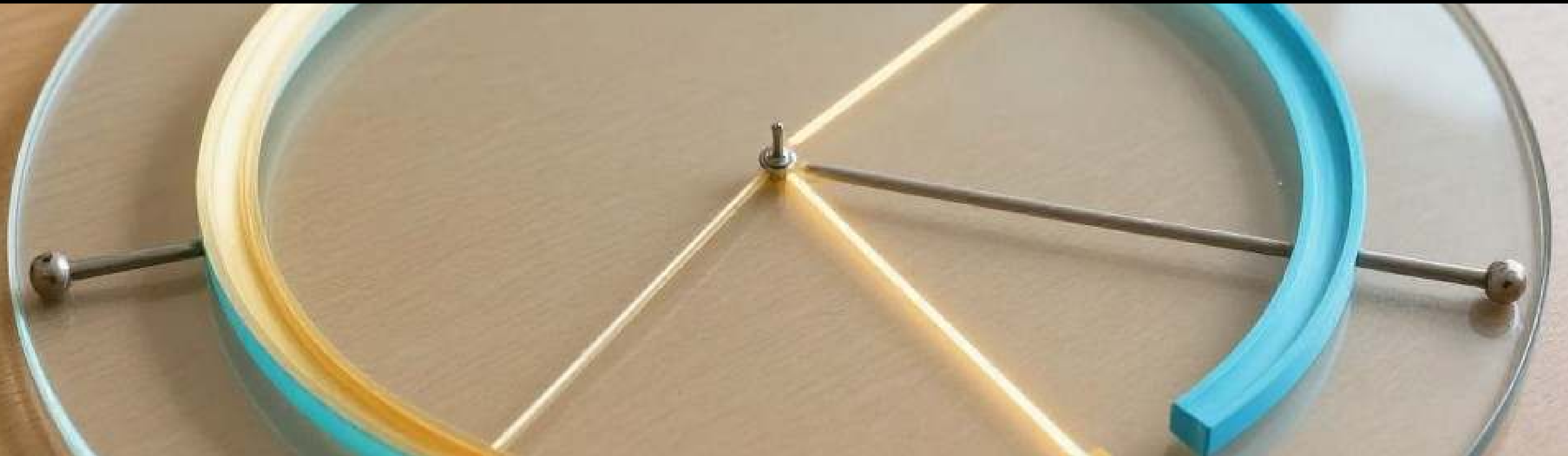


# Центральные и вписанные углы: основная идея темы

Окружность связывает дуги, хорды и углы: узнаём величины и решаем задачи уверенно.



# Почему эту тему проходят именно в 8 классе

В 8 классе геометрия становится более «задачной»: учатся вычислять неизвестные углы и доказывать равенство с опорой на окружность. Центральные и вписанные углы помогают в задачах с диаметром, хордой, дугой и вписанным треугольником — и встречаются в простых реальных объектах, например в колёсах и часах.



# 120°

**Если дуга равна 120°, то  
центральный угол,  
стягивающий эту дугу,  
тоже равен 120°.**

Центральный угол имеет вершину в центре окружности. Его стороны — радиусы, направленные к точкам на окружности. Такой угол стягивает соответствующую дугу. Мера центрального угла всегда равна мере дуги.

