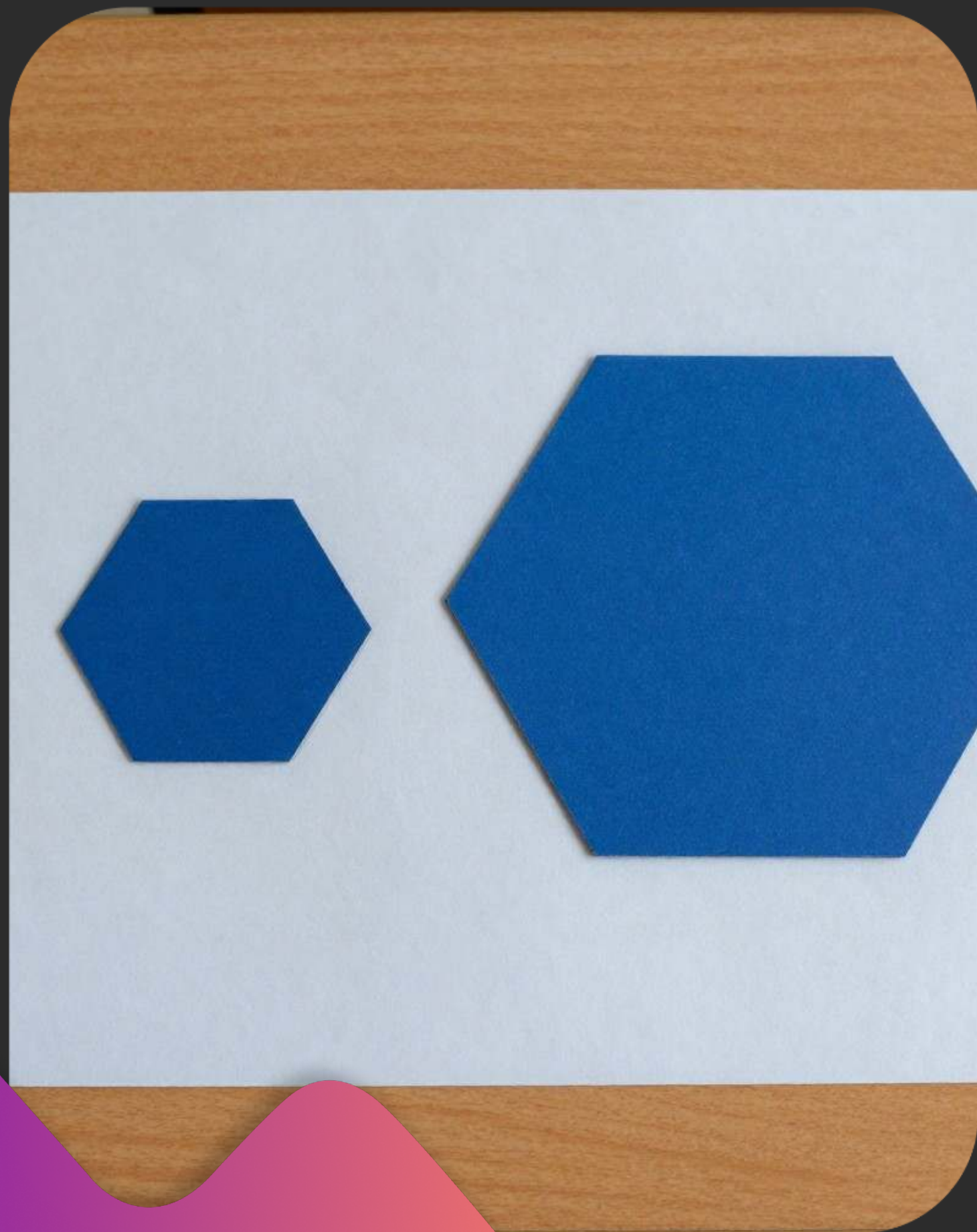


Гомотетия: как фигуры увеличиваются и уменьшаются

Один закон меняет размер, но сохраняет форму фигуры.



Где видна гомотетия в жизни

Гомотетия помогает понять, почему одинаковые по форме объекты могут быть разного размера: на картах, в планах, макетах, фотографиях и чертежах пропорции остаются верными.



Определение гомотетии

1. Центр преобразования

У гомотетии есть неподвижная точка — центр O . Именно от него отсчитываются все расстояния до исходной точки и её образа, поэтому положение центра задаёт всё преобразование.

