

Геометрия 11 класса: стереометрия, координаты и измерение пространственных фигур



Стереометрия, координатно-векторный
метод и вычисления углов, расстояний,
площадей и объёмов.

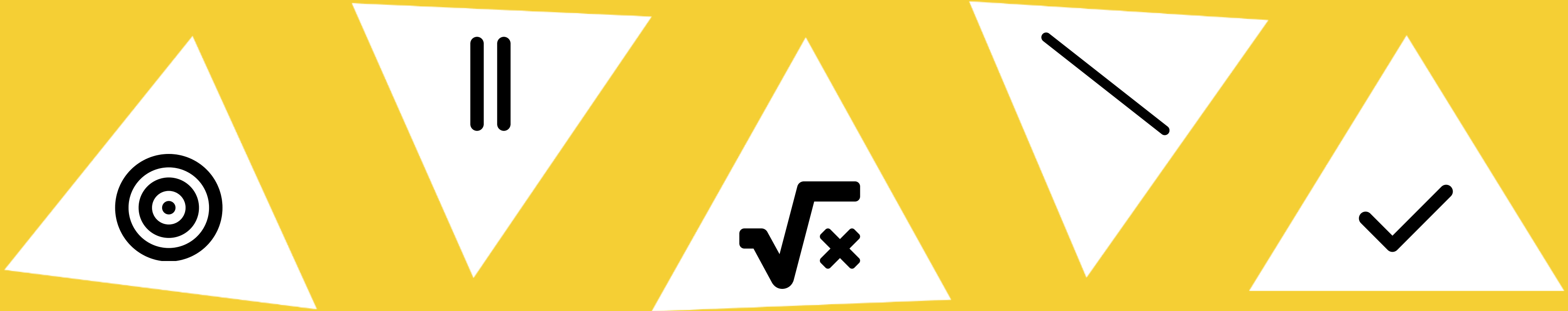
Зачем в 11 классе изучают пространственную геометрию



Геометрия 11 класса переносит привычные идеи из плоскости в пространство и помогает решать задачи на длины, углы, площади и объёмы. Эти навыки нужны в инженерных расчётах, черчении, навигации, компьютерной графике и при подготовке к ЕГЭ.



Основные объекты стереометрии и их обозначения



Точка

Точка задаёт положение в пространстве и обозначается A, B, C . От принадлежности точки плоскости или прямой зависит, какие отношения можно применять в задаче.

Прямая

Прямую обычно записывают как a . По рисунку важно различать прямые, задающие направления, и прямые, которые лежат в плоскостях.

Плоскость

Плоскость обозначают греческой буквой α . Через плоскость описывают сечения и двугранные углы, а также проверяют пересечение и параллельность объектов.

Пересечения и принадлежность

Базовые связи — «точка принадлежит плоскости», «прямая пересекает плоскость», «две плоскости пересекаются». Нередко именно это определяет дальнейшие вычисления.