*Свойства окружности (школьная геометрия).*

# Что называют вписанным углом

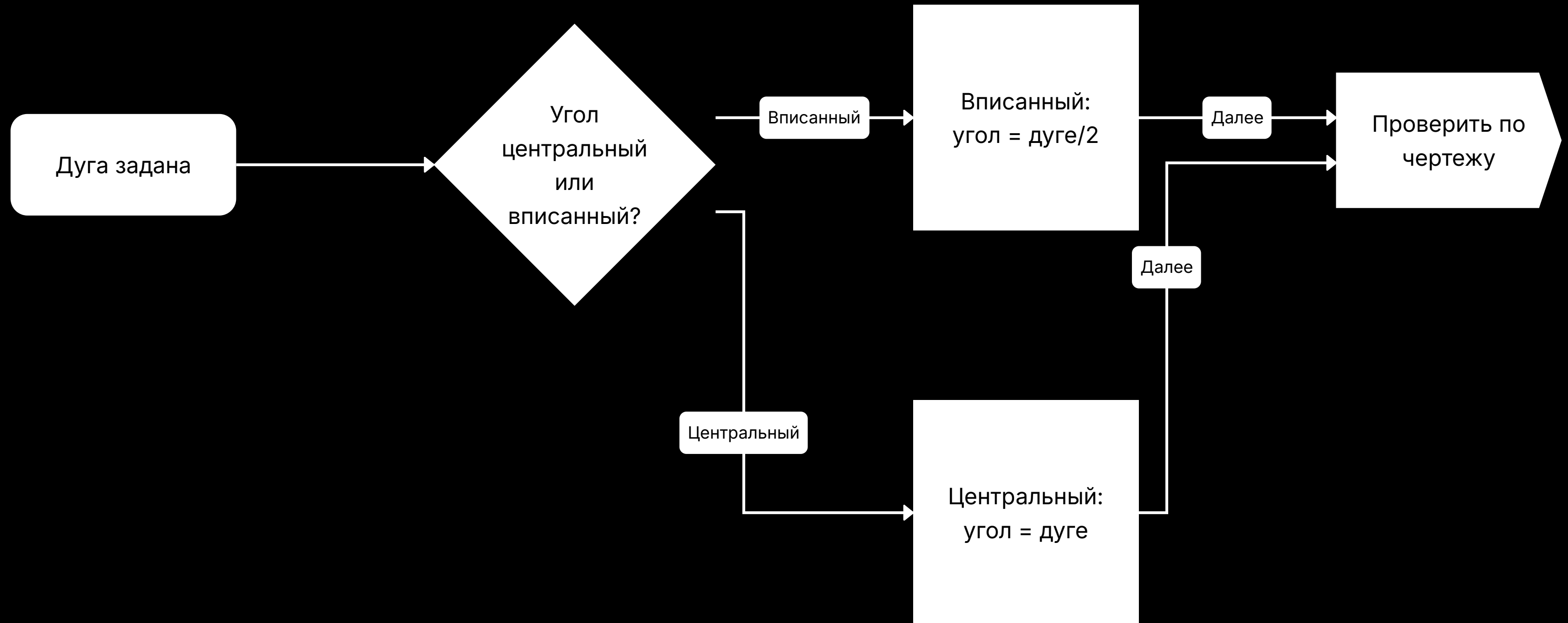
Вписанный угол имеет вершину на окружности. Его стороны — хорды, то есть отрезки, соединяющие точки окружности. Угол стягивает дугу, лежащую внутри угла.

Эта дуга не должна содержать вершину вписанного угла: иначе связь нарушается. Поэтому важно правильно выбрать дугу, на которую «смотрит» угол.

Мера вписанного угла равна половине меры соответствующей дуги. Эквивалентно: она равна половине центрального угла, который опирается на ту же дугу.

# Как найти угол по дуге окружности

Логика решения основана на двух правилах: центральный угол равен дуге, а вписанный — её половине.