2. Направление точки

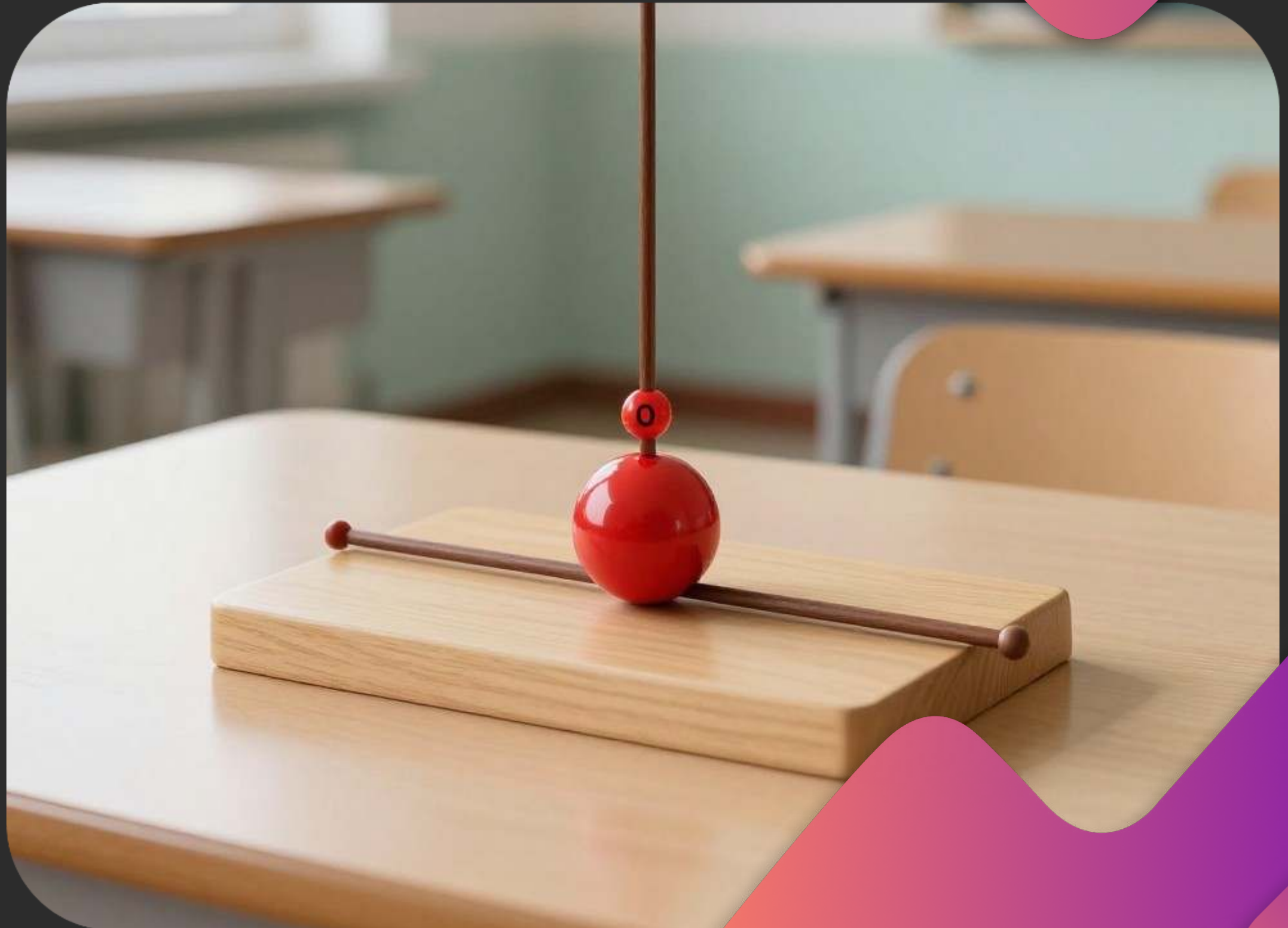
Точка A переходит в точку A' на луче OA или на его продолжении. Это означает, что исходная точка, её образ и центр всегда лежат на одной прямой.

3. Изменение расстояния

Расстояние от центра до образа меняется по правилу $OA' = |k| \cdot OA$. Один и тот же коэффициент действует на все точки фигуры, поэтому сохраняются пропорции её частей.

4. Роль знака k

Если k положительный, точки A и A' находятся по одну сторону от центра. Если k отрицательный, образ оказывается по другую сторону, как будто точка прошла через центр.



Центр гомотетии и образ точки

Центр остаётся на месте

Точка O не смещается при преобразовании и служит опорой для построения образа. Все лучи и расстояния сравниваются именно с ней, поэтому центр называют неподвижной точкой.

