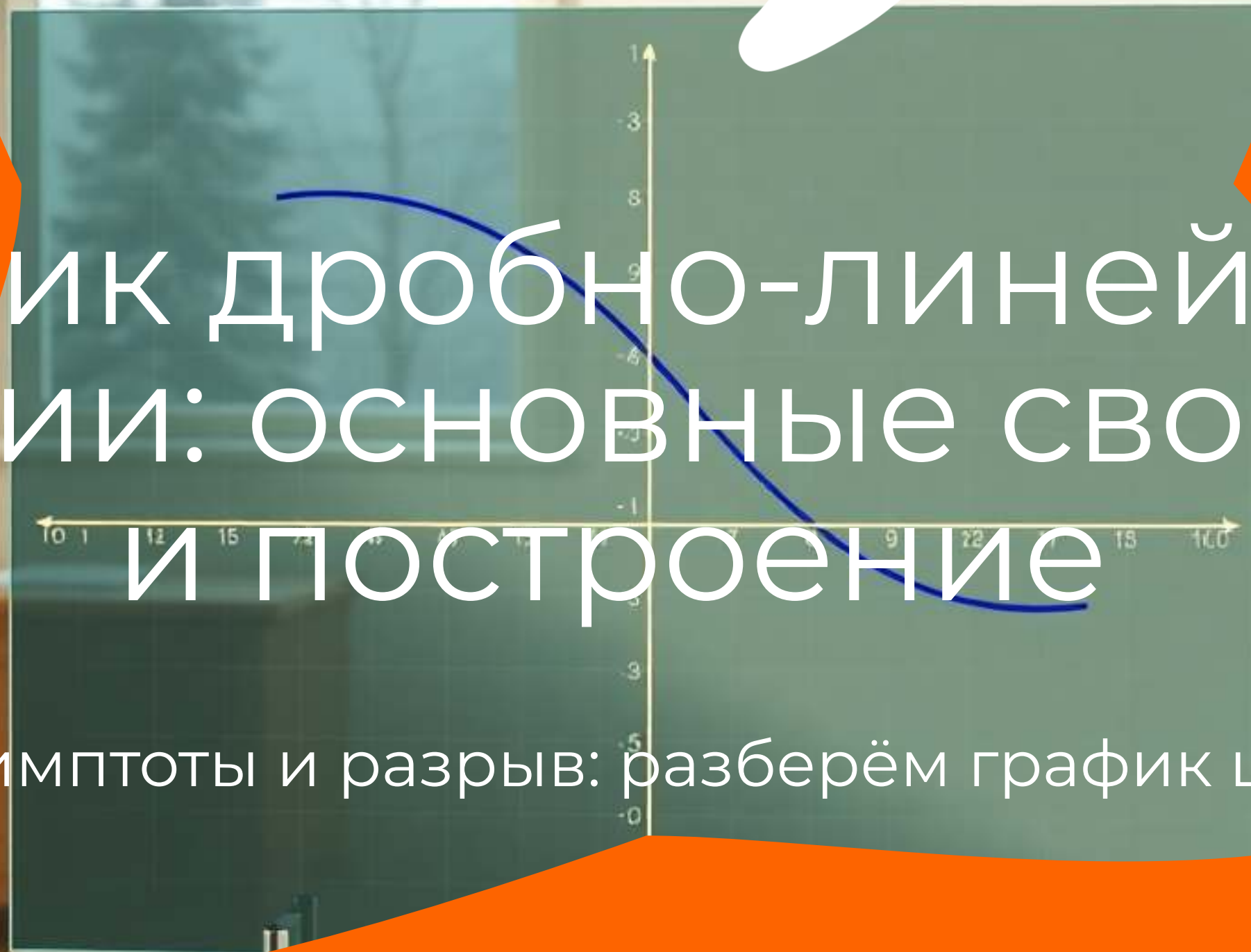


График дробно-линейной функции: основные свойства и построение

Две ветви, асимптоты и разрыв: разберём график шаг за шагом.



Зачем изучать дробно-линейные функции в 9 классе

Эта тема помогает понять, как деление влияет на формулу и на график. Здесь удобно повторить работу с дробями, нулём в знаменателе и чтение координатной плоскости.



A photograph of a room with a green chalkboard. A bright vertical light beam passes through the center of the chalkboard. Two curved, glowing light streaks, one blue and one orange, frame the chalkboard. The room has a wooden floor and a window on the left.

