

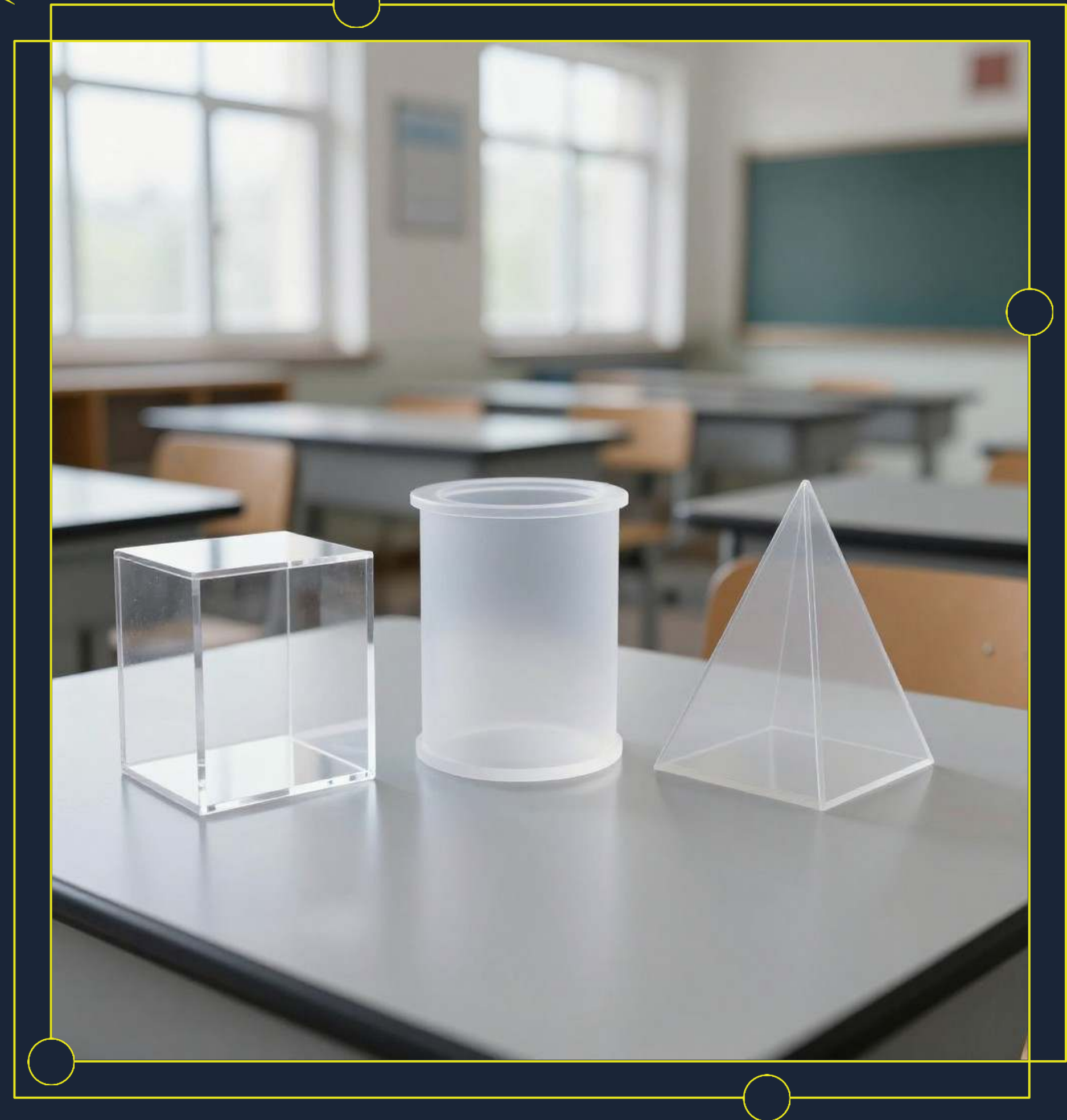


Площади поверхностей и объёмы геометрических фигур

Изучаем внешнюю оболочку и внутреннюю
вместимость объёмных фигур.

