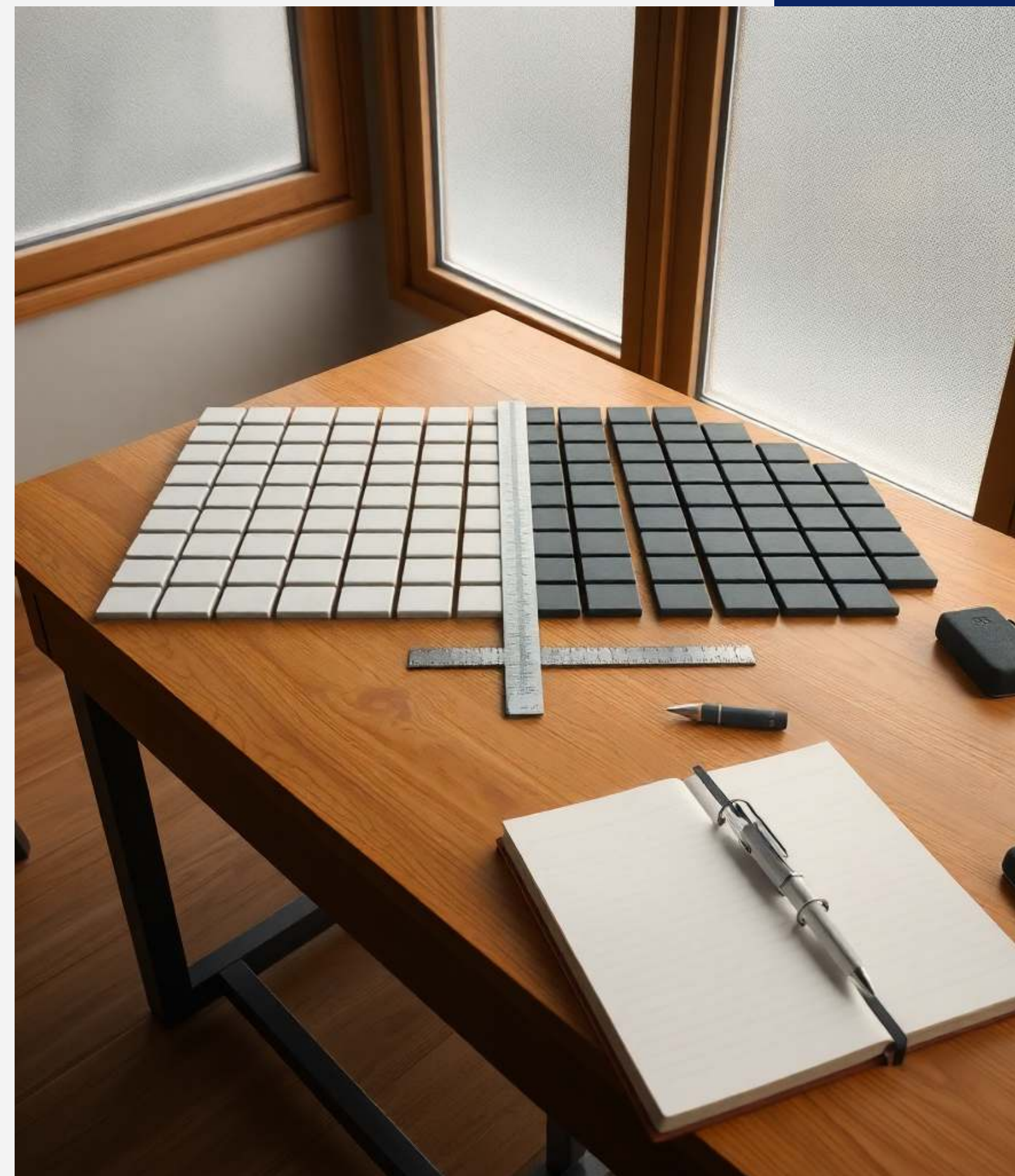


Доказательство неравенств с несколькими переменными

Симметрия, квадраты и строгая логика
доказательства.



Зачем это нужно в 11 классе



Такие неравенства встречаются в сложных задачах, контрольных и ЕГЭ. Они учат сравнивать суммы, произведения и квадраты, а также находить экстремальные значения выражений и проверять, когда достигается равенство.

Базовые формы, которые нужно узнавать

Неравенство между суммой и корнем

Форма $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ при $x \geq 0$ и $y \geq 0$ часто служит готовой оценкой. Она полезна, когда нужно связать сумму двух неотрицательных величин с их произведением.