Общий вид функции и роль коэффициентов

Четыре коэффициента

01

Функция задаётся числами a , b , c и d . Они вместе определяют форму графика, его сдвиги и то, где появится разрыв.

Влияние a и c

02

Коэффициенты a и c сильнее всего заметны вдали от начала координат: они задают наклон ветвей и уровень, к которому график стремится.

Роль b и d

03

Числа b и d отвечают за смещение графика. Из-за них меняется положение точки разрыва и сдвигаются опорные элементы.

Почему график не исчезает

04

Если $ad - bc \neq 0$, функция не превращается в постоянную. Тогда график сохраняет две отдельные ветви и остаётся удобным для исследования.

Простейший пример: график функции $y=1/x$

Две ветви

График состоит из двух отдельных частей. Они лежат в первой и третьей четвертях и не соединяются между собой.

Асимптоты

Прямые $x=0$ и $y=0$ служат ориентирами для графика. К ним он приближается всё ближе, но не пересекает их.

Поведение около нуля

Чем ближе x к нулю, тем сильнее по модулю становятся значения функции. Поэтому ветви резко уходят вверх или вниз.



Область определения дробно-линейной функции

Шаг 1

Записываем знаменатель и выясняем, при каких x он обращается в ноль.

Шаг 3

Отмечаем точку разрыва на координатной плоскости и понимаем, что график не может через неё пройти.

Шаг 2

Находим запрещённое значение $x = -d/c$: именно оно не входит в область определения.

Шаг 4

Делаем вывод: ветви графика располагаются по разные стороны от разрыва и не соединяются.

Как коэффициенты меняют положение графика

На диаграмме видно, что изменение коэффициентов меняет уровень, к которому стремится график вдали от разрыва.

Даже небольшое изменение a и c заметно сдвигает горизонтальную асимптоту и меняет общий вид ветвей.



Значения вычислены по формуле $y=a/c$ для примеров функций.

Вертикальная асимптота



Граница приближения

Вертикальная асимптота показывает прямую, к которой график стремится, когда x подходит к точке разрыва с любой стороны.



Запрещённое значение

Для функции $y=(ax+b)/(cx+d)$ это прямая $x=-d/c$. В этой точке знаменатель равен нулю, поэтому значение функции не определено.



Резкий рост

Рядом с асимптотой значения функции быстро становятся очень большими по модулю. Поэтому ветви графика уходят вверх или вниз почти вертикально.



Основа построения

Сначала находят вертикальную асимптоту, а уже потом выбирают точки для рисунка. Так проще понять, где будут располагаться две ветви.

Горизонтальная асимптота

01

Когда она есть

Если степени числителя и знаменателя равны, у функции появляется горизонтальная асимптота. Для дробно-линейной функции она имеет вид $y=a/c$.

