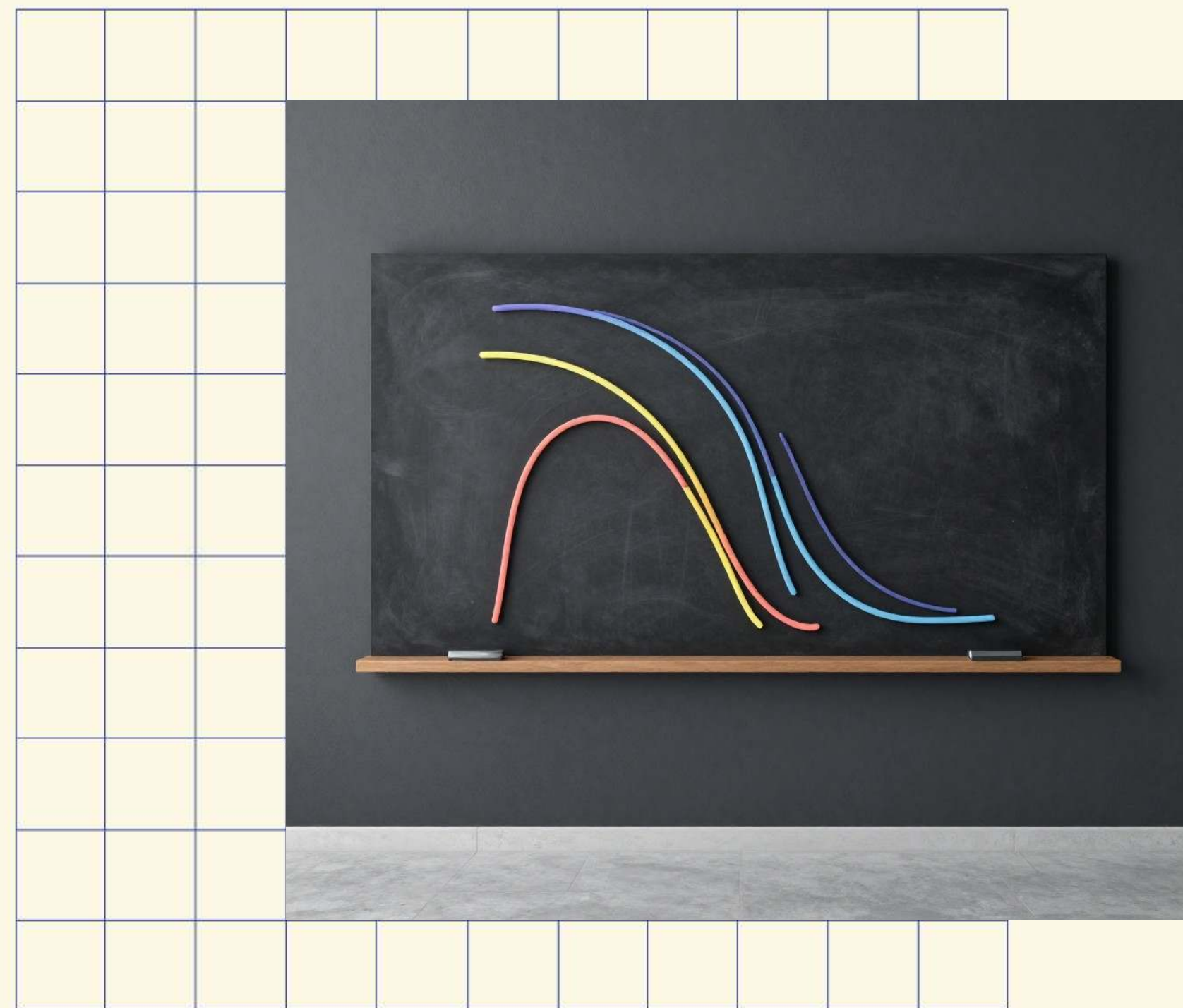
Все первообразные одной функции имеют одинаковую производную, а значит их графики отличаются не формой, а только положением на плоскости. Это удобно видеть на семействе параллельных кривых.