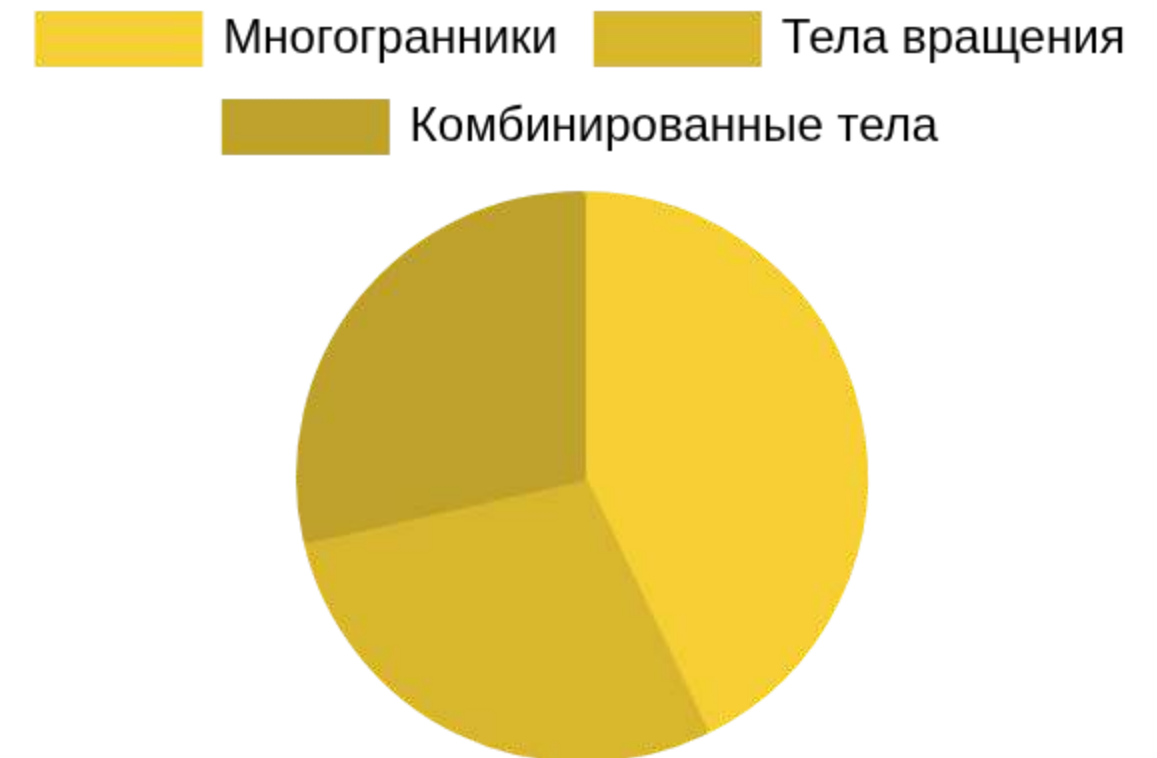
Параллельность и перпендикулярность

Умение читать на чертеже параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей задаёт ключ к углам и расстояниям: без этого формулы применять нельзя.

Классификация пространственных фигур и их ключевые признаки

В задачах чаще всего сначала «распознают модель»: многогранник, тело вращения или композицию. Затем выбирают стандартные связи между элементами фигуры.

Почти все вычисления опираются на тип фигуры: признаки подсказывают, какие формулы и построения будут уместны, а какие — лишние.



Сводка учебных тем школьного курса геометрии (актуализация по ФГОС/ЕГЭ, 2024–2026 гг.).

Основные многогранники и формулы для 11 класса

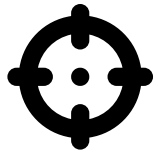
Фигура	Объём V	Площадь Sполн	Что ищут чаще
Призма	$V = S_{осн} \cdot h$	$S_{полн} = 2S_{осн} + S_{бок}$	основание, высота
Пирамида	$V = \frac{1}{3} \cdot S_{осн} \cdot h$	—	апофема, высота
Прямоугольный параллелепипед	$V = abc$	—	длина, ширина, высота
Правильные многогранники	по заданным элементам	по данным задачи	апофема, диагональ

Ключевые тела и формулы для объёмов и поверхностей, плюс элементы, которые чаще всего используются в решениях.

Практика показывает: при решении почти всегда сначала фиксируют основание и высоту, а затем уже переходят к нужной площади или объёму.

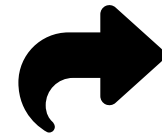
Методические материалы и школьный курс геометрии (стандартные формулы).

Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве



Пересечение прямых

Если прямые имеют общую точку, их называют пересекающимися. Это свойство позволяет связать построение угла с координатной или геометрической конструкцией.



Скрещивающиеся прямые

Скрещивающиеся прямые не лежат в одной плоскости и не пересекаются. В отличие от плоского случая, угол или расстояние приходится находить через вспомогательные построения.



Параллельность

Если прямая параллельна плоскости, то в плоскости можно провести линию, параллельную этой прямой. Это упрощает поиск углов между направлениями.



Прямая и плоскость

Возможны пересечение или параллельность. От этого зависит, строим ли мы точку пересечения, или выбираем линию в плоскости для параллельного переноса.