Что она показывает

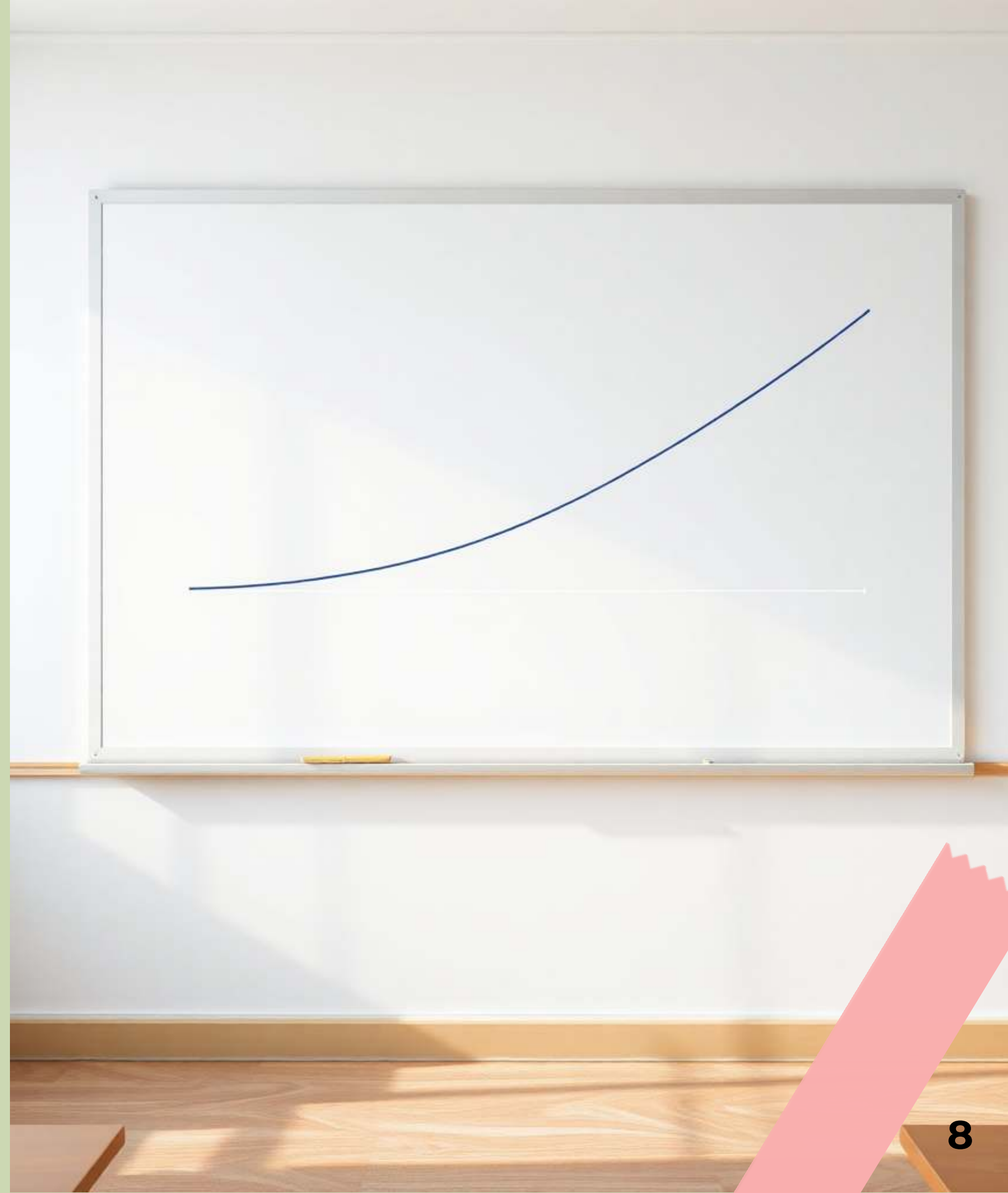
Эта прямая говорит, к какому числу стремится функция при очень больших положительных и отрицательных значениях x . График всё сильнее прижимается к ней.

02

Почему она полезна

03

Горизонтальная асимптота помогает сразу увидеть поведение графика вдали от разрыва и понять общую форму рисунка без лишних вычислений.



Элемент	Формула	Значение
Область определения	$x \neq -d/c$	Без разрыва
Вертикальная асимптота	$x = -d/c$	Точка разрыва
Горизонтальная асимптота	$y = a/c$	Уровень графика
Пересечение с Oy	$x = 0$	Точка на оси

Главные элементы графика и их формулы

Таблица помогает быстро увидеть, что нужно определить перед построением графика.

Сначала находят разрыв и асимптоты, затем отмечают опорные точки — так график строится быстрее и точнее.

Пересечения с осями координат

Ось Ox

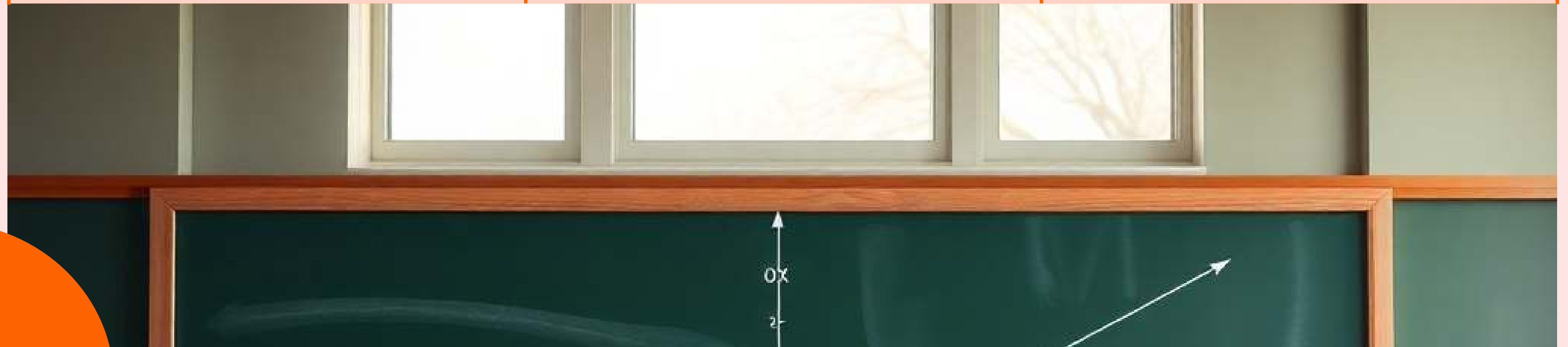
Чтобы найти точку пересечения с осью Ox , приравнивают числитель к нулю: $ax+b=0$. Это возможно, если $a \neq 0$, и даёт нуль функции.