Вертикальный сдвиг

Добавление константы C сдвигает график вверх или вниз, не изменяя наклон касательной. Поэтому множество первообразных одной функции образует семейство одинаковых кривых.

Наглядный пример

Для $f(x)=x^2$ одной из первообразных является $F(x)=x^3/3$. Все остальные записываются как $x^3/3+C$, где разные значения C меняют только высоту графика.



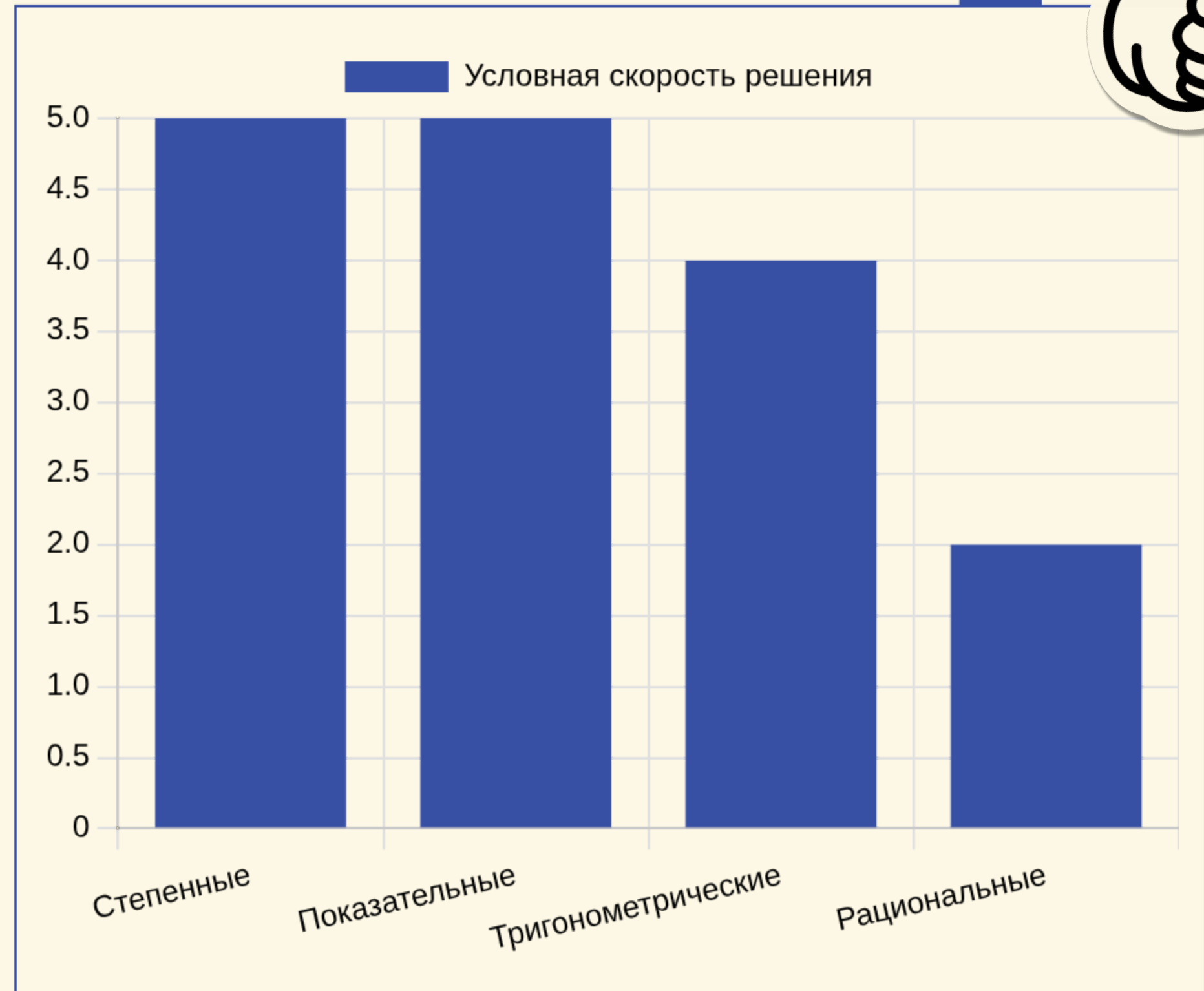
Сравнение типов функций



Стандартные формы чаще всего решаются по готовой формуле, а дроби и составные выражения требуют дополнительного преобразования перед интегрированием.