Одна прямая для пары точек

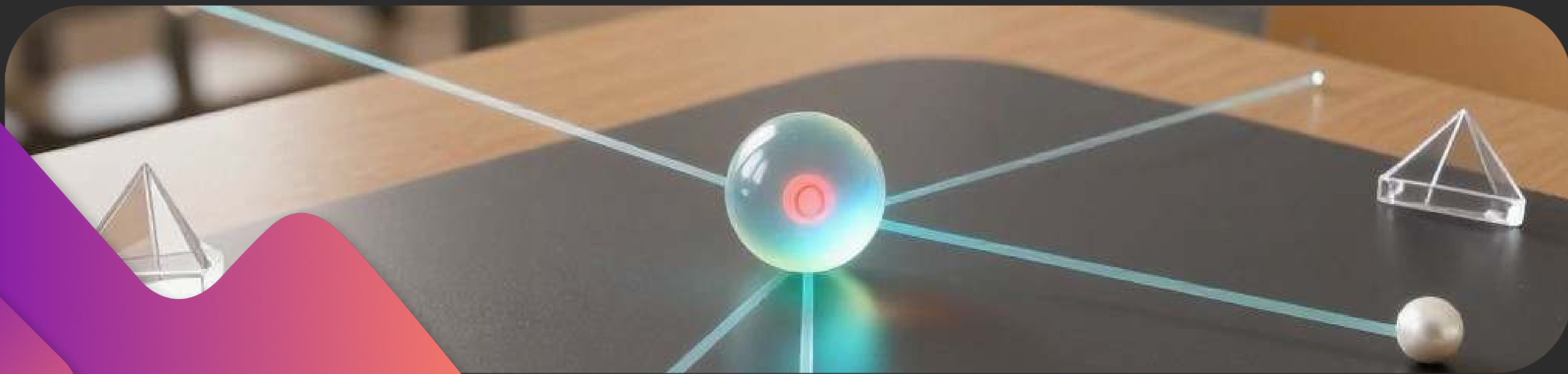
Исходная точка и её образ всегда находятся на одной прямой с центром гомотетии. Это удобный признак: если точки не выстраиваются на одной линии, преобразование задано неверно.

Как работает коэффициент

При $k = 2$ расстояния от центра удваиваются, при $k = 1$ фигура не меняется, а при $0 < k < 1$ образ становится меньше исходной фигуры.

Зачем это нужно

Такое правило позволяет быстро строить подобные фигуры без лишних измерений. Достаточно знать центр и коэффициент, чтобы восстановить образ любой вершины и всей фигуры.



Как меняется расстояние при разных коэффициентах

k	Действие	Пример
3	Увеличение в 3 раза	Точка в 2 см → 6 см
$\frac{1}{2}$	Уменьшение в 2 раза	Точка в 8 см → 4 см
-2	Увеличение в 2 раза через центр	Точка переходит на другую сторону
-1	Центральная симметрия	Точка зеркально меняется

Свойства гомотетии из школьной геометрии

Таблица показывает, как знак и модуль коэффициента влияют на размер и положение образа.

Модуль коэффициента показывает, во сколько раз меняется расстояние, а знак — по какую сторону от центра окажется образ.

Длина отрезка при разных коэффициентах гомотетии



Расчёт по формуле $OA' = |k| \cdot OA$ для отрезка 4 см

На практике один и тот же коэффициент одинаково действует на все отрезки фигуры, а не только на один пример.

Чем больше модуль коэффициента, тем длиннее становится образ. Зависимость линейная: длина возрастает прямо пропорционально $|k|$.

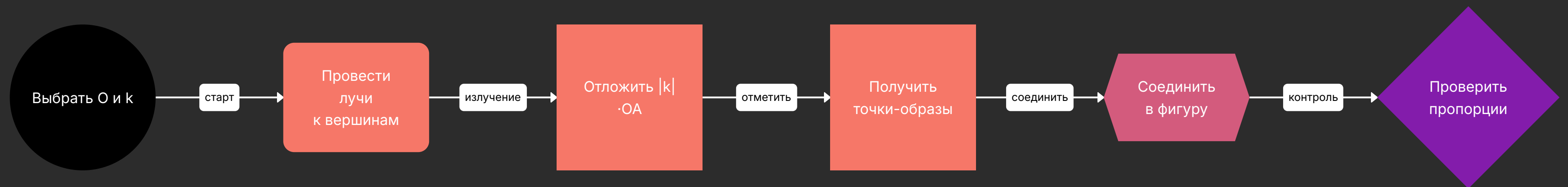
Квадрат коэффициента показывает, что площадь растёт быстрее, чем длины сторон: если стороны удваиваются, площадь становится в четыре раза больше.

4 раза
увеличивается площадь
фигуры
при коэффициенте 2.

Свойство площади при гомотетии: $S' = k^2S$

Построение образа фигуры при гомотетии

Последовательность построения по заданному центру и коэффициенту



Гомотетия и подобные треугольники

Одинаковая форма

При гомотетии треугольник переходит в подобный треугольник. Углы остаются равными, поэтому фигуры выглядят одинаково, хотя одна из них может быть больше или меньше другой.

