

Законы равносильных преобразований алгебраических выражений

Как менять запись, не меняя смысл?



Равносильные преобразования в 7 классе

Они помогают упрощать выражения, быстрее находить значения и уверенно решать уравнения. Важно сохранять смысл записи и внимательно следить за знаками, скобками и условиями допустимых значений.



Что называют равносильными выражениями

Одинаковый результат

Два выражения равносильны, если при одинаковых допустимых значениях переменных они дают одно и то же значение. Меняется только запись, а не смысл выражения.

Примеры записей

Например, $2(x+3)$ и $2x+6$, $a+a+a$ и $3a$, $4y-8$ и $4(y-2)$ — это разные формы одной и той же величины.

Условия допустимости

Равносильность сохраняется только в области допустимых значений. Это особенно важно в выражениях с дробями и корнями, где некоторые значения переменной запрещены.

Зачем это нужно

Понимание равносильности помогает выбирать более удобную форму записи, не теряя правильности вычислений и не искажая исходное выражение.

Основные законы преобразований

Операции с обеими частями

01

К равносильным преобразованиям относятся прибавление или вычитание одного и того же числа в обеих частях равенства. При этом равенство остаётся верным.

Умножение и деление

02

Если обе части равенства умножить или разделить на одно и то же ненулевое число, значение не изменится. Делить на ноль нельзя.

Раскрытие скобок

03

По распределительному закону можно раскрывать скобки и записывать выражение в более удобном виде. Это не меняет его значения при допустимых значениях.

Приведение слагаемых

04

Подобные слагаемые можно складывать и вычитать, объединяя одинаковые буквенные части. Такое преобразование сокращает запись и облегчает вычисления.

Распределительный закон и раскрытие скобок

Основная запись

Распределительный закон записывается так:
 $a(b+c)=ab+ac$. Это означает, что множитель умножается на каждое слагаемое в скобках по отдельности.

Примеры раскрытия

Из этого правила получаются равносильные записи:
 $3(x+5)=3x+15$ и $4(a-2)=4a-8$. Знак перед скобками тоже учитывается.

Обратное преобразование

Иногда удобно действовать наоборот и выносить общий множитель за скобки.
Например, $6y+12$ можно записать как $6(y+2)$.