Зачем нужны площадь поверхности и объём

Эти величины помогают считать расход материалов и вместимость предметов: от коробок и аквариумов до баков и упаковки. Важно различать квадратные и кубические единицы, чтобы не ошибиться в вычислениях и понять смысл формул геометрии.



Поверхность фигуры и развертка

Из чего состоит поверхность

У многогранника поверхность образована всеми гранями, а у тел вращения — основаниями и боковой поверхностью. Именно эти части учитывают при вычислении площади поверхности.

Что даёт развертка

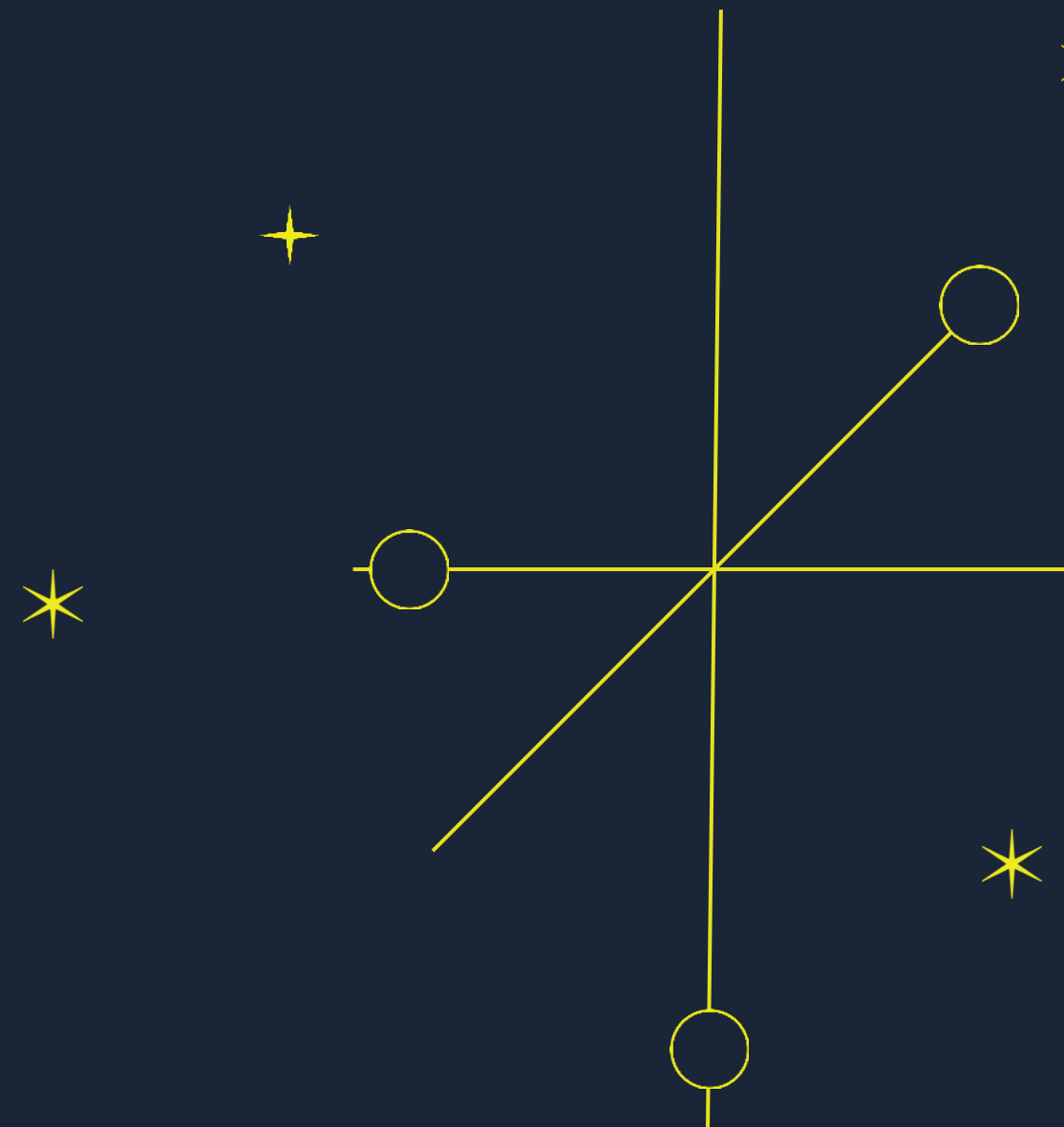
Развертка переводит пространственную фигуру в плоский рисунок. На ней видно, какие части нужно измерить, а затем сложить, чтобы получить полную площадь поверхности.