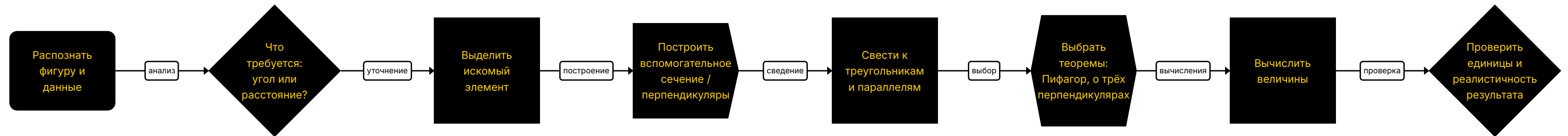


Пересечение и параллельность плоскостей

Две плоскости пересекаются по прямой, а если параллельны — общих точек нет. Эти случаи напрямую влияют на вид двугранного угла и расстояния.

Алгоритм решения задачи на угол или расстояние в пространстве

Логика решения опирается на построения вспомогательного сечения, прямоугольных треугольников и базовые теоремы школьной геометрии.



Геометрический смысл сечения многогранника



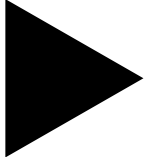
Сечение как «пересечение с задачей»

Сечение многогранника плоскостью — это многоугольник, который получается при пересечении фигуры с плоскостью. На рисунке выделяют следы секущей плоскости и линии пересечения на гранях.

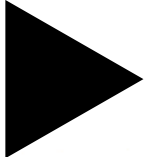
Почему сечение упрощает вычисления

Сечение помогает перейти от объёмной картинке к более простому планиметрическому виду. В нём часто возникают прямоугольные треугольники, позволяющие применять стандартные формулы для углов и расстояний.

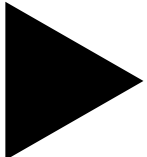
Углы в пространстве: линейный, между прямыми и между плоскостями



Угол между пересекающимися прямыми относят к «линейным» углам и определяют через построение в плоскости. Главное — корректно выбрать лучи и следить, чтобы они лежали в одной плоскости.



Угол между скрещивающимися прямыми находят через перенос: строят параллельные прямые в удобной плоскости. Тогда пространственный угол становится углом между пересекающимися прямыми в сечении.