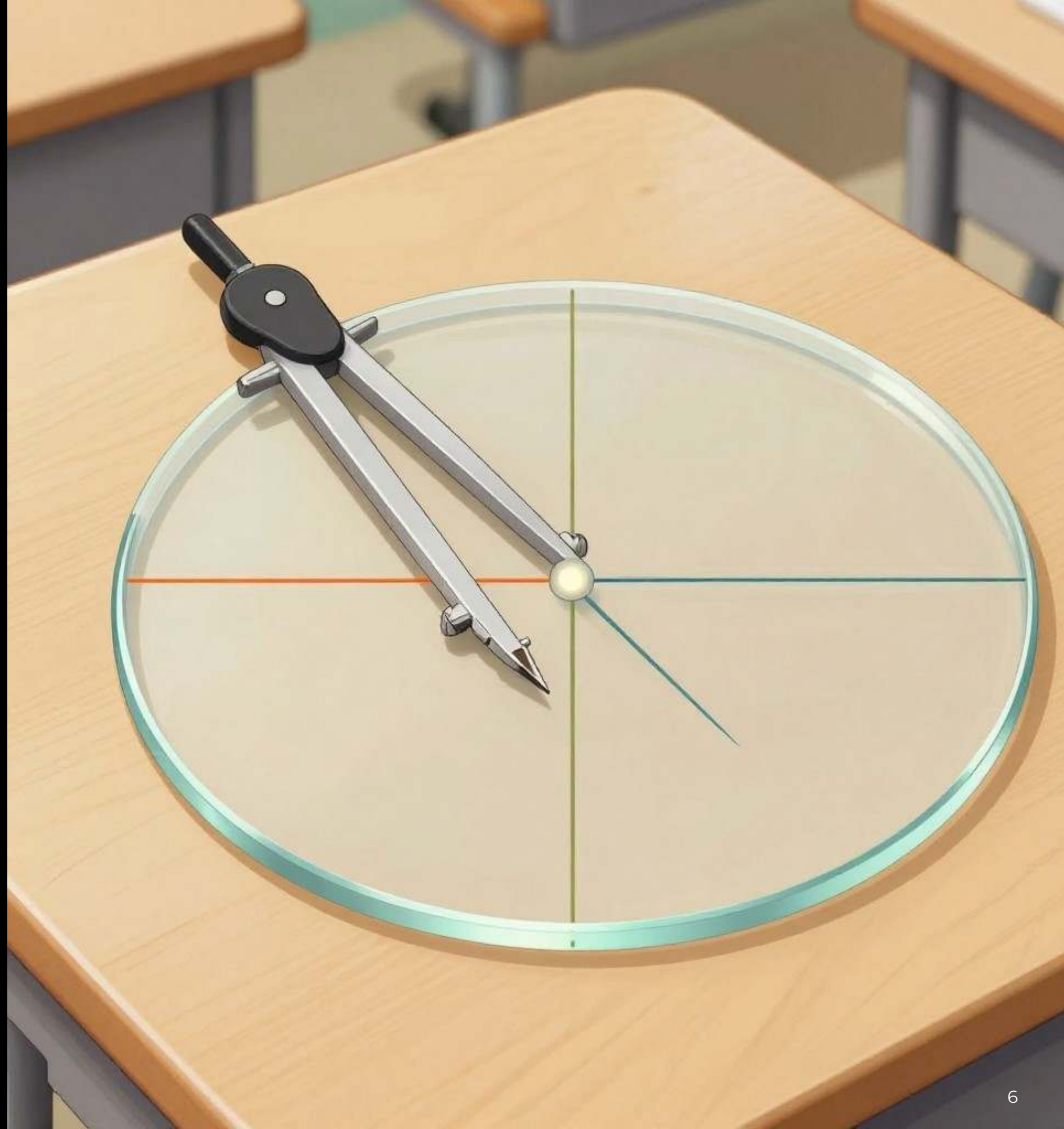
# Элементы окружности, которые нужны в задачах

## Центр, радиус и диаметр

Центр окружности обозначают буквой  $O$ . Радиус соединяет центр с точкой на окружности и показывает «расстояние до края». Диаметр проходит через центр и равен двум радиусам — он всегда стягивает полуокружность.

## Хорда и дуга

Хорда соединяет две точки окружности; она может не проходить через центр. Дуга — это часть окружности между двумя точками. Эти элементы помогают читать рисунок и находить углы по их дугам.