Ось Oy

Для пересечения с осью Oy подставляют $x=0$. Тогда $y=b/d$, если $d \neq 0$. Полученная точка помогает точнее расположить ветви графика.

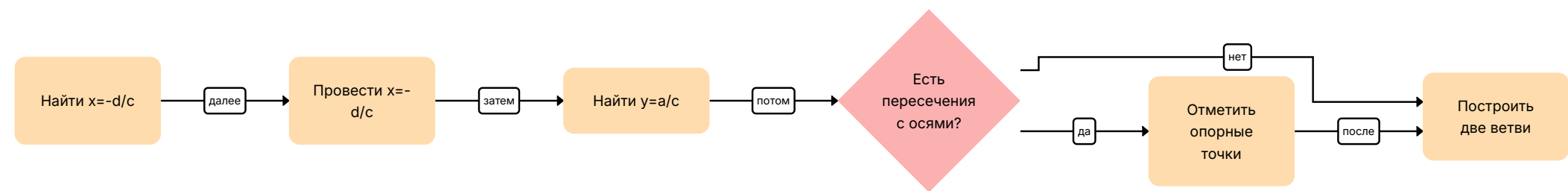
Зачем нужны эти точки

Пересечения с осями служат надёжными ориентирами. По ним легче проверить рисунок, увидеть направление ветвей и избежать ошибок при построении.



Построение графика шаг за шагом

Алгоритм работы с дробно-
линейной функцией вида $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