Пропорциональные стороны

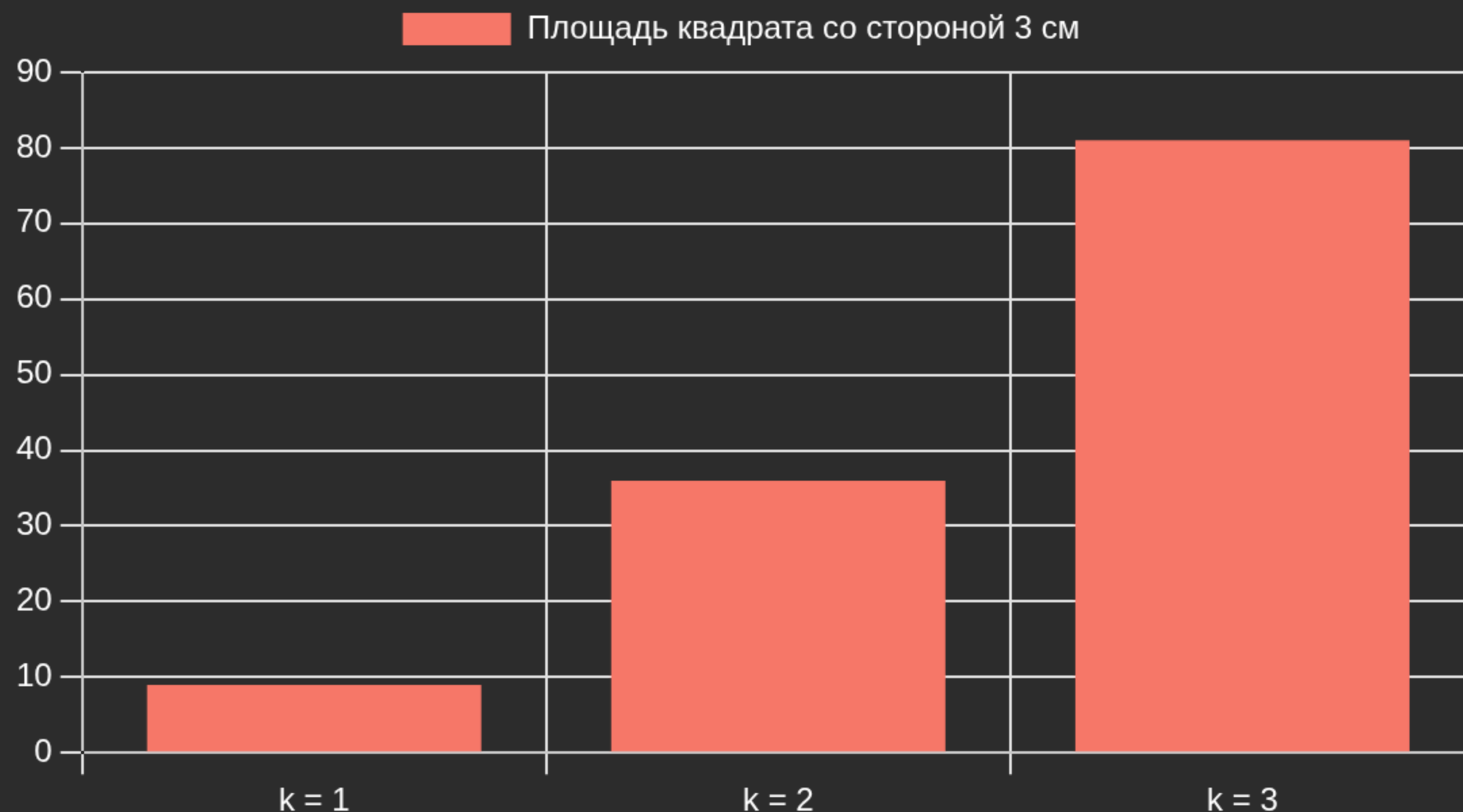
Соответствующие стороны меняются в одном и том же отношении. Если сторона первого треугольника равна 5 см, а коэффициент равен 1,5, то соответствующая сторона станет 7,5 см.

Удобство для измерений

Гомотетия позволяет быстро находить неизвестные длины без полного пересчёта всех элементов. Достаточно знать одну сторону и коэффициент, чтобы восстановить остальные размеры образа.



Как коэффициент влияет на площадь



Расчёт по формуле $S' = k^2S$ для квадрата со стороной 3 см

Для площади важно не только увеличение сторон, но и то, что изменение происходит по квадрату коэффициента.

Площадь растёт намного быстрее линейных размеров: при трёхкратном увеличении сторон она увеличивается уже в девять раз.

Отрицательный коэффициент гомотетии

1.

Образ по другую сторону

При отрицательном коэффициенте точка-образ лежит на той же прямой, но уже по другую сторону от центра. Расстояние меняется по модулю коэффициента, поэтому размер сохраняет нужный масштаб.

2.

Направление меняется

Фигура не только увеличивается или уменьшается, но и как бы «переворачивается» относительно центра. Из-за этого ориентация расположения точек становится противоположной, хотя форма и углы остаются теми же.

3.

Особый случай $k = -1$

Если коэффициент равен -1 , каждая точка переходит в симметричную относительно центра. Такое преобразование называют центральной симметрией: расстояния сохраняются, а образ совпадает по размеру с исходной фигурой.



Гомотетия в реальных примерах

Пример	Масштаб	Изменение
Карта	1:1000	уменьшение в 1000 раз
Макет здания	1:50	уменьшение в 50 раз
Фото 20×30 → 10×15	1:2	уменьшение в 2 раза

В реальных объектах гомотетия помогает удобно уменьшать или увеличивать изображения, сохраняя пропорции и форму. Масштаб показывает, во сколько раз изменены размеры.