Квадрат разности

Запись $(x-y)^2 \geq 0$ — одно из самых универсальных тождеств. Ее используют и как самостоятельное доказательство, и как промежуточный шаг для преобразования более сложных выражений.

Три переменные

Оценка $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ часто появляется в симметричных задачах. Она сразу показывает, что разность можно представить через сумму квадратов и определить случаи равенства.

Область допустимых значений

Для дробей, корней и степеней нельзя начинать доказательство без проверки ОДЗ. Иначе даже верное преобразование может стать некорректным и привести к ошибке в ответе.

Симметрия как подсказка к решению

Равные роли переменных

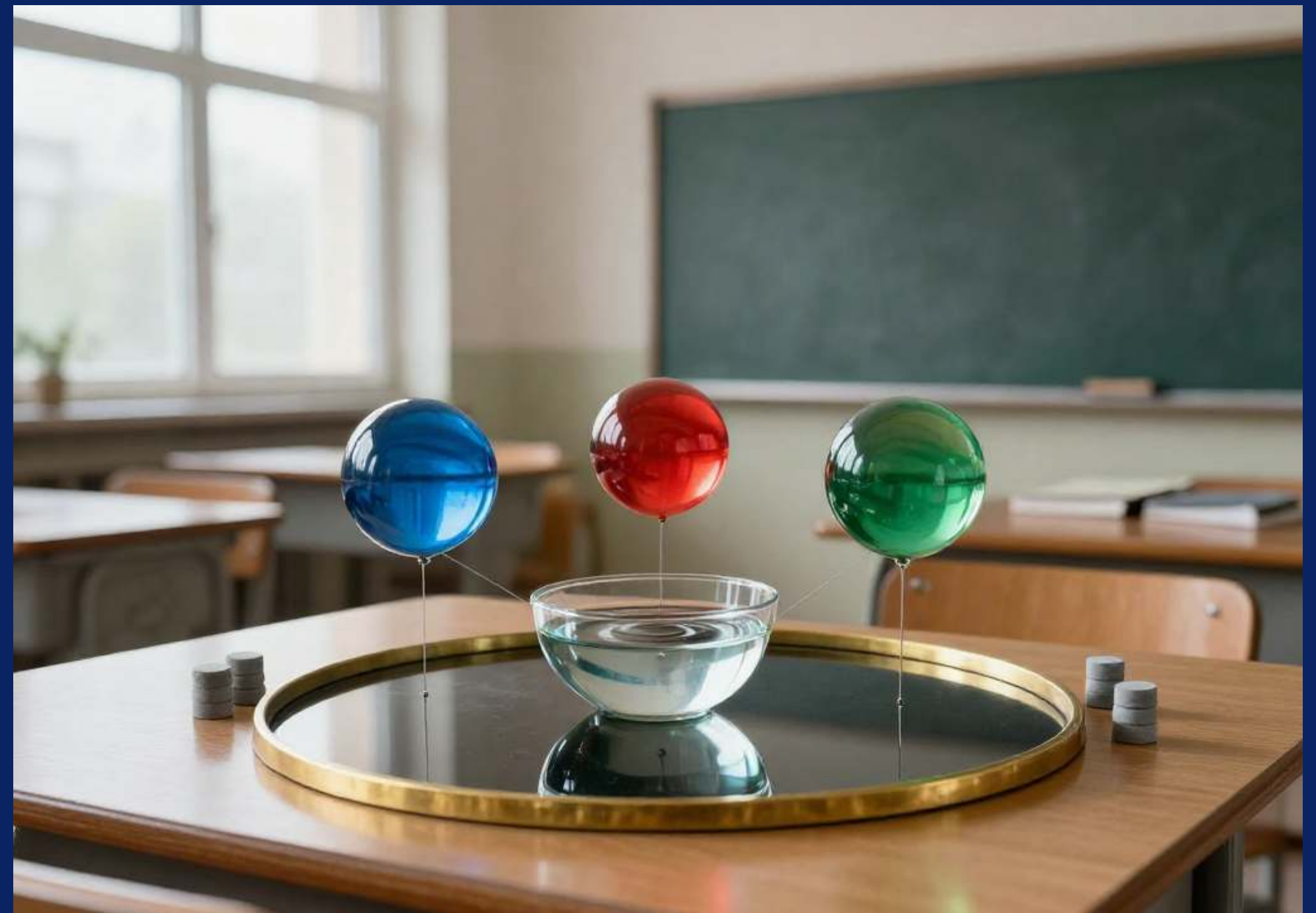
Если выражение не меняется при перестановке x , y и z , значит, переменные входят в него на равных правах. Это помогает искать одинаковые приемы для всех частей выражения.