Как запомнить правило

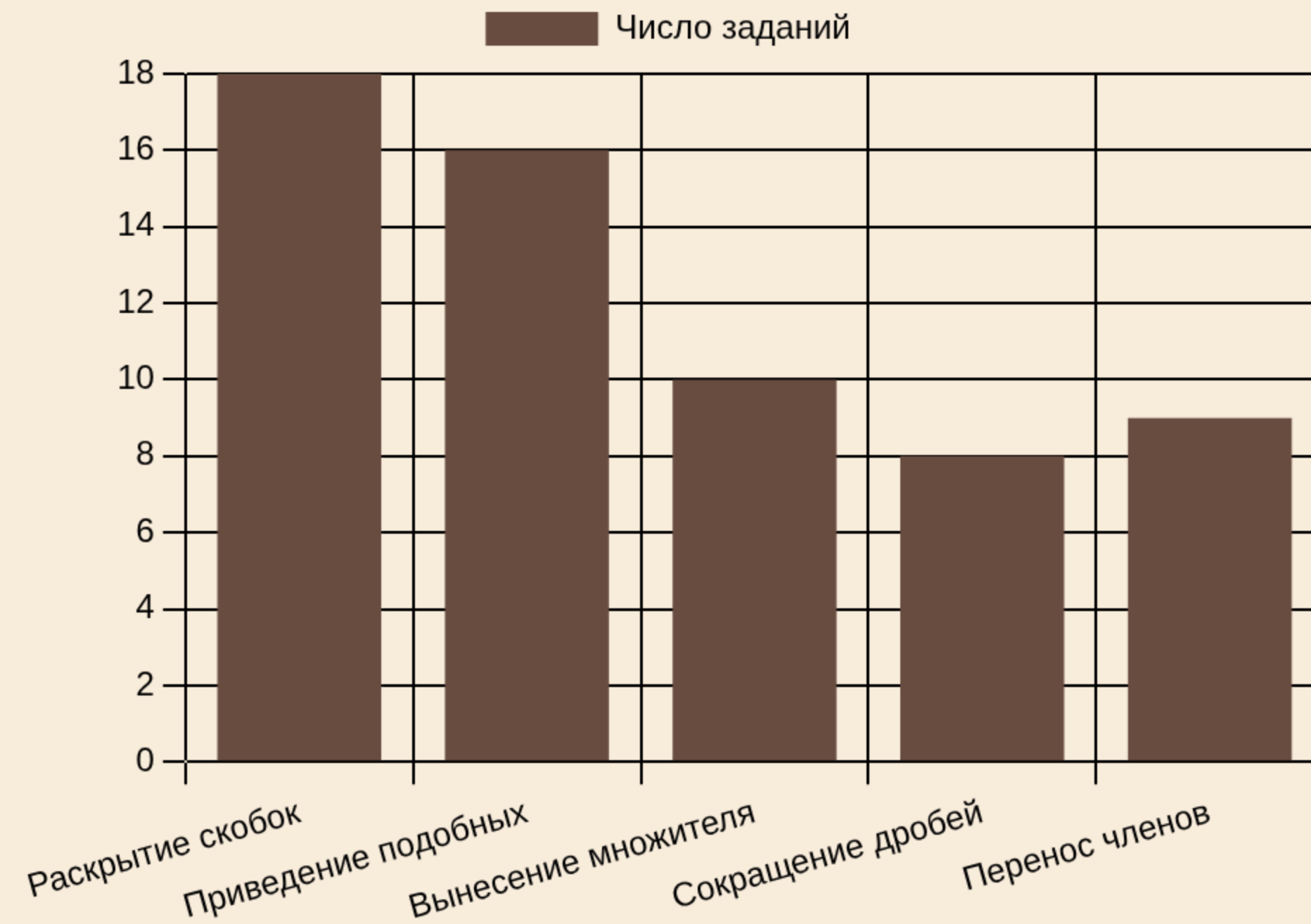
Полезно представлять, что один и тот же множитель «распределяется» на каждое слагаемое внутри скобок. Так меньше ошибок при вычислениях.



Какие преобразования чаще всего встречаются в заданиях

Диаграмма показывает, какие виды преобразований чаще повторяются в упражнениях по теме. Это помогает заранее понять, на что стоит обратить больше внимания при подготовке.

Чаще всего встречаются раскрытие скобок и приведение подобных слагаемых; именно эти действия стоит отработать в первую очередь.



Приведение подобных слагаемых

1

Что делает слагаемые подобными

Подобные слагаемые имеют одинаковую буквенную часть и различаются только коэффициентами. Их можно складывать или вычитать, не меняя буквенную часть выражения.

2

Примеры преобразований

Например, $5x - 2x = 3x$, $7a + 4a = 11a$, $9m - m = 8m$. В каждом случае объединяются только коэффициенты, а переменная остаётся той же самой.

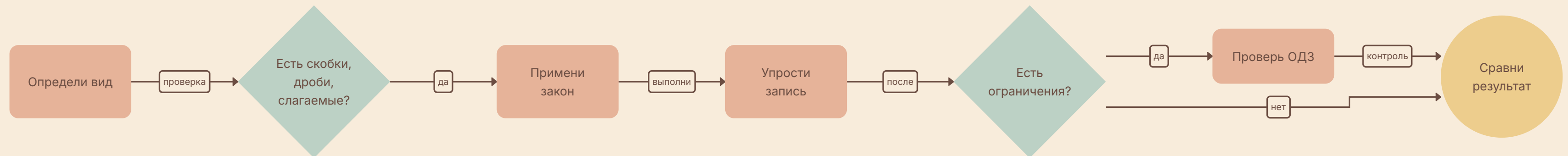
3

Чего делать нельзя

Нельзя складывать разные буквенные части. Поэтому $3x + 3y$ не превращается в $6xy$: здесь переменные разные, и это уже другое выражение.