# Сравнение центрального и вписанного углов

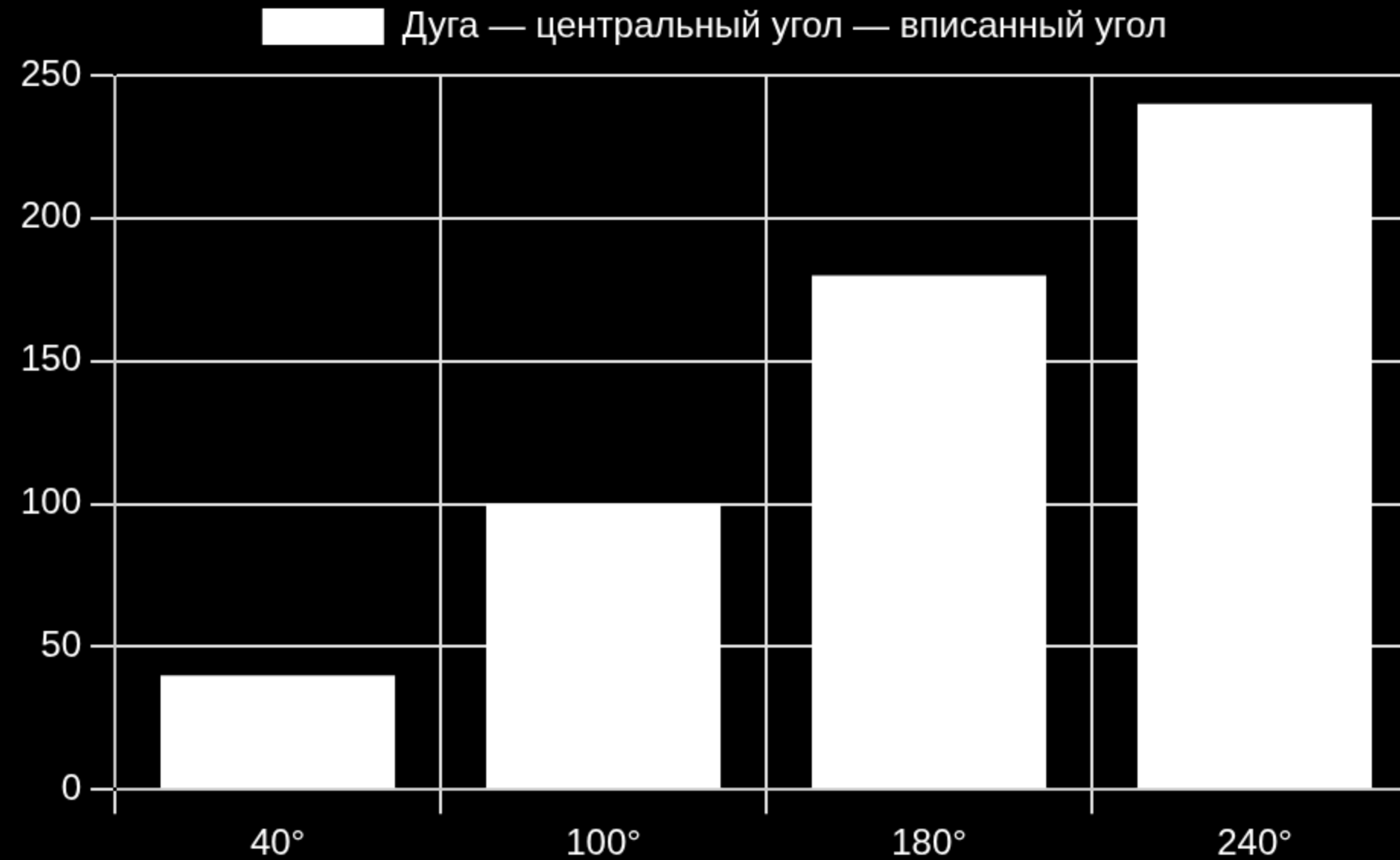
Один и тот же участок окружности даёт разные углы, потому что вершина и стороны у них устроены по-разному.

Когда известна дуга, центральный угол берётся «как есть», а вписанный — уменьшается вдвое.

| Признак             | Центральный угол | Вписанный угол                                  |
|---------------------|------------------|-------------------------------------------------|
| Вершина             | в центре         | на окружности                                   |
| Стороны             | радиусы          | хорды                                           |
| Связь с дугой       | угол = дуга      | угол = $1/2$ дуги                               |
| Связь с центральным | —                | вписанный = $1/2$ центрального (на той же дуге) |

Свойства окружности (школьная программа).

# Связь дуги и двух видов углов



Сопоставление значений по правилу свойств окружности.

Если отложить те же дуги на окружности, то вписанные углы всегда окажутся ровно в два раза меньше соответствующих центральных.

Пары «дуга ↔ центральный» совпадают по числам, а «дуга ↔ вписанный» всегда делится пополам.

# Вписанные углы на одной и той же дуге



## Одна дуга — равные углы

Если два вписанных угла стягивают одну и ту же дугу АВ, то их меры равны. Это помогает сравнивать углы без вычислений, опираясь только на построение.



## Вершины могут быть разными

Даже когда вершины углов лежат в разных точках окружности, равенство сохраняется. Главное условие — чтобы оба угла опирались именно на одну дугу АВ.



## Зачем это в четырёхугольниках

В четырёхугольниках с точками на окружности такие равенства часто дают нужные углы. По связям дуг можно делать выводы о равенстве углов при доказательствах.



## Доказательства равенства

Равные вписанные углы на одной дуге — удобный шаг в строгих доказательствах. По ним получают равенство фигур или подтверждают одинаковые положения на чертеже.