Во всех примерах сохраняются форма и пропорции, а меняется только размер. Масштаб позволяет быстро переводить реальные длины в размеры чертежа или модели.

Условия задания; примеры масштабов из школьной геометрии.

Чем гомотетия отличается от движения



Размер не одинаковый

При движении фигура переносится, поворачивается или отражается, но не меняет размер. При гомотетии все линейные размеры умножаются на один и тот же коэффициент.



Сохраняются пропорции

Оба преобразования сохраняют форму и соответствие точек, поэтому фигуры остаются узнаваемыми. Но только гомотетия позволяет получить уменьшенную или увеличенную копию исходной фигуры.

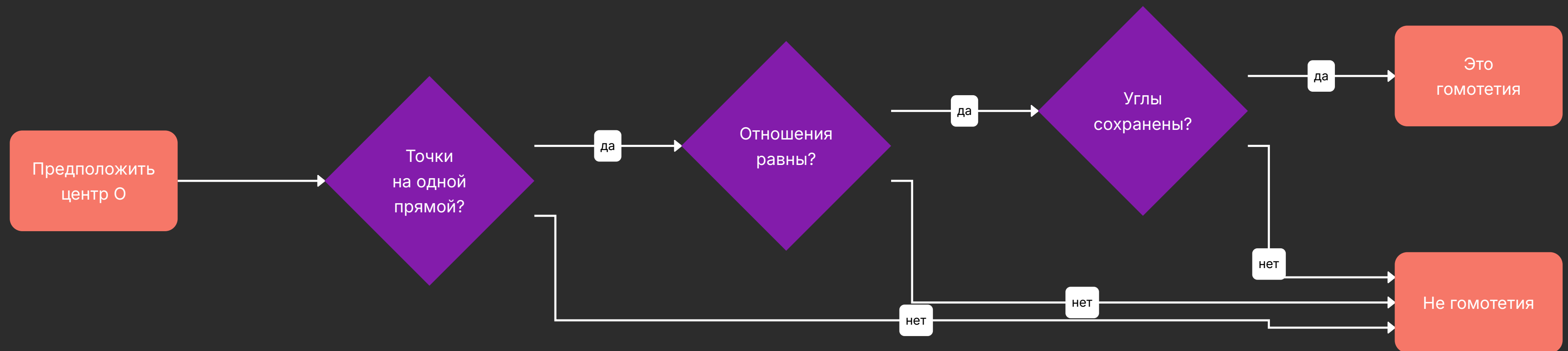


Одна точка и один коэффициент

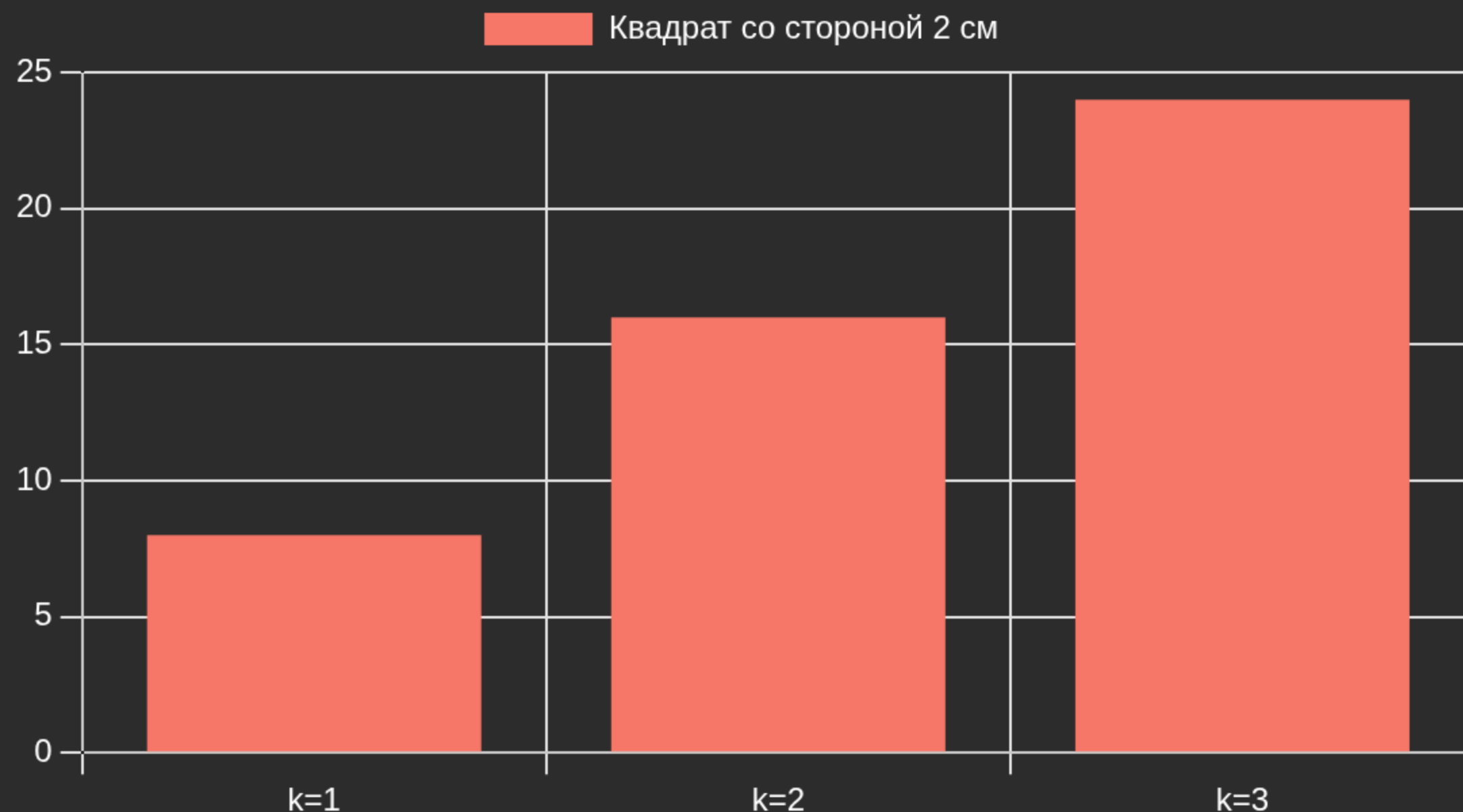
Движение описывается перемещением без центра масштабирования. Гомотетия всегда задаётся центром и одним коэффициентом, который одинаково влияет на все расстояния от центра.