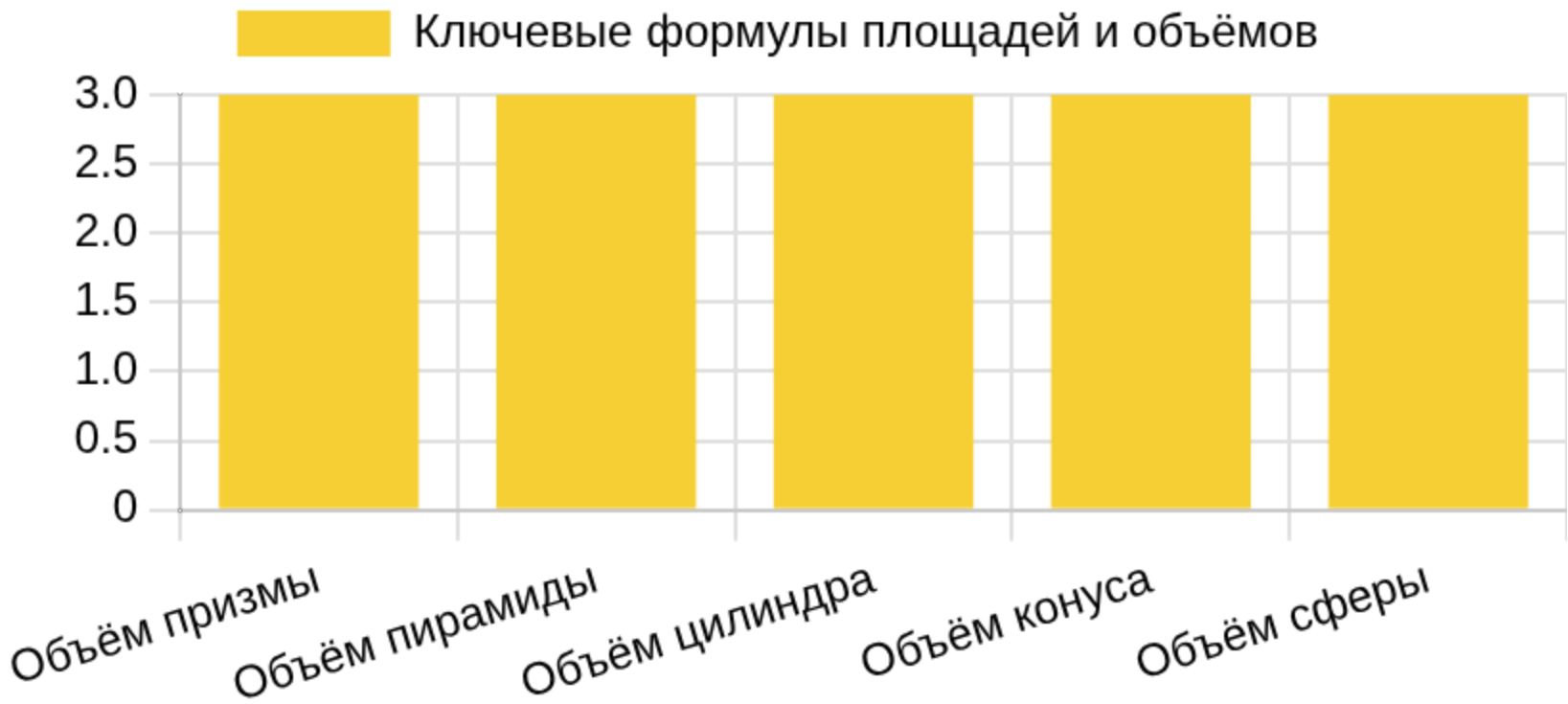


Двугранный угол между плоскостями измеряют через его линейный угол. Он задаёт плоское изображение двугранного угла и позволяет решать задачу с помощью перпендикуляров и плоской тригонометрии или теорем.

Сравнение формул площадей и объёмов основных тел

Сильнее всего в школьных задачах «работают» базовые параметры: основание и высота у призм/пирамид, радиус у тел вращения.

Диаграмма подчёркивает единый принцип: сначала выделяют нужную геометрическую характеристику, затем подставляют её в формулу объёма или площади.



Учебный курс геометрии 11 класса; стандартные формулы для призм, пирамид, цилиндров, конусов и сферы (актуально для ЕГЭ).

Уравнения с неизвестной функцией и её производными: что это такое

▶ Уравнение с неизвестной функцией содержит не только саму функцию $y(x)$, но и её производные $y'(x)$, $y''(x)$ и т. д. Такие задачи обычно описывают «как меняется» величина, а не просто «сколько равно».

▶ Порядок производной задаёт уровень сложности: чем выше производная, тем больше степеней свободы у решения. Поэтому в общем случае решение содержит произвольные постоянные, число которых зависит от порядка.

▶ Ключевой навык — переводить условие задачи на язык уравнения: аккуратно записывать производные, согласовывать область допустимых значений и проверять подстановкой, что функция действительно удовлетворяет уравнению.

Базовые формулы для работы с производными в уравнениях

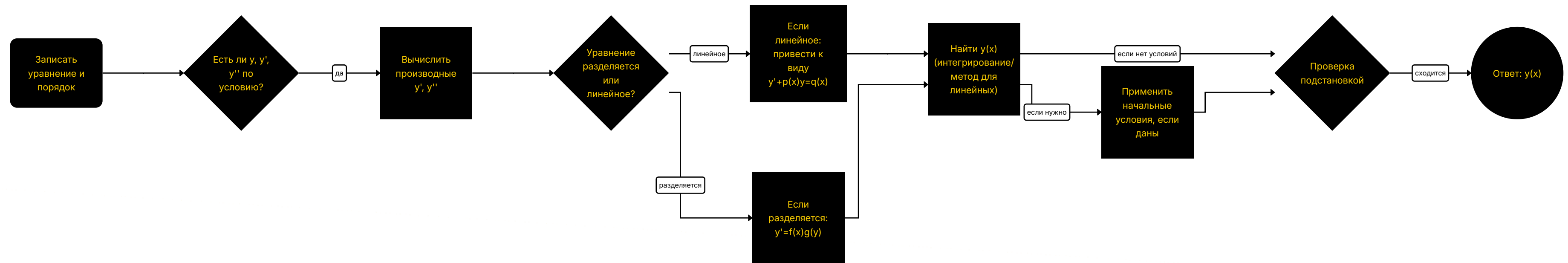
Вид выражения	Производная	Когда полезно
c	0	проверка констант
x^n	$n \cdot x^{(n-1)}$	стандартные степени
e^x	e^x	уравнения вида $y' = y$
$\ln x$	$1/x$	рационализация выражений
$(u \cdot v)$	$u'v + uv'$	когда произведение встречается в уравнении
(u/v)	$(u'v - uv')/v^2$	если есть дробно-рациональные части