Чем ближе выражение к табличному виду, тем меньше шагов нужно для ответа; рациональные функции обычно требуют больше подготовки.

Обобщение правил школьного курса алгебры и начал математического анализа



Проверка правильности найденной первообразной



1 Главный способ проверки

Найденную функцию нужно продифференцировать и сравнить результат с исходной подынтегральной функцией. Если они совпадают, первообразная записана верно.

2 Константа сохраняется

Во время проверки постоянная C исчезает, потому что её производная равна нулю. Это нормально и не означает ошибку в решении.

3 Осторожность с логарифмами

Для выражения $1/x$ важно помнить о формуле $\ln|x|+C$. Модуль обязателен, так как без него ответ может быть неверным по области определения.

4 Контроль знаков и коэффициентов

Проверка помогает быстро заметить ошибки в знаке, в множителе или в записи аргумента. Поэтому дифференцирование — обязательный финальный шаг после вычисления.



Метод замены переменной



Составное выражение

Сначала ищут внутреннюю функцию и рядом — множитель, похожий на её производную. Такая структура подсказывает, что интеграл можно упростить заменой переменной.

Введение новой переменной

Далее обозначают сложный аргумент новой буквой и переписывают всё выражение через неё. В результате подынтегральная часть становится короче и удобнее для вычисления.

Возврат к исходной переменной

После нахождения первообразной переходят обратно к исходной переменной и обязательно добавляют константу C . Проверка производной показывает, что преобразование выполнено верно.

Интегрирование по частям

1

Когда метод нужен

Его применяют к произведениям, где одна часть при дифференцировании упрощается. Особенно часто это $x \cdot e^x$, $x \cdot \sin x$, $x \cdot \cos x$ и выражения с $\ln x$.

2

Выбор функции u

Ключевой шаг — выбрать u так, чтобы после дифференцирования она стала проще. Тогда оставшаяся часть dv легко интегрируется, и вся задача сводится к более ясным действиям.

3

Работа по формуле

После подстановки в выражение $\int u dv = uv - \int v du$ исходное произведение распадается на два более простых фрагмента. Часто достаточно одного или двух повторений формулы.

4

Контроль результата

В конце полученную первообразную удобно проверить дифференцированием. Такой контроль помогает заметить ошибки в знаке, коэффициенте и выборе исходной функции u .