Алгоритм упрощения выражения

Последовательность действий при преобразовании алгебраической записи



Перенос членов и изменение знаков

Как работает перенос

При переносе слагаемого из одной части равенства в другую его знак меняется на противоположный. Это краткая запись одинакового действия с обеими частями.

Простой пример

Равенство $x+7=12$ можно записать как $x=12-7$. Так видно, что число 7 не исчезло, а просто перешло в другую часть с противоположным знаком.

Почему это важно

Этот приём особенно полезен при решении уравнений. Он помогает действовать быстрее, не теряя правильности, если внимательно следить за знаком каждого члена.

Сравнение основных преобразований

В таблице показано, как разные преобразования влияют на запись выражения и сохраняют ли они его значение.

Равносильность сохраняется при корректном применении правил и соблюдении области допустимых значений.

Преобразование	Пример	Значение
Раскрытие скобок	$2(x+4)=2x+8$	Да
Приведение подобных	$3a+5a=8a$	Да
Вынесение множителя	$6x+9=3(2x+3)$	Да
Сокращение дроби	$12x/6=2x$	Да
Замена порядка	$a+b=b+a$	Да

Вынесение общего множителя за скобки



Когда выражение можно собрать

Если в нескольких слагаемых есть общий множитель, его удобно вынести за скобки. Так длинная запись превращается в более короткую и наглядную: $6x+9 = 3(2x+3)$. На схеме можно показать три одинаковые группы, объединённые в одну общую.



Структура становится заметнее

Этот приём помогает сразу увидеть, что в выражении повторяется. Например, $8a+12 = 4(2a+3)$: вместо двух отдельных частей появляется одна общая основа. Для рисунка подойдут одинаковые предметы, разложенные по парам или тройкам и собранные вместе.

Сокращение дробей и ограничения

Сначала в числителе и знаменателе ищут общий множитель. Если он есть, дробь можно сократить, как в записи $12x/6 = 2x$.

⋮

Общий множитель

Проверка на слагаемые

Последний шаг — проверить ограничения. Если переменная стоит в знаменателе, она не может быть равна нулю, например $x \neq 0$.

⋮

Область допустимых значений

⋮

Затем важно убедиться, что сокращаются именно множители, а не части суммы. Запись $(x+2)/x$ сократить нельзя, потому что x и 2 не являются общим множителем всей суммы.

Типичные ошибки при преобразованиях

Чаще всего ошибки появляются там, где нужно внимательно следить за знаками и структурой выражения.

Основной риск связан со знаками и скобками; именно эти ошибки чаще всего меняют результат и требуют двойной проверки.



Как проверить равносильность преобразования

Возьмите допустимое число

01

Подставьте в выражение простое значение переменной, которое не нарушает ограничения. Это помогает быстро увидеть, сохраняется ли смысл записи после преобразования.