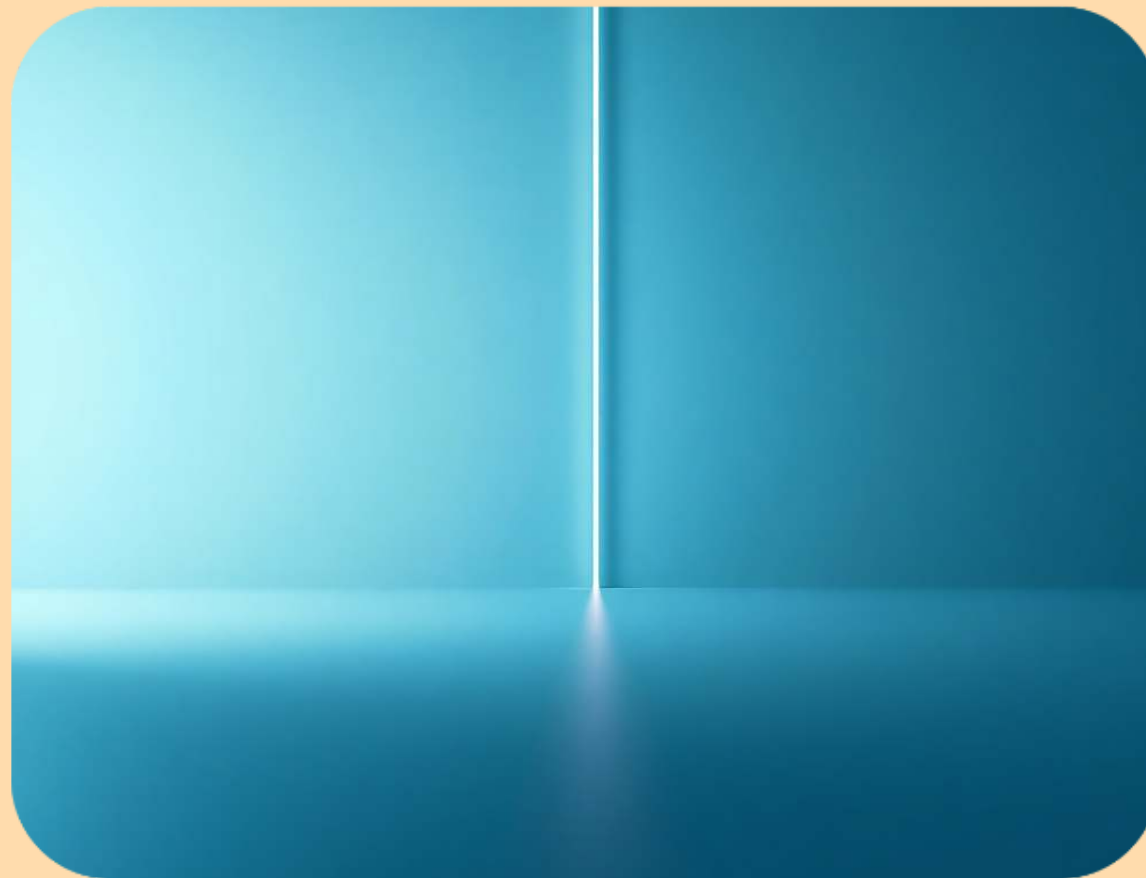


Как увидеть асимптоты в записи формулы



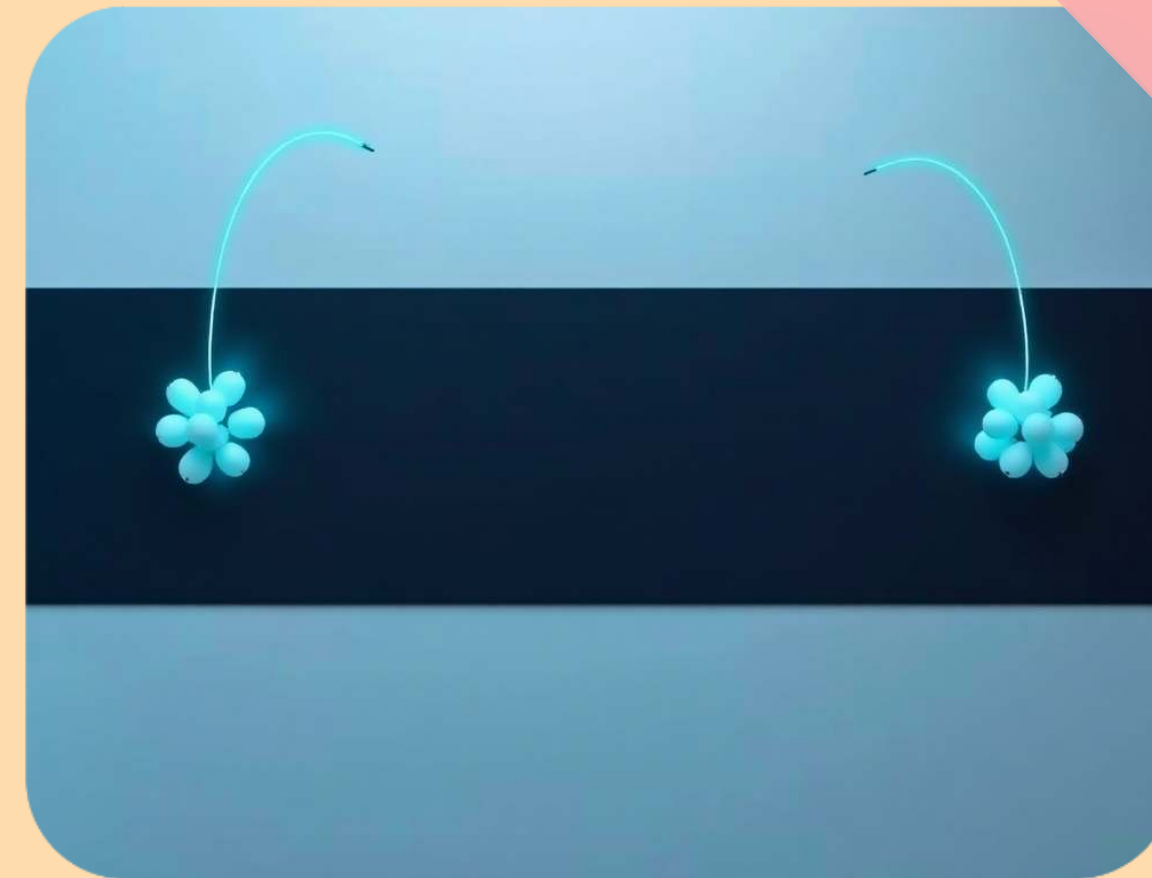
Сдвиг, который меняет картину

Если преобразовать дробь, удобно выделить постоянную часть и остаток. Тогда сразу видно, что одна прямая задаёт «уровень» графика, а другая отмечает место разрыва. Именно поэтому ветви располагаются отдельно и не сливаются в одну линию.



Почему график похож на гиперболу

После преобразования формулы заметно, что значение функции меняется неравномерно: около разрыва оно быстро растёт, а вдали от него почти не изменяется. Такое поведение напоминает гиперболу и помогает понять форму рисунка без долгих вычислений.