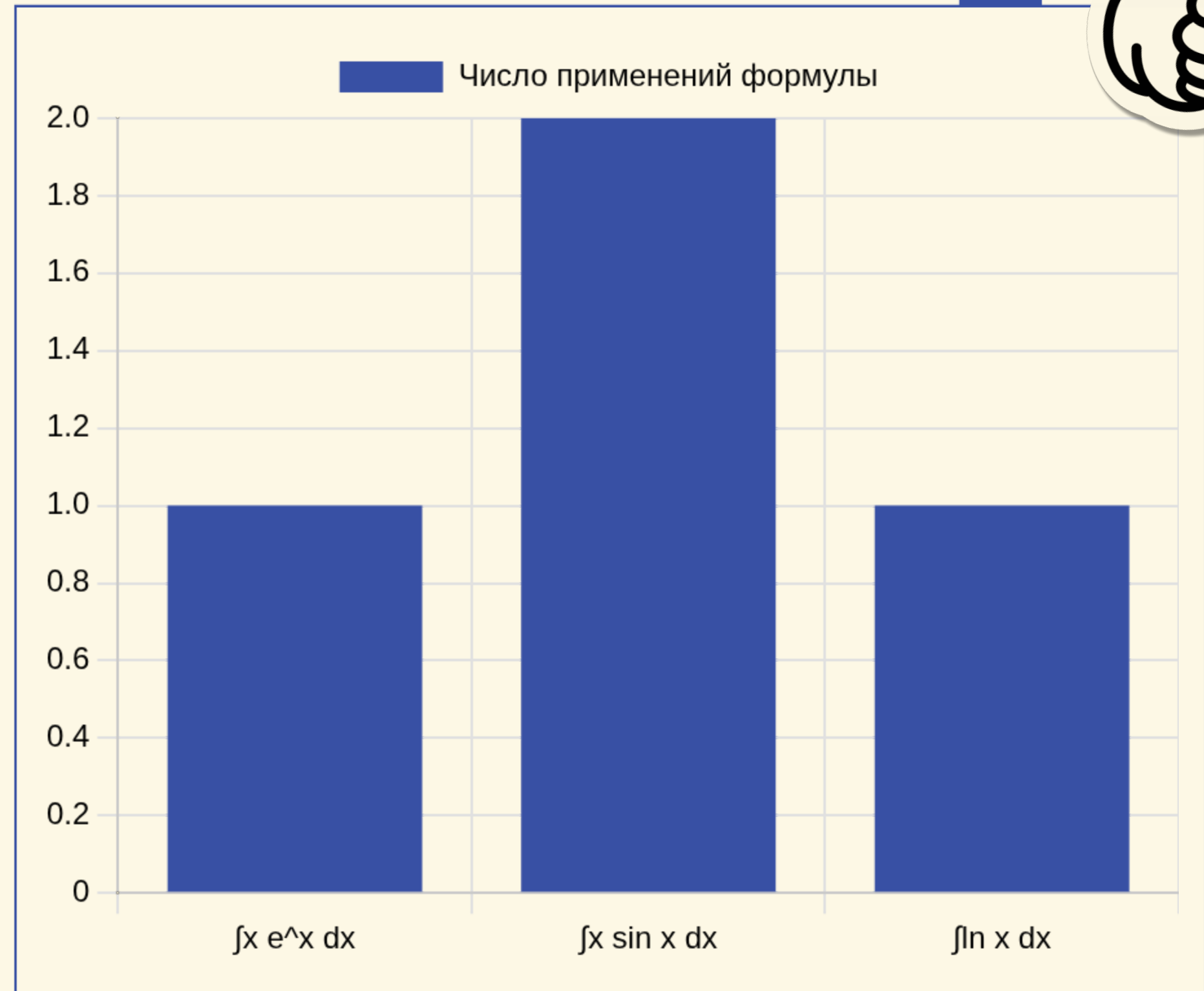
Результаты применения интегрирования по частям на типовых примерах



На диаграмме показано, что сложность задачи определяется не длиной записи, а тем, насколько удачно выделены функции u и dv .

Во всех примерах метод быстро сводит исходное выражение к стандартным интегралам; наибольшая трудоёмкость возникает там, где требуется повторное применение формулы.

Школьные примеры интегрирования по частям из курса алгебры и начал математического анализа



Частые ошибки при нахождении первообразных

Таблица показывает, какие промахи встречаются чаще всего, почему они возникают и какой ответ считается правильным.

Большинство ошибок связано не со сложностью вычислений, а с невнимательностью к формуле, знаку и обязательной константе.

Типовые ошибки из школьного курса алгебры и начал анализа

Ошибка	Причина	Правильно
Нет C	забыта константа	+C
$1/x$	ошибка в формуле	$\ln x +C$
$\sin x$	сбит знак	$-\cos x+C$
Замена	потерян коэффициент	учесть множитель

Применение первообразной в математике и физике

Восстановление функции

Если известна производная, первообразная позволяет вернуть исходную функцию. Это особенно важно, когда по частным характеристикам нужно получить целое описание процесса.

Движение тела

В задачах на движение по скорости находят путь, а по ускорению — скорость. Так первообразная связывает мгновенные изменения с итоговым результатом наблюдения.