Сравните результаты

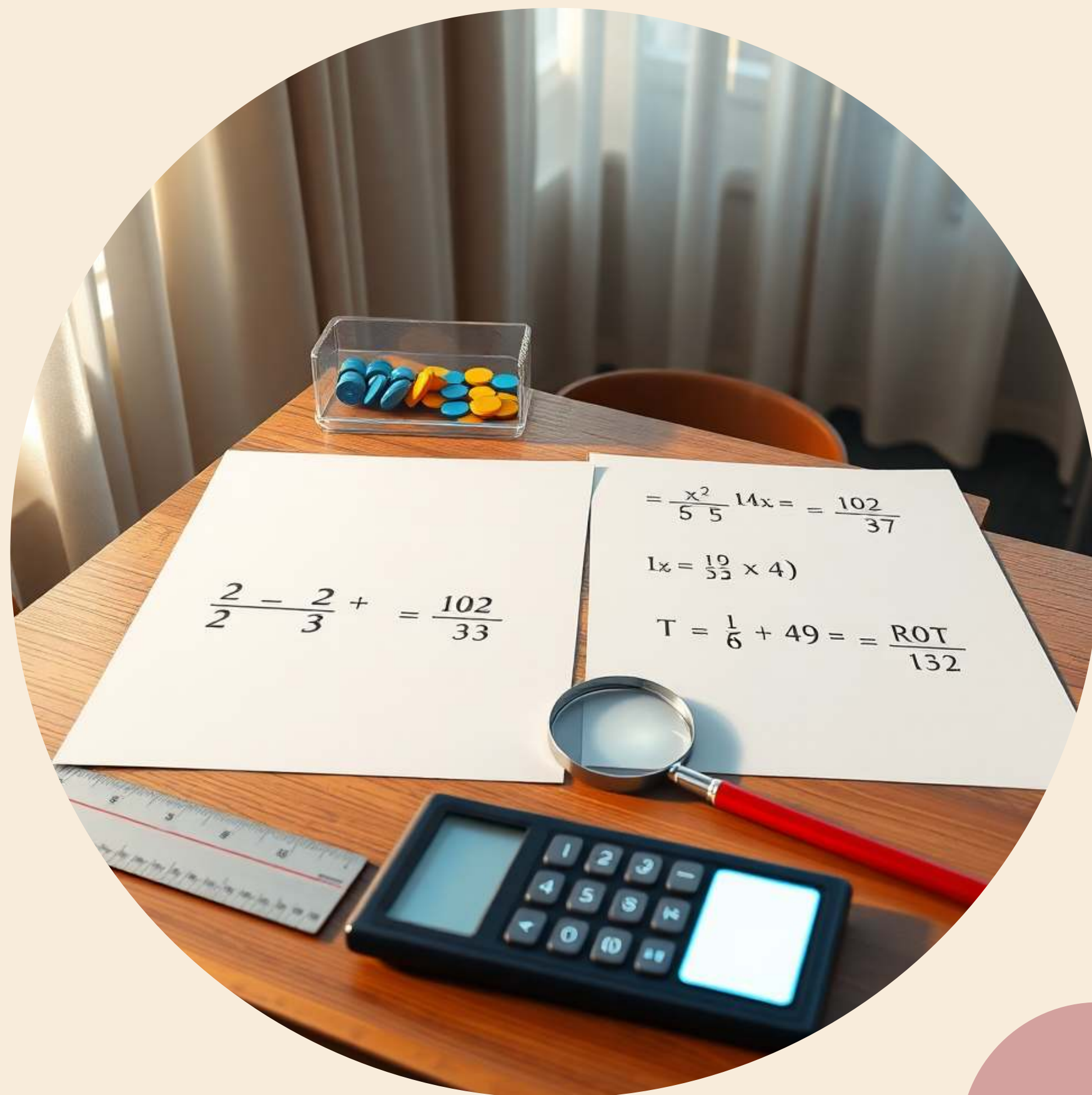
02

Вычислите исходную и полученную запись для одного или нескольких допустимых значений. Если значения совпадают, преобразование выглядит верным и требует только дополнительной проверки условий.

Проверьте область допустимых значений

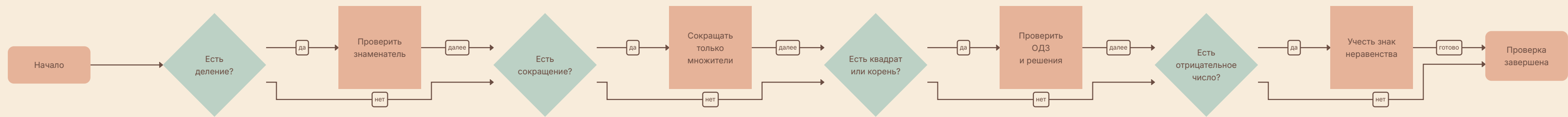
03

Особенно внимательно смотрите на дроби и корни. Даже правильная на вид запись может оказаться неверной, если в ней нарушено ограничение или появилось недопустимое значение.