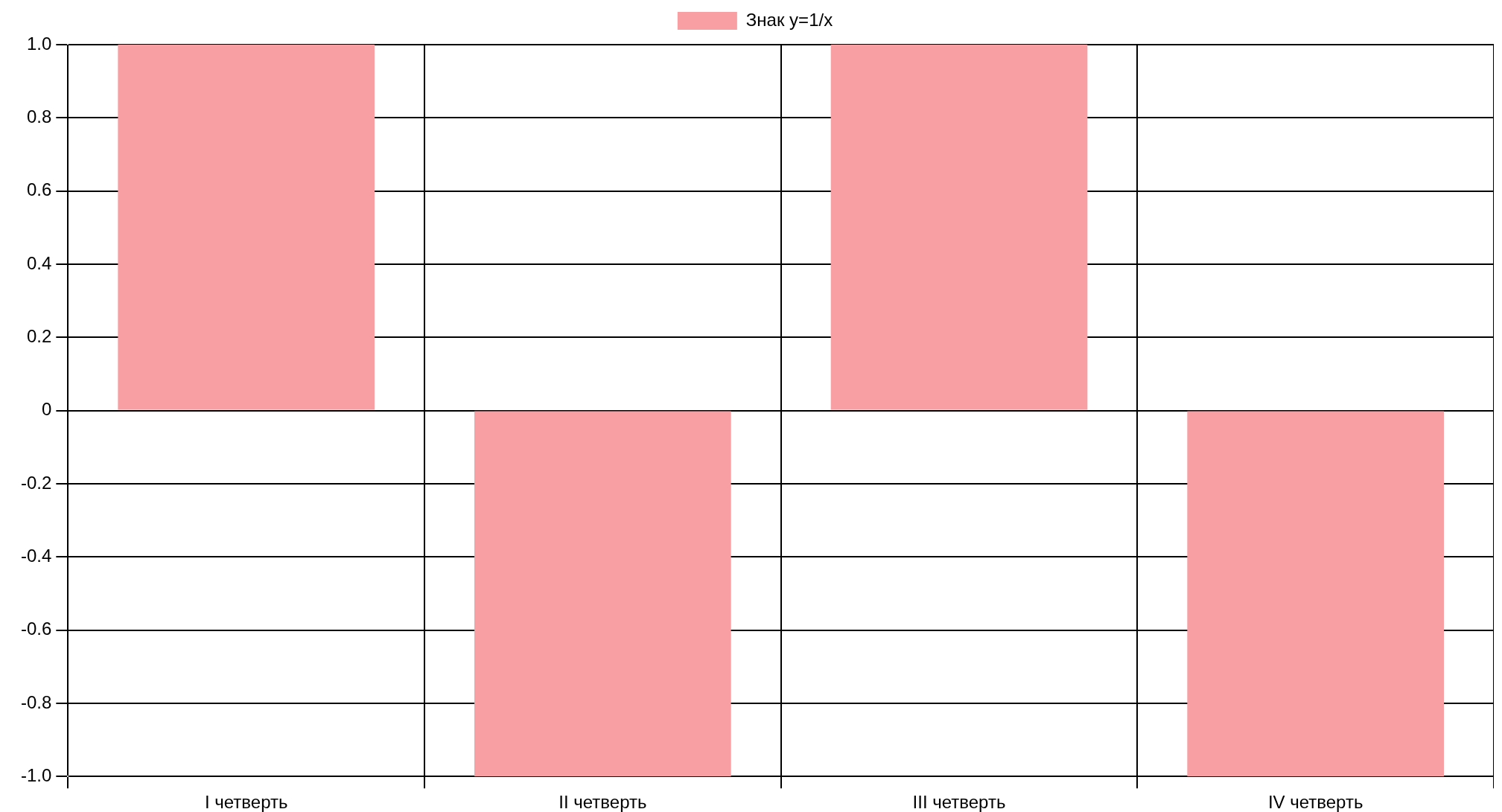
Удобный способ для построения

Когда асимптоты уже выделены, остаётся добавить несколько точек по обе стороны от разрыва. По ним легко проверить, куда направляются ветви, и получить аккуратный эскиз графика без лишних проб и ошибок.

Знаки функции на разных промежутках

Знак функции меняется при переходе через оси координат, а в точке разрыва значение не определено.

Для $y=1/x$ положительные значения лежат в I и III четвертях, отрицательные — во II и IV.



Учебный пример: $y=1/x$

180°

поворот вокруг этой точки
переводит одну ветвь
в другую

Центр симметрии показывает, что обе ветви устроены одинаково, только расположены по разные стороны от точки пересечения асимптот.

Свойство графика дробно-линейной функции

Типичные ошибки при изучении графика

Не убирают запрещённое значение

01

Если не исключить $x = -d/c$ из области определения, можно ошибочно считать, что график проходит через точку разрыва. На самом деле там функция не существует, и ветви не соединяются.

Рисуют без разрыва

03

Иногда дробно-линейную функцию изображают как непрерывную линию, хотя у неё две отдельные ветви. Это скрывает главное свойство графика и делает построение неверным.

Путают асимптоты и точки пересечения

02

Асимптота только показывает направление приближения, но не является обычной точкой графика. Пересечения с осями нужно находить отдельно по формулам, а не угадывать по рисунку.

Ждут начало координат

04

Не каждая такая функция проходит через точку $(0; 0)$. Пересечение с осями зависит от коэффициентов, поэтому его всегда нужно проверять вычислением.

Примеры дробно-линейных функций

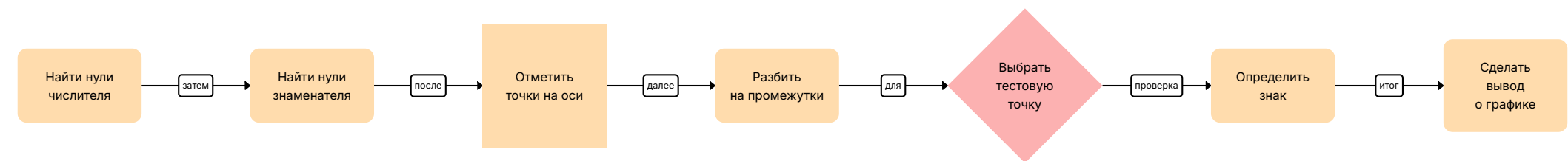
Сравнение показывает, как коэффициенты меняют асимптоты и положение одной опорной точки.

Сдвиг знаменателя меняет вертикальную асимптоту, а отношение старших коэффициентов определяет горизонтальное приближение.

Функция	Асимптоты	Точка
$y=1/x$	$x=0; y=0$	$(1; 1)$
$y=2/(x-1)$	$x=1; y=0$	$(2; 2)$
$y=(x+2)/(x-3)$	$x=3; y=1$	$(1; -1.5)$