Связь с геометрией

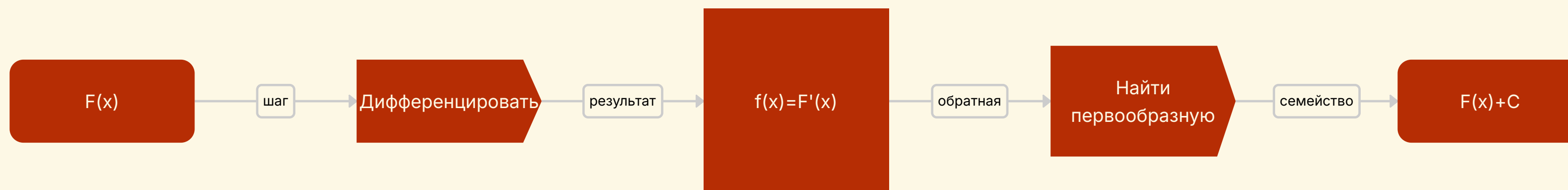
В геометрических задачах первообразная помогает переходить от локального поведения графика к его общей форме. Это облегчает анализ кривых и их параметров.

Подготовка к интегралу

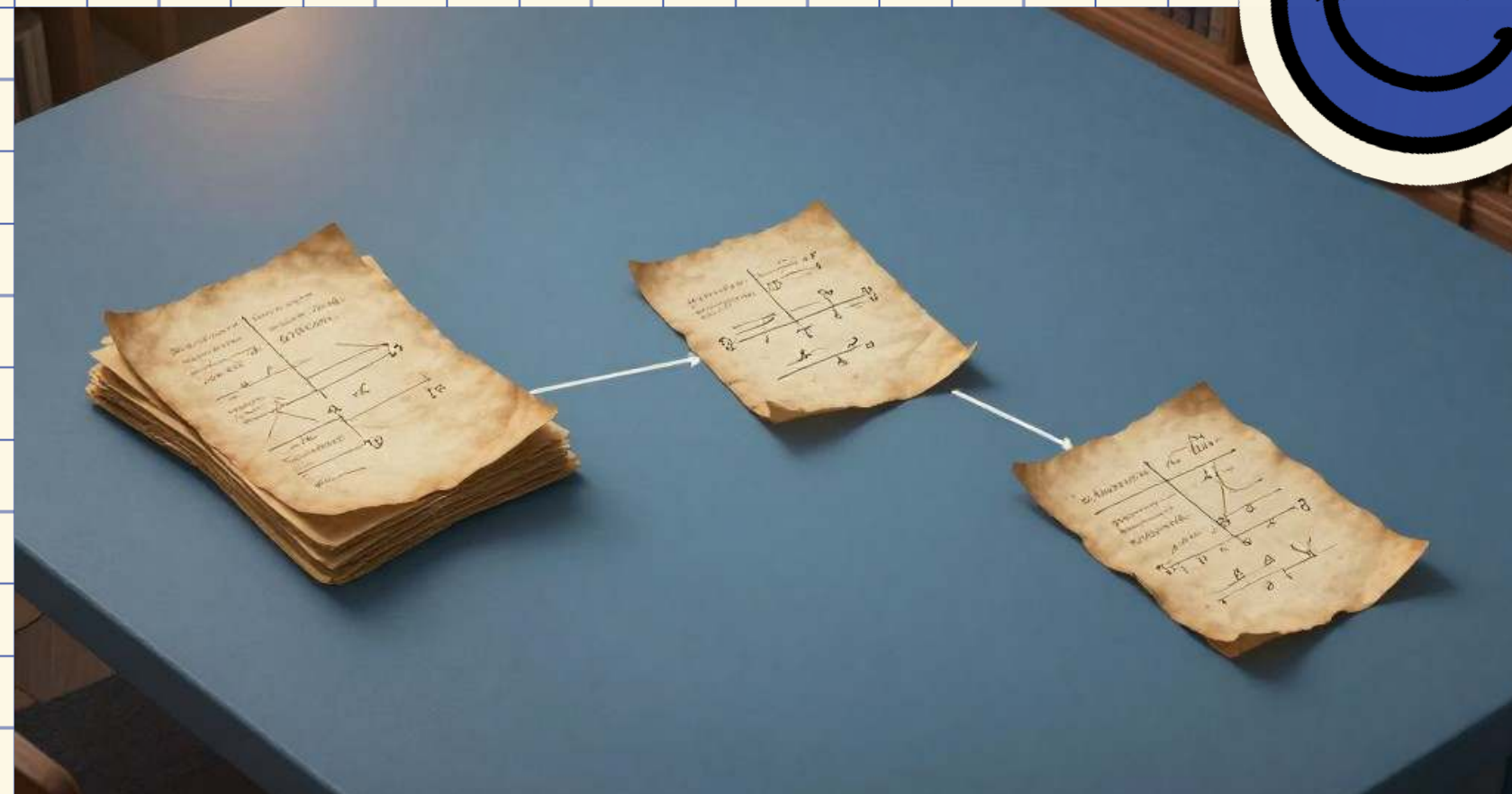
Тема напрямую ведёт к определённому интегралу, где уже считают накопленный эффект: площадь, работу, массу или пройденный путь по известному закону изменения.