Когда преобразование нельзя считать равносильным

Схема показывает случаи, когда нужно отдельно проверять ограничения и возможные изменения смысла выражения.



Связь равносильных преобразований с уравнениями и неравенствами

1

Решение уравнения

Равносильные преобразования позволяют переходить от более сложной записи к более простой, не меняя ответа. Например, из $x+5=13$ получаем $x=8$.

2

Проверка каждого шага

При решении уравнений важно, чтобы каждое действие сохраняло множество решений. Тогда полученные записи остаются равносильными исходному уравнению и не вводят лишних ответов.

3

Неравенства требуют осторожности

Если умножать или делить неравенство на отрицательное число, знак меняется на противоположный. Это правило нельзя пропускать, иначе итоговый ответ окажется неверным.

4

Основа точного ответа

Именно равносильные преобразования помогают получить правильный результат без лишних решений и потери нужных. Они делают рассуждение понятным и последовательным.

Примеры верных и неверных преобразований

Исходная запись	Преобразование	Результат
$2(x+4)$	$2x+8$	верно
$3a+5a$	$8a$	верно
$(x+6)/3$	$x+2$	верно
$(x+6)/3$	$x+6$	неверно

Сравнение показывает, что правильность зависит не только от внешнего вида, но и от правил преобразования.

Верные преобразования сохраняют значение записи, а неверные нарушают правила сокращения, деления или распределительного закона.

Практическое значение в учебных задачах



Упрощение выражений

Равносильные преобразования помогают сократить длинную запись и быстрее получить удобный вид выражения. Это уменьшает количество промежуточных вычислений и делает решение понятнее.



Решение уравнений

При решении уравнений важно преобразовывать запись так, чтобы не менять множество решений. Тогда ответ получается аккуратно и без лишних шагов.



Формулы фигур

В формулах площади и периметра часто приходится раскрывать скобки, приводить подобные слагаемые и выносить множитель. Это помогает подставлять значения быстрее.



Задачи на движение

В текстовых задачах равносильные преобразования позволяют перейти от слов к выражениям и упростить расчёты. Так легче найти неизвестную величину по условию.



Проценты и сравнения

При работе с процентами преобразования делают запись короче и нагляднее. Это особенно полезно, когда нужно сравнить несколько величин или выполнить проверку ответа.



Главные правила для запоминания

Сохраняйте значение

01

После преобразования выражение должно иметь тот же смысл и те же значения при допустимых значениях переменной. Если результат меняется, преобразование нельзя считать равносильным.

Не делите на ноль

02

Перед делением или сокращением обязательно проверяйте знаменатель. Если он может стать нулём, запись требует отдельного рассмотрения и анализа ограничений.

Следите за областью допустимых значений

03

Особенно это важно для дробей и корней. Даже полезное преобразование становится неверным, если в процессе появляются недопустимые значения переменной.

Раскрывайте скобки правильно

04

Используйте распределительный закон и помните: множитель должен умножаться на каждое слагаемое внутри скобок. Это помогает избежать ошибок со знаками.

Проверяйте результат

05

Подстановка простого допустимого числа помогает быстро заметить ошибку. Такой контроль особенно полезен, если выражение выглядит сложным или содержит несколько преобразований.

Равносильные преобразования: от записи к пониманию

Сегодня мы увидели, что равносильные преобразования делают выражения короче, но не меняют их смысл. Они помогают уверенно решать уравнения, упрощать записи и избегать ошибок при проверке ответа.