Как определить знак функции на промежутках

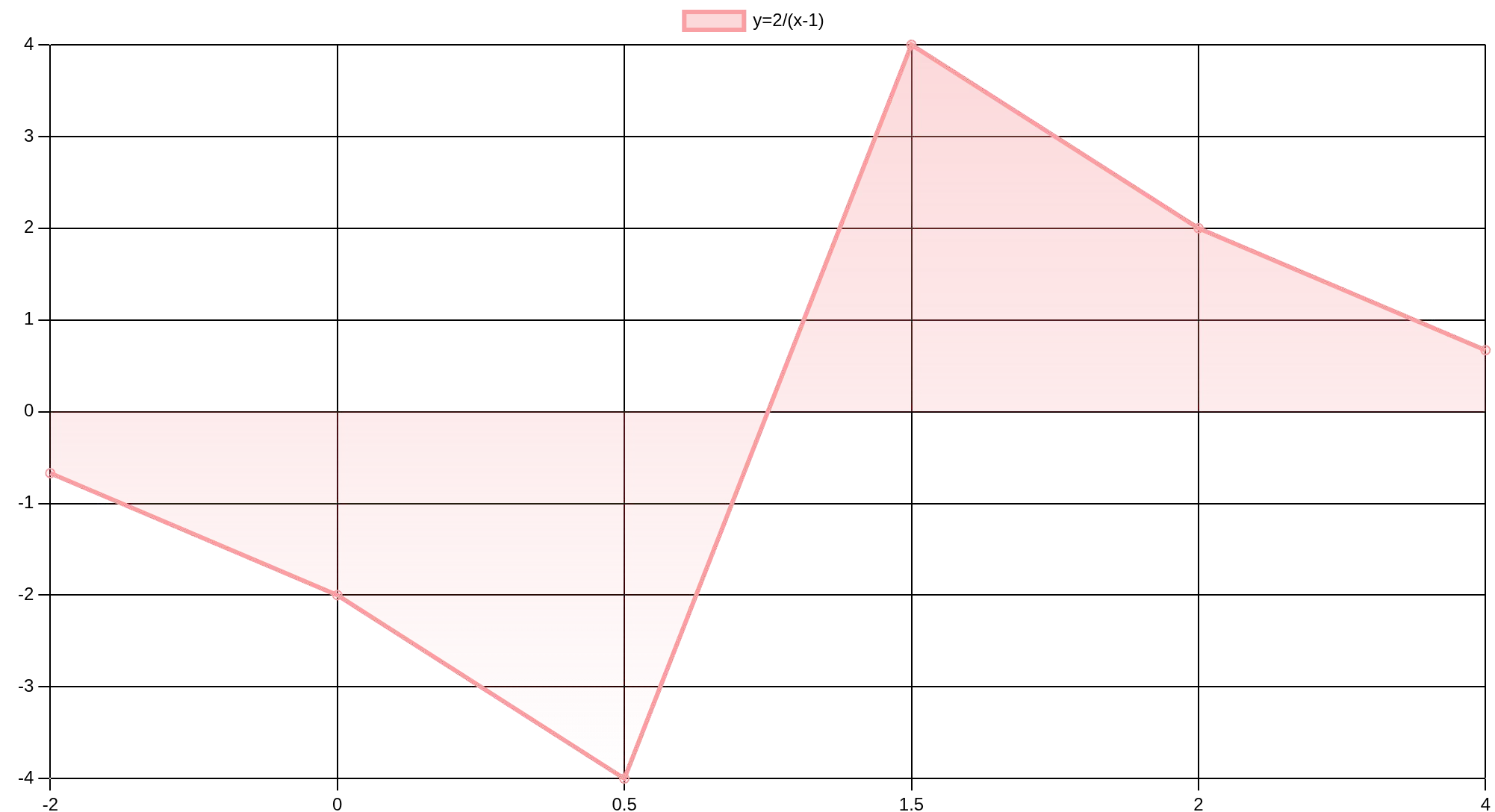
Алгоритм исследования знака
дробно-линейной функции
по числовой прямой



Поведение функции около асимптот и вдали от разрыва

Близко к $x=1$ значения резко меняются, а при больших $|x|$ график постепенно выравнивается и приближается к оси Ox .

Около вертикальной асимптоты функция ведёт себя резко, а вдали от неё становится почти горизонтальной.



Иллюстративные вычисления для $y=2/(x-1)$

Как тема связывает разные разделы алгебры

Рациональные выражения

Сначала ученики вспоминают дроби с буквами и правило: знаменатель не должен обращаться в ноль. Это помогает понять, почему у функции появляется разрыв.

Преобразование формул

Затем дробно-линейную запись приводят к более удобному виду. Так легче увидеть асимптоты и связь между коэффициентами и графиком.

Графики функций

После этого формула переводится в рисунок на координатной плоскости. Ученики учатся читать график по ключевым точкам и по направлению ветвей.

Новые задачи

В конце тема помогает решать практические примеры на пропорции и зависимость величин. Здесь важно уже не только вычисление, но и понимание формы графика.

Что нужно запомнить о графике дробно-линейной функции

Главное — найти разрыв, провести асимптоты и проверить несколько точек. Тогда график легко читается: две ветви, понятное направление и связь формулы с рисунком.