Удобные подстановки

В симметричных задачах часто полезно рассмотреть равные значения переменных или близкие по смыслу замены. Такой прием позволяет увидеть структуру неравенства и упростить вычисления.

Усреднение значений

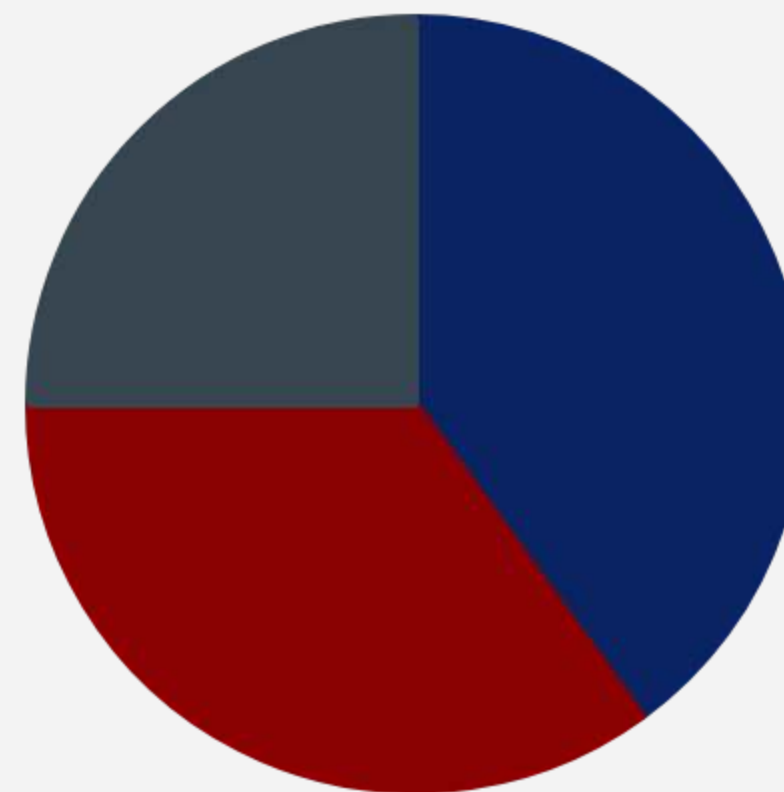
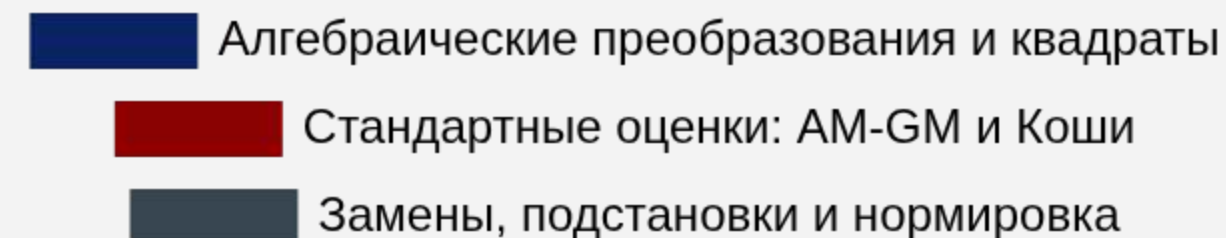
Когда выражение симметрично, иногда выгодно заменить разные величины средним или рассмотреть случай равенства. Это не доказывает неравенство само по себе, но часто подсказывает правильный путь.



Основные методы доказательства в школьных задачах

Диаграмма отражает не частоту тем, а практическую полезность приемов: от преобразований к готовым оценкам и затем к замене переменных.

Наиболее универсальны алгебраические преобразования; стандартные неравенства дают быстрые оценки, а замены особенно полезны в задачах с симметрией и однородностью.



Обобщение по школьным задачам алгебры 11 класса,
без числовой статистики

Метод выделения квадратов

01. Перенос в одну сторону

Сначала разность между левой и правой частями записывают в одной части неравенства. Это позволяет увидеть, можно ли представить выражение как сумму неотрицательных слагаемых.

02. Поиск квадратов

Далее выражение стараются разложить на квадраты разностей. В симметричных задачах это особенно удобно, потому что каждый квадрат сразу дает неотрицательность без дополнительных рассуждений.