Таблица помогает быстро вычислять y' , y'' и приводить уравнения к удобному виду: отделять переменные, узнавать линейные фрагменты и контролировать знаки при дифференцировании.

Когда производные вычисляются без ошибок, уравнение удаётся свести к простым формам (например, к $y' = ky$ или к разделяющимся), а проверка знаков часто предотвращает типичные промахи.

Как составить и решить уравнение по шагам

Схема универсальна для большинства школьных задач: от записи уравнения через подстановку и преобразования к получению общего решения и проверке.



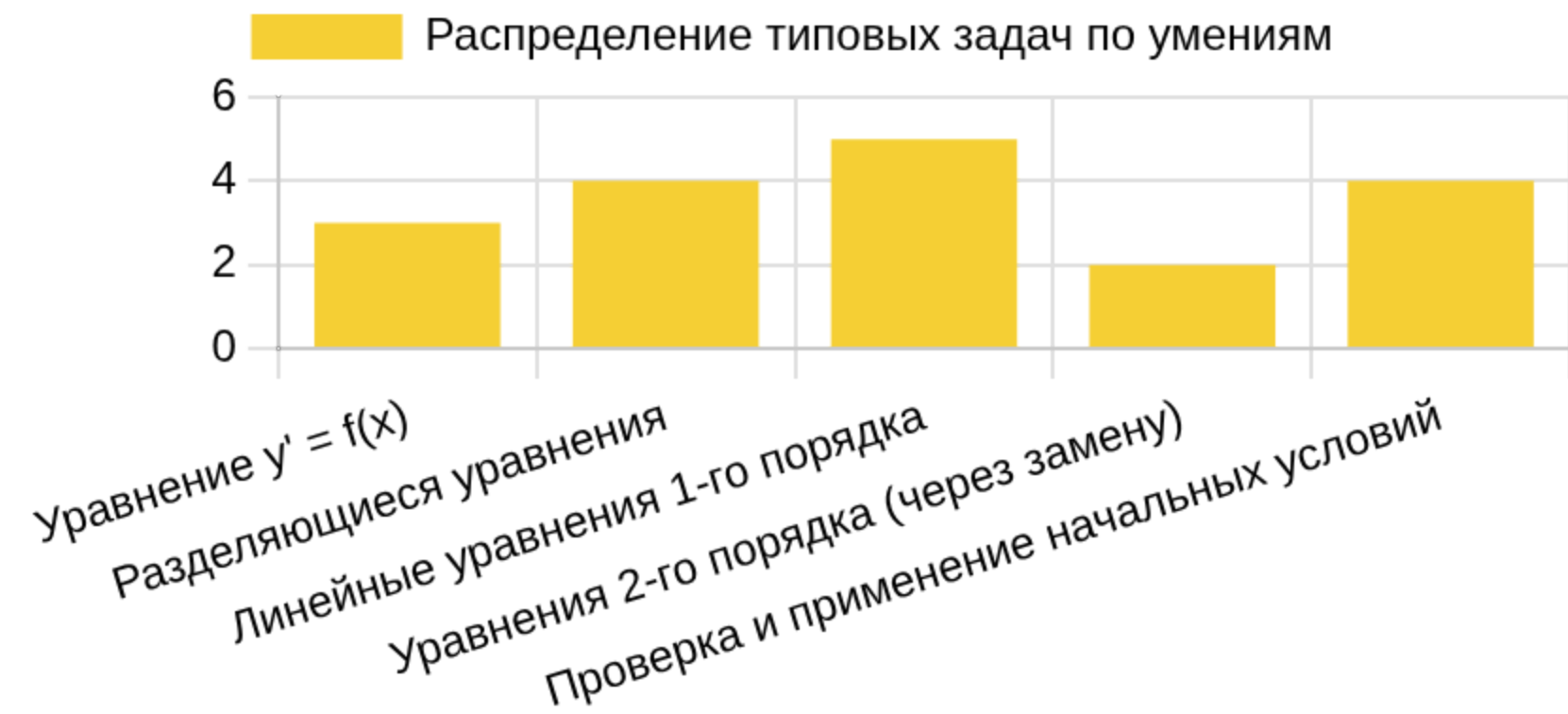
Разделяющиеся и линейные уравнения: как распознать «свою» форму