# 90°

**Вписанный угол на диаметре равен 90° и даёт прямой угол в нужных задачах.**

Если вписанный угол опирается на диаметр, то он равен 90°. Диаметр стягивает полуокружность с дугой 180°, а вписанный угол — половина этой дуги.

*Свойства окружности и прямого угла (школьная геометрия).*

# Где встречаются центральные и вписанные углы в жизни

## Циферблат часов: от делений до дуг

На круглом циферблате легко представить дуги между цифрами. Когда часовая и минутная стрелки смотрят в две точки, центральный угол фиксирует положение «в центре», а вписанный можно мысленно связать с точками на окружности. Такие картинки помогают быстрее понимать, как угол связан с дугой.



## Колесо велосипеда: спицы и «геометрия круга»

Спицы колеса похожи на лучи из центра: они задают центральные углы между направлениями. А обод с точками контакта напоминает, где появляются хорды и вписанные углы. Даже без формул видно: чем больше дуга между точками, тем больше соответствующий угол.



## Разметка и знаки: углы внутри кругов

Во многих дорожных знаках и спортивной разметке встречаются окружности, дуги и сектора. Внутри круга можно встретить элементы, которые образуют вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Эти «картинки» полезны, потому что показывают геометрию прямо на практике.



# Типичные ошибки в задачах по теме

Частая ошибка — путать хорду и радиус. Радиус соединяет центр с точкой окружности, а хорда проходит между двумя точками на окружности и может не проходить через центр.

Вторая ошибка — выбирать не ту дугу, на которую опирается угол. Один и тот же угол может «смотреть» на разные части окружности, и тогда значения угла получаются разными.

Третья ошибка — забывать, что вписанный угол вдвое меньше соответствующей дуги. Если дуга равна  $80^\circ$ , то вписанный угол надо брать  $40^\circ$ , а не  $80^\circ$  или  $160^\circ$ .

Ошибка в определении положения вершины угла меняет тип угла: центральный или вписанный. Если вершина не в центре, центральным угол уже не является, и правило применится неправильно.

# Три типовых примера вычислений

| Дуга | Центральный угол | Вписанный угол |
|------|------------------|----------------|
| 84°  | 84°              | 42°            |
| 130° | 130°             | 65°            |
| 70°  | 70°              | 35°            |

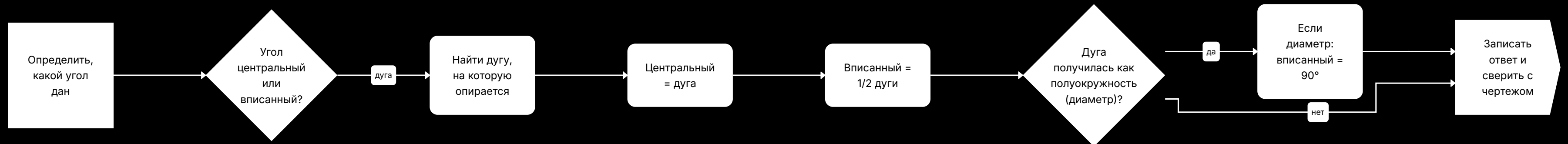
Базовые свойства окружности: центральный угол равен дуге, вписанный — половине дуги.

Для одной и той же дуги центральный угол равен её мере, а вписанный — половине. При работе в обратную сторону сначала восстанавливают дугу по данному углу, затем находят остальные значения.