03. Готовое тождество

Например, $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx = \frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$. Такая запись мгновенно показывает знак выражения и помогает избежать лишних вычислений.

04. Условия равенства

После разложения легко определить, когда все слагаемые обращаются в ноль. Обычно это происходит при $x=y=z$ или при другом наборе равных значений, заданном структурой задачи.

Алгоритм доказательства неравенства

Последовательность шагов, которую удобно применять в школьных задачах.



Сравнение основных приемов

Прием	Когда применять
Квадраты	Симметрия, разность
AM-GM	Положительные величины
Коши–Буняковский	Суммы и произведения
Замена	Сложная форма
Нормировка	Однородность

Школьные методы доказательства неравенств

Краткое сопоставление помогает быстрее выбирать метод в зависимости от структуры выражения и условий задачи.

Метод выбирают по виду выражения: для симметрии удобны квадраты, для положительных величин — AM-GM, а для однородных задач — нормировка.

Неравенство АМ–GM в задачах с несколькими переменными

■ Базовая идея

Для неотрицательных чисел среднее арифметическое не меньше среднего геометрического. Это позволяет связывать сумму и произведение, когда в задаче все величины положительны.

■ Обобщение на несколько чисел

Для набора $a_1, a_2, \dots, a_n$ действует общая форма неравенства. В школьных задачах она часто используется как готовая оценка без сложных преобразований.

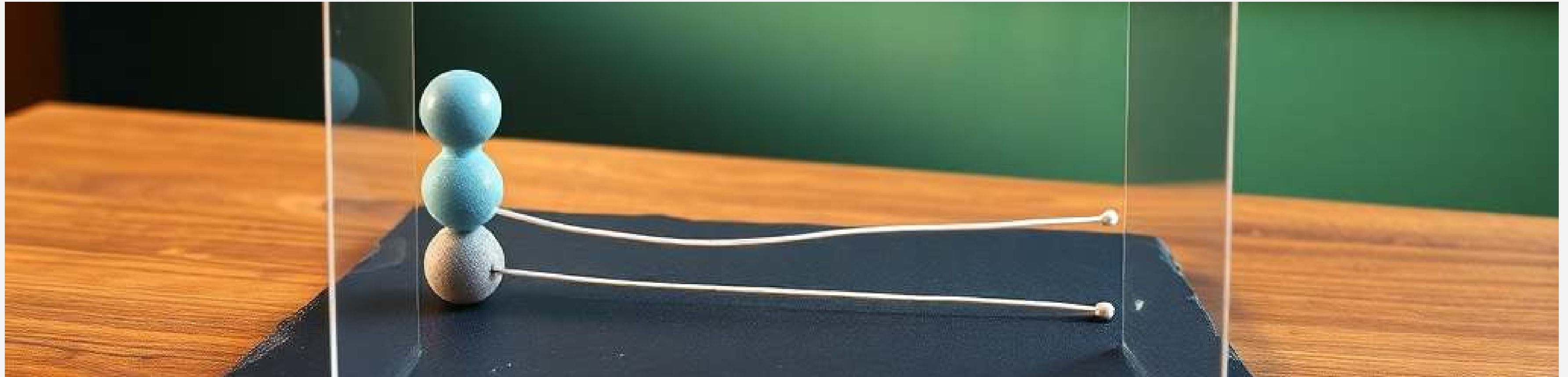
■ Практическая польза

АМ–GM особенно удобно, если в выражении много одинаково устроенных слагаемых. Тогда сумму можно заменить более простой оценкой и быстро получить нужное неравенство.

■ Когда есть равенство

Равенство достигается только тогда, когда все сравниваемые числа равны. Это условие важно проверять отдельно, чтобы не потерять точность ответа.

Геометрический смысл неравенств



Расстояние и знак

Выражение $(x-y)^2 \geq 0$ можно понимать как утверждение о расстоянии между значениями x и y . Расстояние не бывает отрицательным, поэтому знак неравенства очевиден.

Точки на плоскости

Многие оценки удобно представлять через координатную плоскость: переменные становятся точками, а неравенство описывает область, где выражение неотрицательно или ограничено снизу.