- ▶ Разделяющиеся уравнения обычно приводят к виду $y' = f(x) \cdot g(y)$. Тогда переменные удаётся разнести: $g(y) \cdot dy = f(x) \cdot dx$, и остаётся выполнить интегрирование.
- ▶ Линейные уравнения узнаются по структуре $y' + p(x) \cdot y = q(x)$. Здесь особенно важно корректно привести исходное уравнение к этому стандартному виду, иначе метод не сработает.
- ▶ Если в уравнении присутствует y'' или более высокие производные, часто сначала снижают порядок заменой (например, обозначают y' как новую функцию) — это уменьшает число шагов.
- ▶ Во всех случаях помогает контроль: подстановка найденной $y(x)$ в исходное уравнение должна дать тождество на допустимой области значений; иначе решение следует исправить.

Типовые задачи и какие приёмы чаще всего требуются

Чаще всего успех определяется тем, насколько быстро вы узнаете форму (разделяющуюся или линейную) и аккуратно доводите её до стандарта перед интегрированием или заменой.

Точки показывают: наибольшая нагрузка в школьных задачах приходится на распознавание структуры и контроль подстановкой. Это означает, что «алгоритм» важнее случайных вычислений.



Учебно-методическая логика школьных практик, без привязки к одному конкретному банку задач

Как находят решение: примеры опорных сценариев

Сценарий 1: $y' = y \cdot k(x)$ или $y' = f(x) \cdot y$

Если уравнение приводит к зависимости y' пропорционально самой функции y , его часто удаётся записать как $y'/y = k(x)$. Тогда интегрирование даёт экспоненциальный вид решения, а постоянная появляется естественно.

Сценарий 2: $y' + p(x)y = q(x)$ (линейный вариант)

Для линейного уравнения важно найти множитель, который переводит левую часть в производную некоторого выражения. После этого остаётся выполнить одно интегрирование и затем подставить получившуюся функцию обратно.