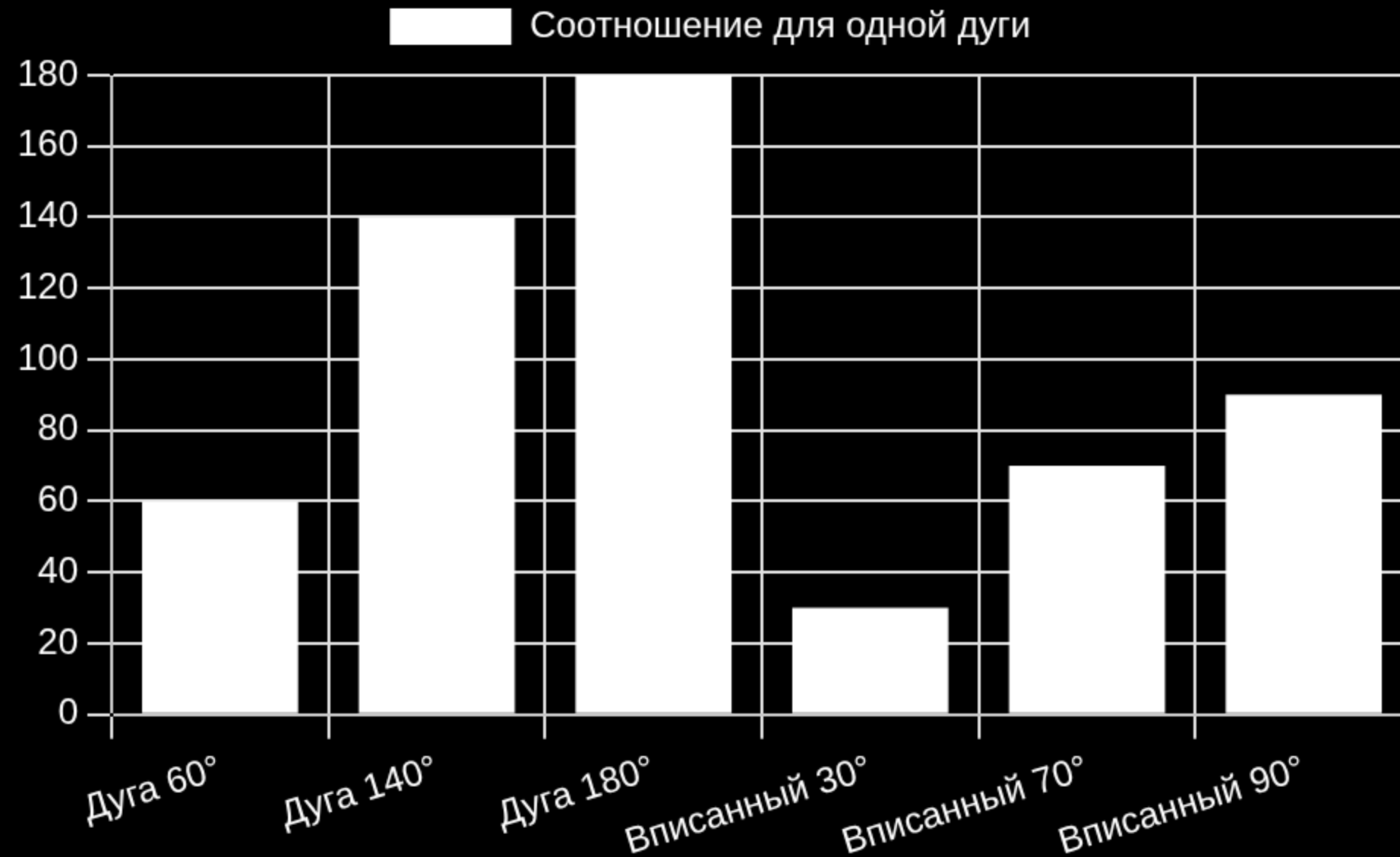
Во всех примерах центральный угол совпадает с мерой дуги, а вписанный всегда составляет ровно половину. Это одно и то же правило работает и прямо, и обратно.

# Алгоритм решения задач на углы в окружности

Последовательность действий: определить тип угла, найти опирающуюся дугу, применить правила и проверить особый случай.



# Почему вписанный угол меньше центрального



Вписанный угол «видит» ту же дугу, но его величина всегда связана с центральным вдвое: при увеличении дуги вписанный увеличивается пропорционально.

Диаграмма показывает постоянное соотношение: на одной и той же дуге центральный угол равен дуге, а вписанный — ровно половина центрального. Поэтому вписанный всегда меньше.

Рассмотрены примеры для дуг  $60^\circ$ ,  $140^\circ$ ,  $180^\circ$  (свойство углов, опирающихся на ту же дугу).

# Связь темы с треугольниками в окружности

Если вершины треугольника лежат на окружности, его углы становятся вписанными. Такой треугольник называют вписанным в окружность: он целиком строится на дугах между его вершинами.

В прямоугольном треугольнике гипотенуза часто совпадает с диаметром окружности. Тогда угол напротив гипотенузы опирается на диаметр и равен  $90^\circ$  по свойству вписанного угла.