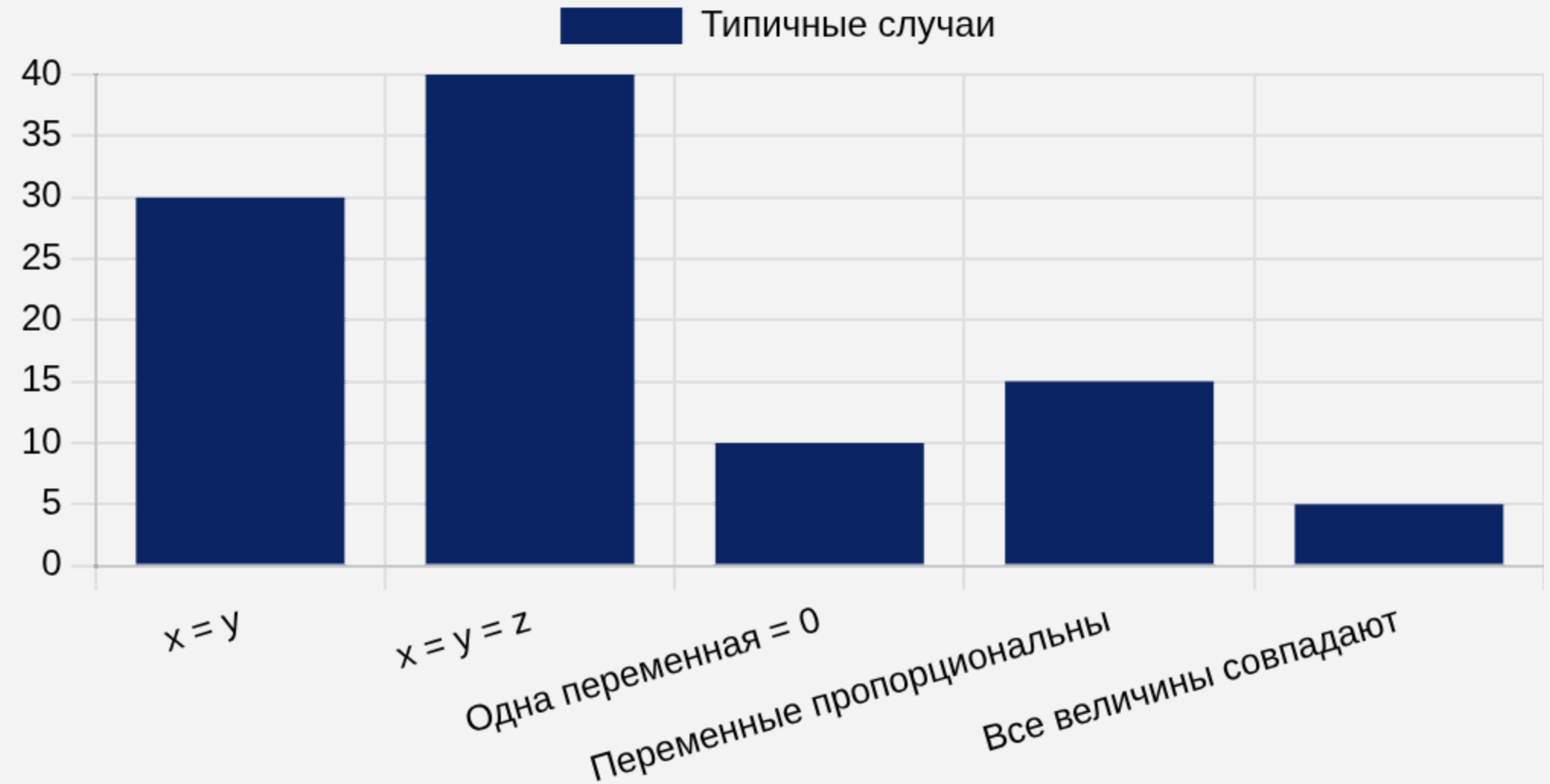
Переход к квадратам

Геометрическая интуиция помогает увидеть, почему квадрат всегда неотрицателен и почему сумма квадратов часто дает надежное доказательство. Это делает алгебраический вывод более наглядным.

Когда чаще всего возникает равенство

В симметричных задачах равенство обычно связано с совпадением переменных или вырождением одного множителя.

Чаще всего равенство возникает при полной симметрии или при нулевом множителе, поэтому эти случаи нужно проверять в первую очередь.



Обобщение по типовым школьным задачам;
иллюстративная оценка

Как работает нормировка в однородных неравенствах

1. Выявить однородность

Сначала проверяют, сохраняет ли неравенство вид при одинаковом масштабировании переменных. Это помогает понять, можно ли убрать лишнюю свободу выбора.

3. Решить и вернуть смысл

После упрощения получают оценку в одной удобной форме, а затем проверяют, при каких значениях достигается равенство и не нарушены ли исходные ограничения.