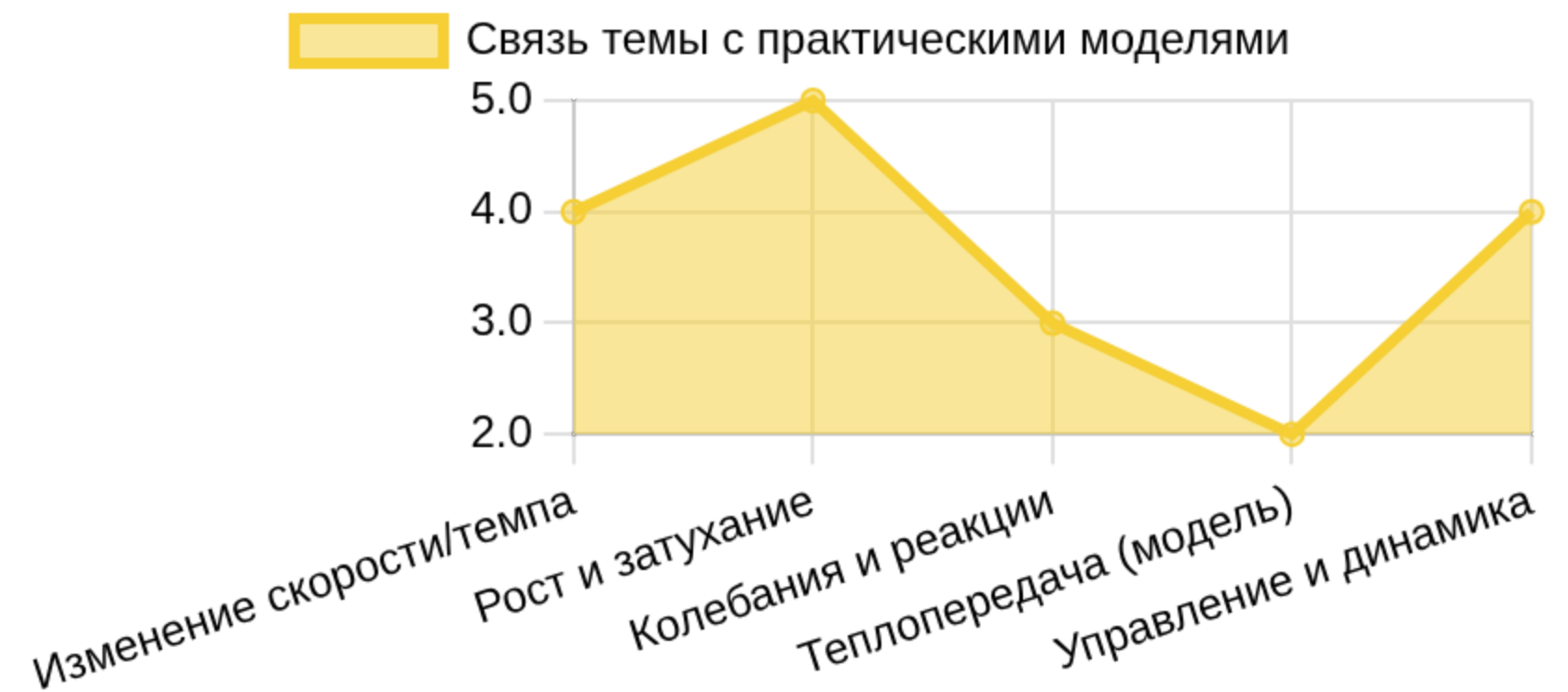
Типичные ошибки при уравнениях с производными

- ▶ Первая группа ошибок — неверное дифференцирование: забывают множитель по правилу произведения или неверно сокращают степени. В результате вычисленная y' уже не соответствует исходному $y(x)$.
- ▶ Третья ошибка связана с интегрированием: забывают произвольную постоянную или «теряют» её при последующих преобразованиях. Если есть начальные условия, их нужно применять именно после общего решения.
- ▶ Вторая группа — неправильное приведение к стандартному виду. Например, линейное уравнение может выглядеть похоже, но при неаккуратных преобразованиях меняются знаки у $p(x)$ и $q(x)$.
- ▶ Наконец, часто пропускают проверку подстановкой. Даже небольшая логическая неточность (область значений, неверная замена y') сразу видна при подстановке в исходное уравнение.

Где встречаются уравнения с неизвестной функцией и производными

Производные описывают скорость изменения, поэтому дифференциальные модели естественно возникают в физике, экономике и технике при анализе динамики и переходных процессов.

Наибольшая доля приложений связана с моделированием изменения параметров во времени или по координате, где производная становится «мерой» интенсивности изменений.



Обзорные сведения школьной программы по межпредметным связям, без конкретных статистических данных

Сводка ключевых формул и ориентиров

Таблица собирает правила, которые чаще всего нужны для уравнений с неизвестной функцией и производными: распознавание формы и базовые переходы к интегрированию.

Общая стратегия одна: сначала привести уравнение к узнаваемому виду, затем выполнить интегрирование и только после этого использовать начальные условия и проверку.

Ситуация	Что сделать	Итоговый ход
Разделяется	Разнести y и x	$\int g(y)dy = \int f(x)dx$
Линейное 1-го порядка	Привести к $y'+p(x)y=q(x)$	Свести к производной выражения
Присутствует y''	Снизить порядок заменой	Обозначить y' и снова решить 1-го порядка
Есть начальные условия	Применить после общего решения	Найти константы и проверить

Материалы школьного курса по дифференциальным уравнениям базового уровня

Итог: уравнение с производными — ЭТО ЯЗЫК ИЗМЕНЕНИЙ

Геометрия пространственных связей сменяется здесь точным языком функций и их скорости изменения: вы распознаёте форму уравнения, сводите её к стандартным преобразованиям и получаете решение, проверяя подстановкой.