Куб и параллелепипед

Для куба и прямоугольного параллелепипеда развертка состоит из квадратов и прямоугольников. Это помогает не пропустить ни одну грань и правильно составить сумму площадей.

Цилиндр на плоскости

Развертка цилиндра включает два круга и прямоугольник, который соответствует боковой поверхности. По ней удобно понять, откуда берётся формула полной площади цилиндра.



Куб: равные грани и простые формулы

1 Строение куба

У куба шесть одинаковых квадратных граней, двенадцать рёбер и восемь вершин. Благодаря полной симметрии эта фигура особенно удобна для первых вычислений.

2 Площадь поверхности

Площадь поверхности куба находят по формуле $S = 6a^2$, потому что каждая грань имеет площадь a^2 , а всех граней шесть. Здесь a — ребро куба.

3 Объём куба

Объём куба вычисляют по формуле $V = a^3$. Это значит, что внутри помещается кубический объём, равный произведению трёх одинаковых измерений.

4 Пример вычисления

Если ребро куба равно 4 см, то площадь поверхности составляет 96 см^2 , а объём — 64 см^3 . Один и тот же размер даёт разные результаты.



Как изменяются площадь поверхности и объём куба



На графике видно, что обе величины растут не одинаково: у объёма рост заметно быстрее, чем у площади поверхности.

При увеличении ребра в 2 раза площадь возрастает в 4 раза, а объём — в 8 раз.

По формулам $S = 6a^2$ и $V = a^3$; расчёты для $a = 1, 2, 3, 4$ см

Прямоугольный параллелепипед: три измерения

Три размера

У этой фигуры есть длина, ширина и высота. Все три измерения нужны одновременно, потому что без любого из них вычисление площади и объёма будет неполным.

Формулы

Площадь поверхности находят по формуле $S = 2(ab + bc + ac)$, а объём — по формуле $V = abc$. Они учитывают все пары измерений и весь внутренний объём.

Пример из жизни

Такую форму часто имеют коробки, шкафы и комнаты. Поэтому задачи на прямоугольный параллелепипед легко связать с реальными предметами, которые можно измерить линейкой.



Формулы площади поверхности и объёма для основных фигур

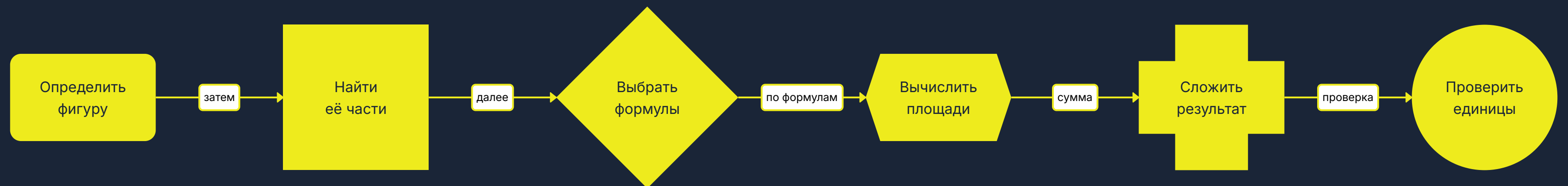
Сравните основные формулы и единицы измерения для самых важных пространственных фигур.