2. Ввести удобное условие

Затем выбирают нормировку, например $x+y+z=1$ или $xz=1$, если она согласуется с условием задачи. Так выражение становится короче и нагляднее.

Типовые преобразования, которые упрощают доказательство

Короткие преобразования часто делают знак выражения очевидным и сохраняют равносильность.

Наиболее полезны те преобразования, которые одновременно упрощают форму и сохраняют возможность строго оценить знак выражения.

Преобразование	Пример	Результат
Перенос вправо-влево	$A-B$	Разность
Группировка попарно	x^2-y^2	Множители
Переход к квадратам	$(x-y)^2$	Неотрицательно
Замена переменных	$x=a/b$	Проще вид

Школьные методы преобразования алгебраических неравенств

Стандартные неравенства как готовые инструменты

01. Коши–Буняковский

Это неравенство удобно, когда в выражении есть суммы квадратов и произведения. Оно позволяет связать отдельные слагаемые в общую оценку без громоздких вычислений.

02. АМ–GM

Среднее арифметическое и среднее геометрическое особенно полезны для положительных чисел. При правильной записи оно быстро переводит сумму в произведение или наоборот.

03. Квадрат разности

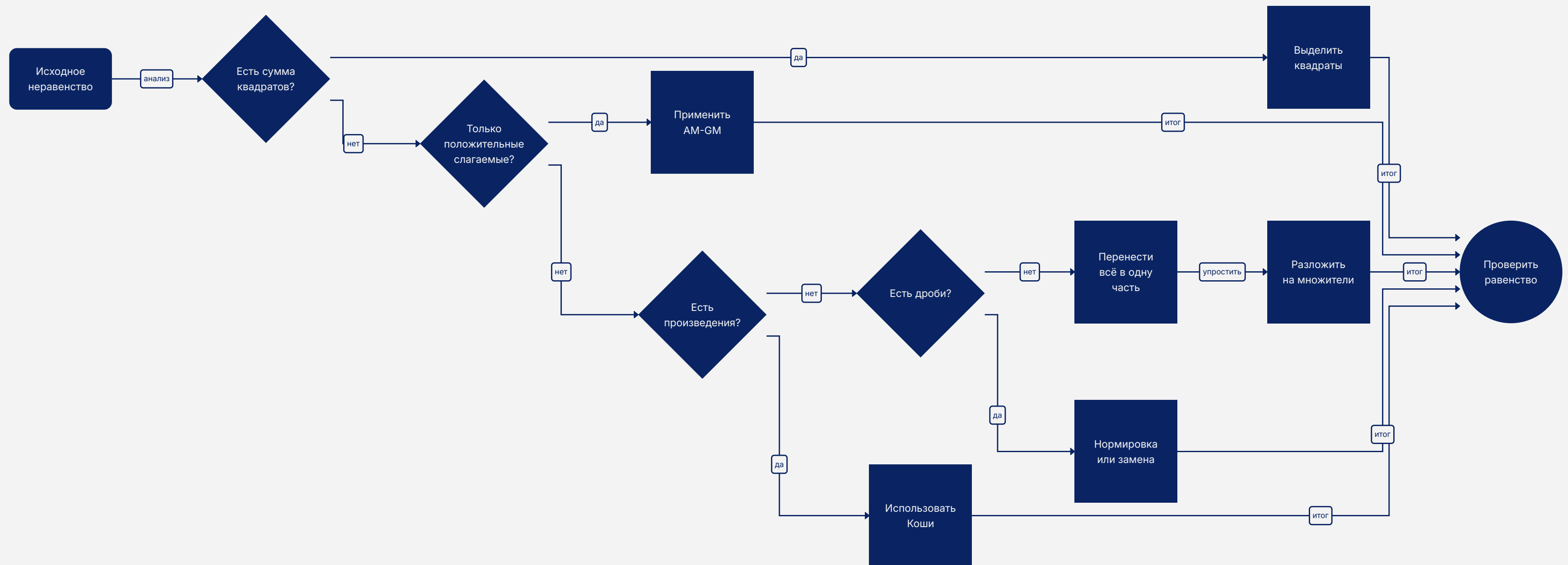
Запись вида $(x-y)^2 \geq 0$ кажется простой, но именно она чаще всего задаёт старт доказательства. Через неё легко получить оценку разности и проверить равенство.

04. После приведения к форме

Стандартные неравенства работают лучше всего тогда, когда выражение уже приведено к нужному виду. Поэтому сначала важно выделить структуру, а потом выбирать инструмент.