Используя связь вписанных углов с дугами, можно находить неизвестные углы треугольника и проверять, является ли он прямоугольным. Это особенно удобно в задачах по чертежу.

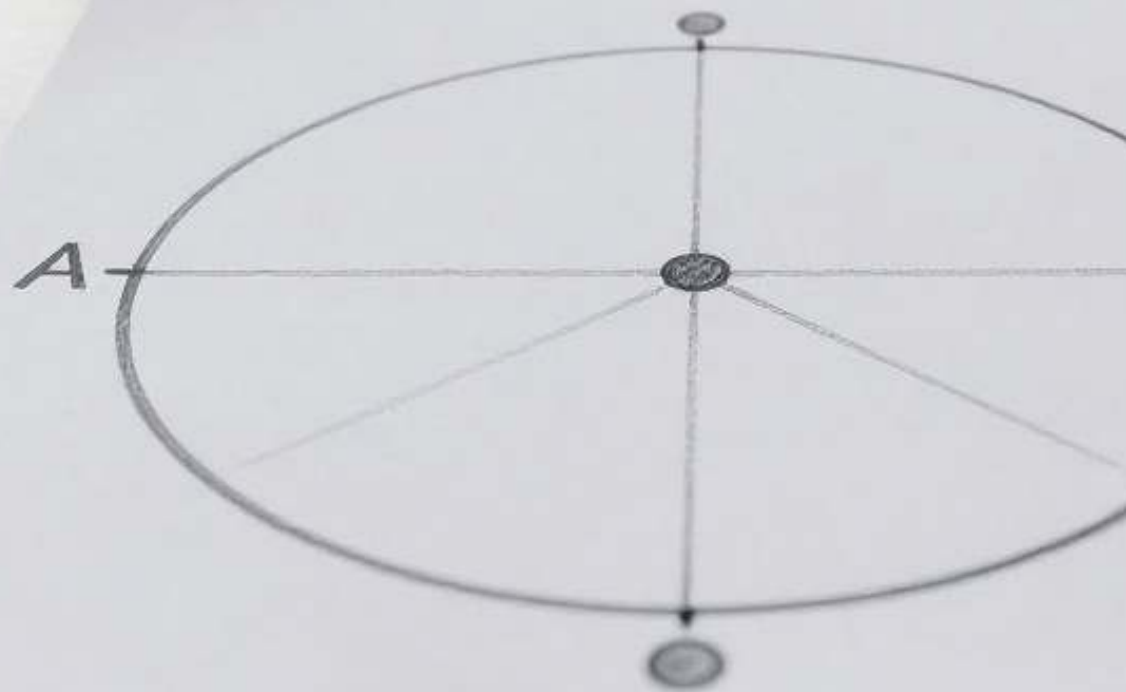
# Как выглядит связка центрального и вписанного углов на чертеже