Как проверить, что преобразование является гомотетией

Схема показывает последовательность проверки по положению точек, расстояниям и углам.



Изменение периметра и площади при гомотетии



Условия задания; расчёт для квадрата со стороной 2 см.

Периметр реагирует на изменение коэффициента быстрее, чем кажется на первый взгляд: он растёт так же, как длина стороны, а не как площадь.

Данные подтверждают правило: линейные размеры и периметр изменяются в $|k|$ раз, а площадь — в k^2 раз.

Гомотетия в архитектуре и искусстве

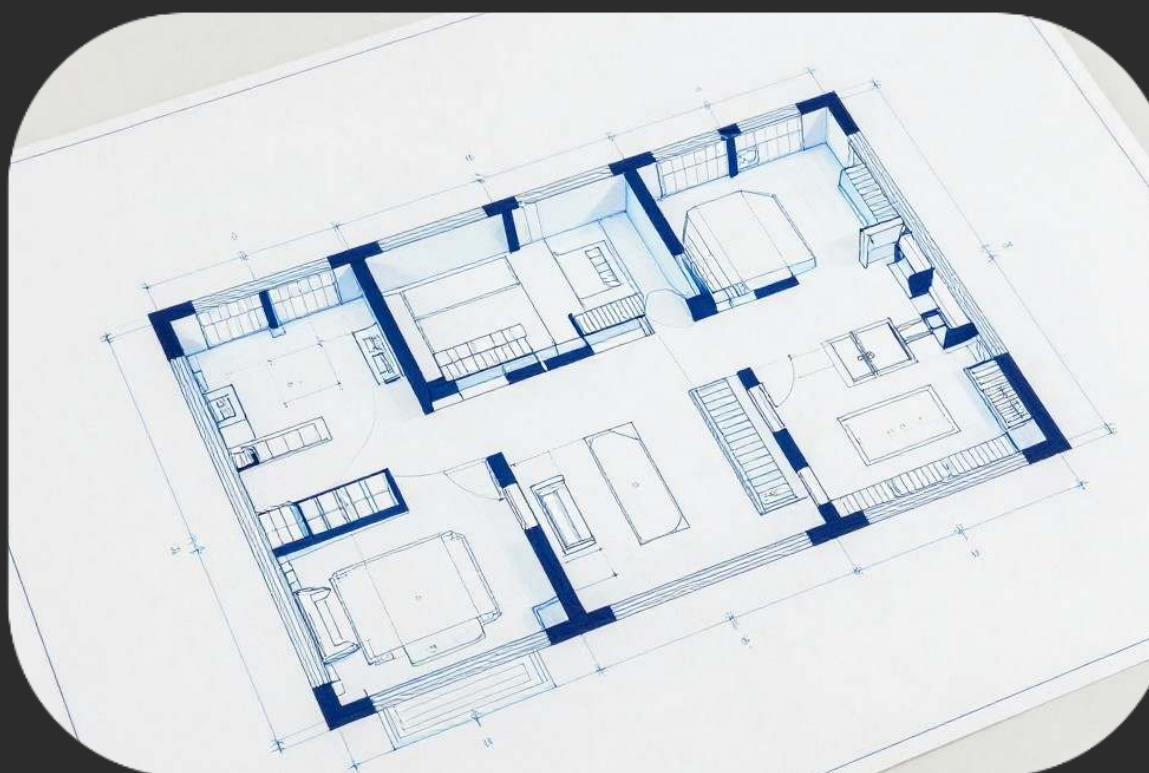
Макет, который помогает увидеть дом целиком

Архитектор делает уменьшенную модель здания, чтобы проверить пропорции фасада, расположение окон и высоту этажей. Такая модель сохраняет форму, но становится удобной для обсуждения и демонстрации.