Выбор метода по структуре выражения

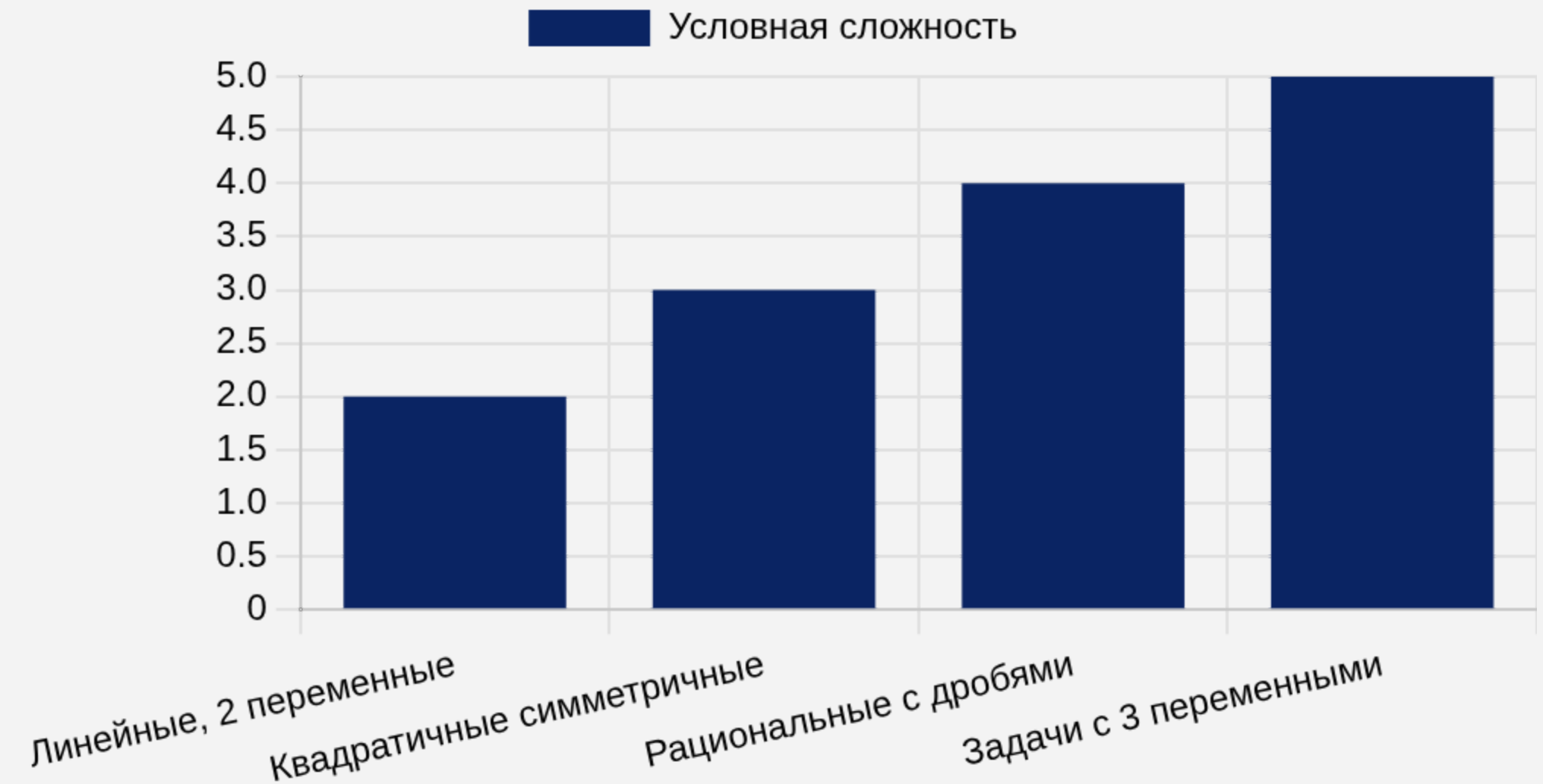
Схема показывает, как форма выражения подсказывает наиболее надёжный приём доказательства.