От производной к семейству первообразных

Схема показывает, как одна производная задаёт бесконечное множество функций, отличающихся только постоянной.



От первых идей к строгому анализу



Ньютон и Лейбниц: разные пути к одной идее

В XVII веке Ньютон и Лейбниц независимо друг от друга связали производную и интеграл в единую картину. Их работы сделали возможным систематическое изучение изменения и восстановления функций. На иллюстрации их портреты можно расположить рядом, как символ общего открытия.

От открытия к современному языку математики

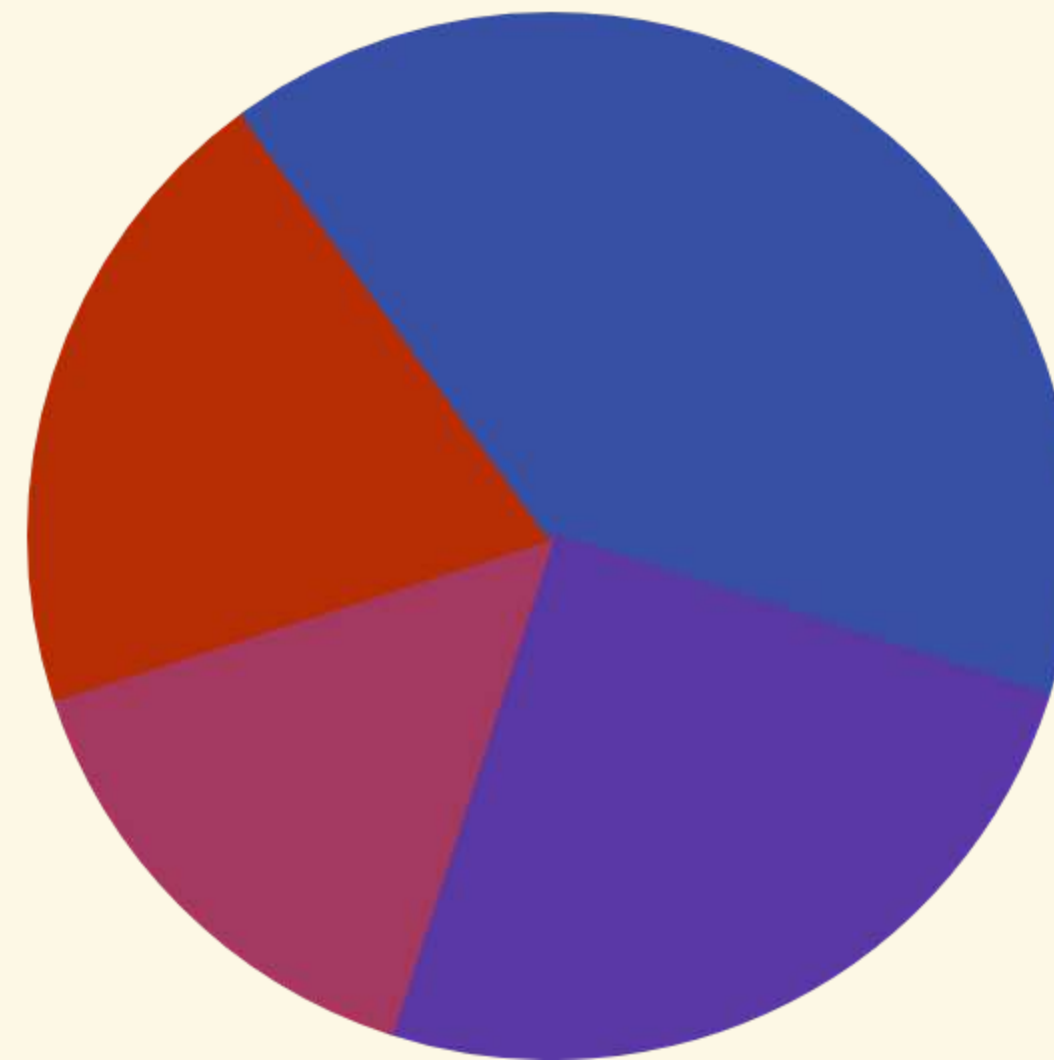
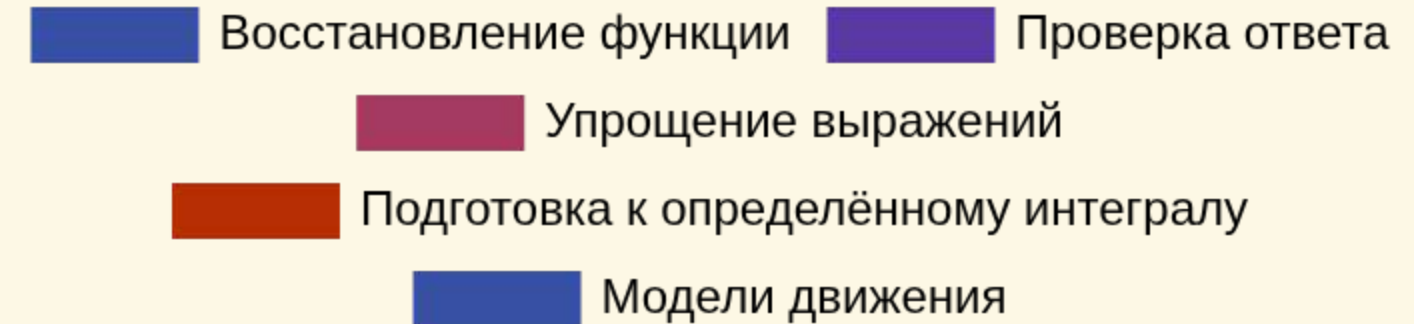
В XVIII–XIX веках идеи математического анализа получили более строгие доказательства, удобные обозначения и чёткую структуру правил. Краткая временная шкала рядом с портретами показывает, как интуитивная идея превратилась в раздел математики с точной терминологией.

Где чаще всего применяется неопределённый интеграл в школьных задачах

Диаграмма отражает не только частоту, но и учебную последовательность тем: сначала отрабатывается восстановление функции, затем переход к более содержательным прикладным задачам.

Наибольшая доля приходится на базовые упражнения, поэтому именно они формируют прочный навык; прикладные сюжеты закрепляют тему и подводят к следующему разделу.

Структура типовых школьных заданий по алгебре и началам математического анализа



3 шага

позволяют пройти путь
от распознавания
функции до проверки
результата без лишних
ошибок.

Такой алгоритм дисциплинирует решение:
сначала выбирают метод, затем вычисляют
первообразную, после чего обязательно
проверяют ответ дифференцированием.

*Обобщение стандартного школьного алгоритма
решения задач на первообразную*





Первообразная: от правила к пониманию

Первообразная показывает, как по производной восстановить исходную функцию, а неопределённый интеграл объединяет все такие функции в одно семейство. Эта тема формирует основу дальнейшего анализа.