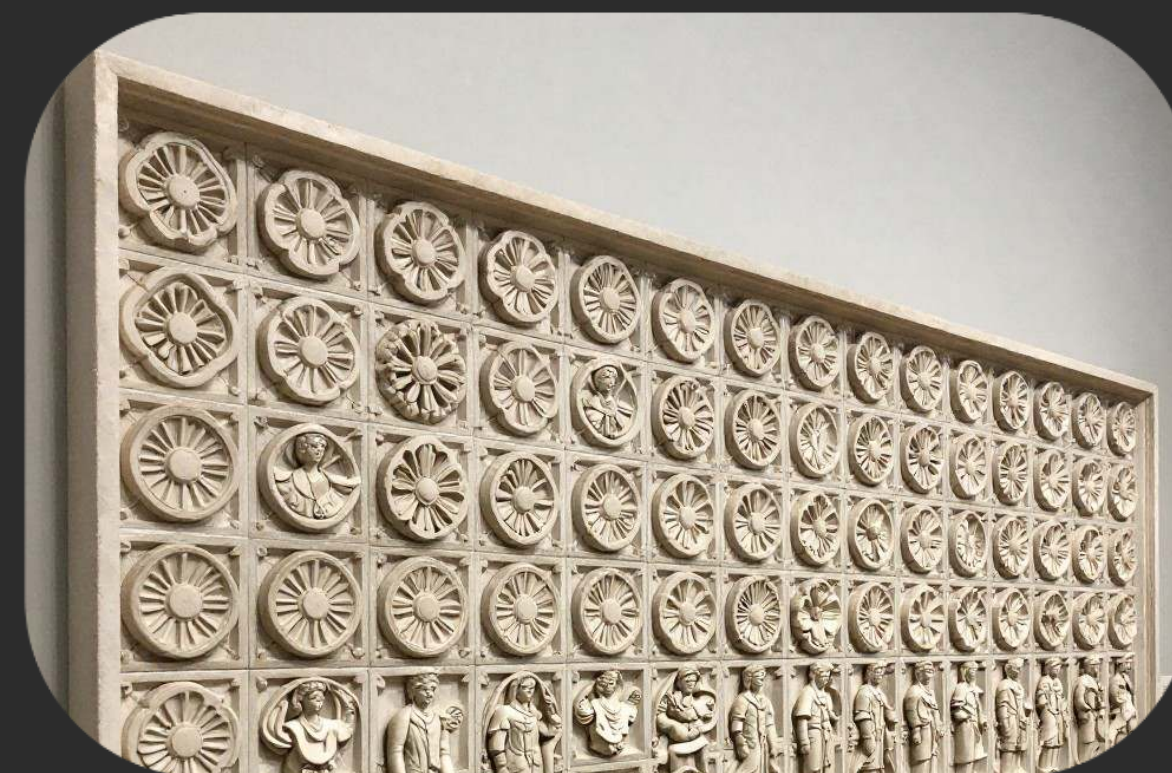
Чертёж как точная уменьшенная копия

На чертежах размеры дома или комнаты переводят в масштаб. Это позволяет разместить на листе целое здание, не теряя соотношений между стенами, дверями и окнами.



Узоры, где фигуры растут и уменьшаются

В орнаментах часто повторяются одинаковые элементы разных размеров. Благодаря этому рисунок выглядит цельным: форма остаётся узнаваемой, а изменение размера создаёт ритм и выразительность.



Типичные ошибки при изучении гомотетии

Путаница с переносом

Иногда гомотетию принимают за обычный перенос фигуры. Но при переносе размер не меняется, а при гомотетии все расстояния от центра увеличиваются или уменьшаются одинаково.

Игнорирование знака

Если не учитывать знак коэффициента, легко ошибиться в расположении образа. При отрицательном k фигура оказывается по другую сторону от центра, хотя её форма остаётся той же.