Сравнение сложности школьных задач

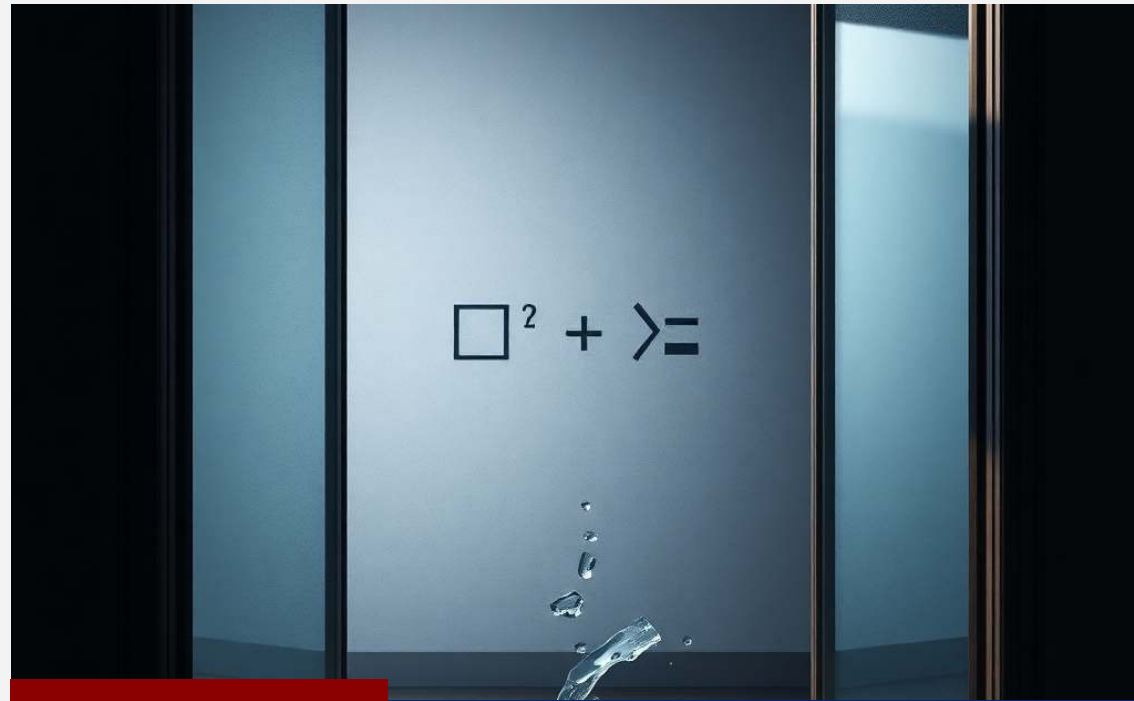
Чем больше ограничений и дополнительных условий, тем важнее заранее выбрать правильный метод преобразования.

Сложность возрастает не только из-за числа переменных, но и из-за необходимости следить за областью допустимых значений и знаками.



Сопоставление типовых задач школьного курса алгебры;
условная шкала сложности

Как ошибки мешают доказательству



Пропущенная область допустимых значений

Иногда решение начинают сразу с преобразований, забывая про дроби и корни. Тогда легко получить формально верную цепочку, которая на самом деле не подходит исходному выражению, поскольку часть значений просто запрещена.



Опасное умножение на неизвестный знак

Если умножить неравенство на выражение без проверки его знака, направление знака может измениться незаметно. Особенно часто это случается в задачах с дробями, где знак знаменателя влияет на весь ход рассуждения.



Замена без сохранения равносильности

Неудачная подстановка иногда упрощает запись, но разрушает связь с исходной задачей. Поэтому каждую замену нужно проверять: сохраняет ли она все ограничения, и можно ли после неё однозначно вернуться к исходным переменным.

Полный пример доказательства

■ Перенести в одну часть

Рассмотрим разность $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$.
Если показать, что она неотрицательна, исходное неравенство сразу будет доказано без дополнительных оценок.

■ Представить через квадраты

Используем тождество $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=\frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$. Каждое слагаемое справа неотрицательно, поэтому вся сумма не может быть отрицательной.

■ Сделать вывод о знаке

Из полученной записи следует, что $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$ для любых неотрицательных x, y, z . Знак разности очевиден уже из структуры преобразования.

■ Проверить равенство

Равенство возможно только тогда, когда все три квадрата обращаются в ноль одновременно. Это происходит при $x=y=z$, что и задаёт условие точного равенства.

Итоговая карта методов

Структура выражения почти всегда подсказывает, с какого преобразования начать доказательство.

Самые надёжные решения появляются тогда, когда прием выбирают по форме выражения, а не по привычке.



Обобщающая схема школьных приёмов доказательства неравенств

Что важно запомнить о неравенствах с несколькими переменными

Успех в таких задачах зависит от трёх вещей: видеть структуру выражения, соблюдать область допустимых значений и проверять условия равенства. Именно это делает доказательство строгим и убедительным.