## Центральный угол и его дуга

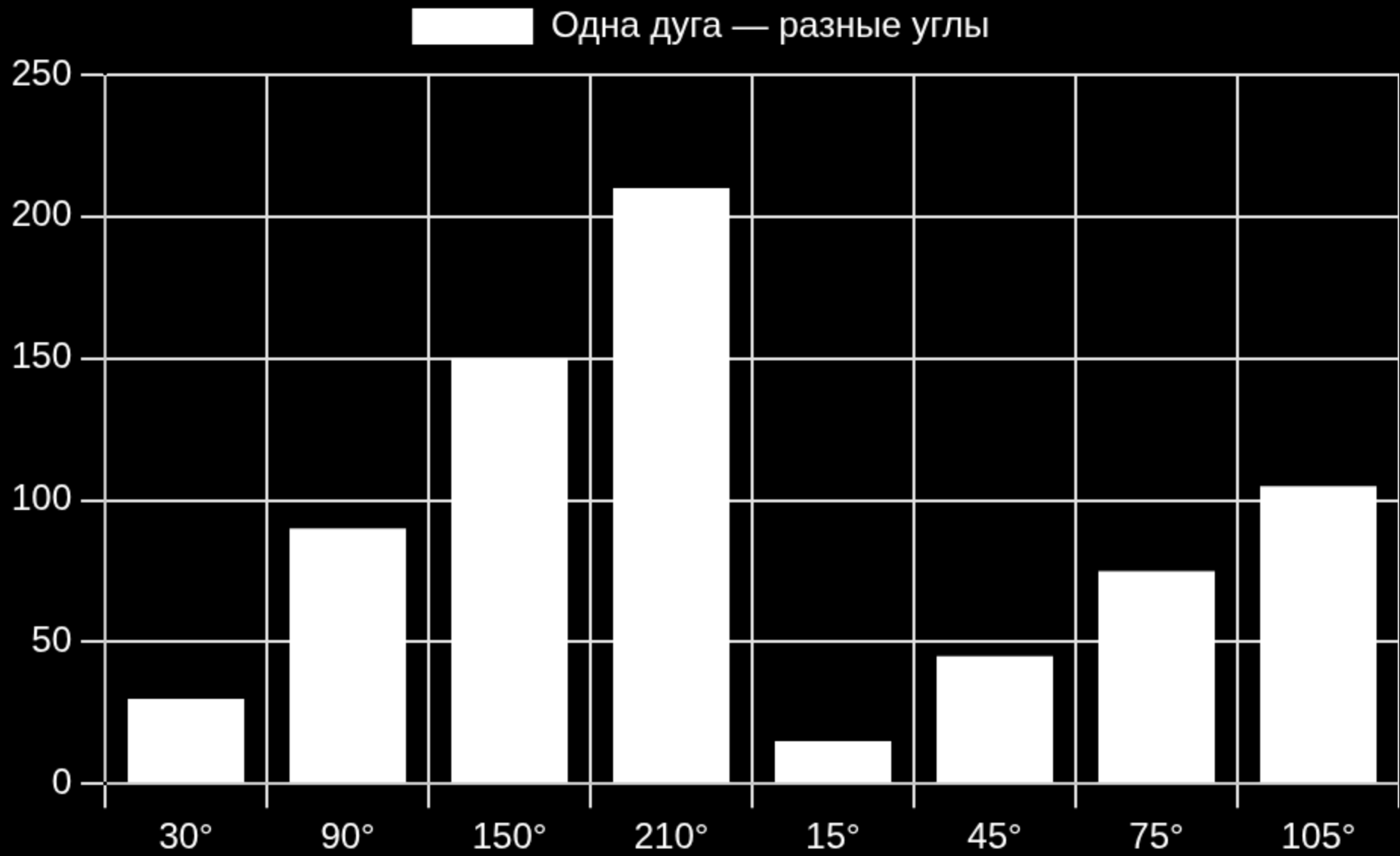
На чертеже отмечают центр  $O$  и точки  $A$  и  $B$  на окружности. Угол  $AOB$  имеет вершину в центре, значит он центральный. Он опирается на дугу  $AB$ , поэтому его мера соответствует мере этой дуги.

## Вписанный угол на той же дуге

Точка  $C$  тоже лежит на окружности, и угол  $ACB$  имеет вершину на окружности. Он вписанный и опирается на ту же дугу  $AB$ . Поэтому  $ACB$  вдвое меньше центрального угла  $AOB$ , то есть равен половине дуги  $AB$ .



# Сравнение значений для одной дуги



При разных значениях дуги центральный угол повторяет её величину, а вписанный получается автоматически делением на два. Поэтому сравнение становится наглядным.

Данные демонстрируют фиксированное правило: на одной и той же дуге центральный угол равен дуге, а вписанный — ровно её половина. Из-за этого вписанный всегда меньше.

Свойства окружности: центральный угол равен дуге, вписанный угол — половине дуги (значения для 30°, 90°, 150°, 210°).

# Что важно запомнить перед контрольной

Центральный угол равен мере дуги, на которую он опирается. Если центральный угол дан, дуга имеет то же значение, а значит остаётся только аккуратно перенести числа.

Вписанный угол равен половине дуги и половине центрального угла на той же дуге. Поэтому достаточно один раз понять, какой именно дугой «связан» угол в условии.

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны. Это правило позволяет сравнивать углы в разных точках окружности без дополнительных вычислений.

Если вписанный угол опирается на диаметр, он равен  $90^\circ$ . Такой ответ часто получается быстро, но важно убедиться, что речь действительно о диаметре, а не о хорде.

# Геометрия круга становится понятной

Центральные и вписанные углы связывают дуги, хорды, радиусы и центр окружности в единый набор правил. Они помогают быстро находить углы, сравнивать дуги и уверенно решать доказательные задачи в 8 классе.