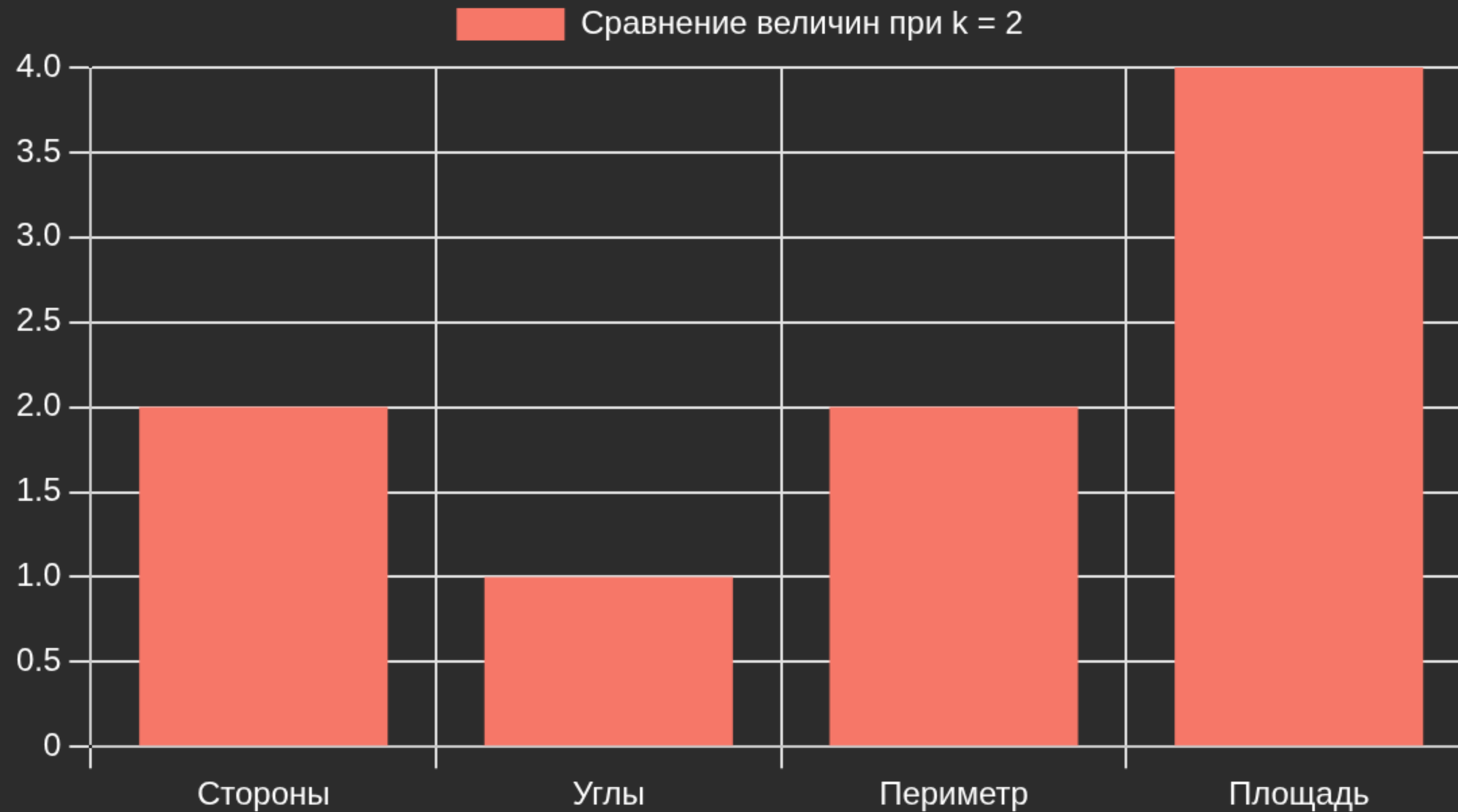
Разные коэффициенты

Некоторые пытаются растягивать разные стороны по-разному. Это неверно: настоящая гомотетия использует один коэффициент для всех соответствующих точек, сторон и расстояний.

Неверный центр

Ещё одна ошибка — выбрать точку, которая не является центром преобразования. Тогда лучи к соответствующим точкам не совпадают, и построение перестаёт быть гомотетией.

Что сохраняется и что меняется при гомотетии



Условия задания; сравнительная модель для случая $k = 2$.

На схеме удобно видеть, что не все характеристики фигуры изменяются одинаково: одни остаются неизменными, другие зависят от коэффициента по разным правилам.

Углы сохраняются, стороны и периметр растут пропорционально $|k|$, а площадь — как k^2 . При $k=2$ площадь увеличивается в 4 раза.

Алгоритм решения задач на гомотетию

1. Найти данные

Определите центр гомотетии и коэффициент k . Без этих данных невозможно понять, как именно должна измениться фигура и в каком направлении строить образ.

2. Сравнить масштаб

Выясните, увеличивается фигура или уменьшается, а также положителен коэффициент или отрицателен. Это помогает сразу понять, где будет расположен образ относительно центра.

3. Провести лучи

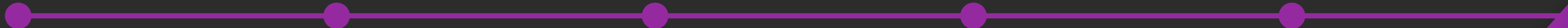
Соедините центр с вершинами исходной фигуры. Эти лучи задают направление, по которому будут находиться соответствующие точки образа.

4. Отложить расстояния

На каждом луче отложите новое расстояние, равное $|k|$ от исходного. Так получают точки образа, которые соответствуют вершинам исходной фигуры.

5. Проверить результат

Соедините полученные точки и убедитесь, что стороны параллельны, углы равны, а отношения длин совпадают. Если всё верно, задача решена правильно.



Гомотетия: форма та же, размер другой

Гомотетия показывает, как одна и та же фигура может стать больше или меньше, не теряя своей формы. Зная коэффициент и центр, можно уверенно решать задачи и понимать масштаб вокруг себя.