Все формулы площади дают квадратные единицы, а формулы объёма — кубические; это главный ориентир при проверке ответа.

Фигура	Площадь	Объём	Единицы
Куб	$S = 6a^2$	$V = a^3$	$\text{см}^2/\text{см}^3$
Параллелепипед	$S = 2(ab+bc+ac)$	$V = abc$	$\text{м}^2/\text{м}^3$
Призма	Сумма поверхностей	$V = S_{\text{осн}} \cdot h$	квадратные/кубические
Цилиндр	$2\pi r^2 + 2\pi rh$	$V = \pi r^2 h$	квадратные/кубические

Как находят площадь поверхности фигуры

Последовательность вычислений для развёртки и полного подсчёта всех частей поверхности.



Призма: основания и боковые грани

1

Два основания

У призмы всегда два равных основания, лежащих в параллельных плоскостях. Именно они задают форму фигуры и помогают быстро определить её объём.

2

Боковые грани

Боковые грани соединяют соответствующие стороны оснований. Их площадь входит в полную площадь поверхности, поэтому при решении задачи нельзя ограничиваться только основаниями.

3

Формула объёма

Объём призмы находят по формуле $V = S_{\text{осн}} \cdot h$, где $S_{\text{осн}}$ — площадь основания, а h — высота. Высота показывает расстояние между основаниями.

4

Прямая призма

У прямой призмы боковая поверхность связана с периметром основания. Это удобно, когда основание уже известно, а нужно быстро посчитать полную площадь.



Цилиндр: круги и боковая поверхность

Два круга

У цилиндра два одинаковых круговых основания. Между ними расположена боковая поверхность, которая при развёртке превращается в прямоугольник.

Формула площади

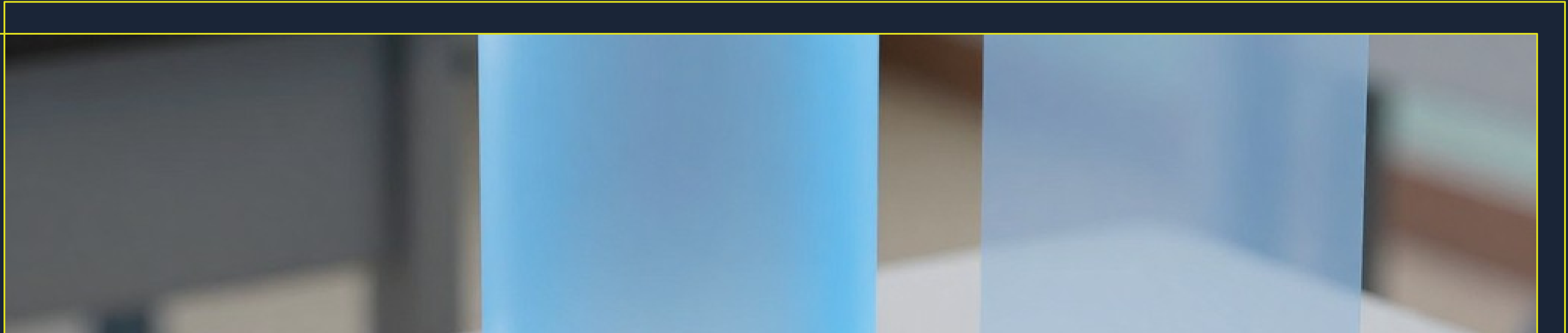
Полная площадь цилиндра равна $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Первое слагаемое отвечает за основания, второе — за боковую поверхность.

Формула объёма

Объём цилиндра вычисляют по формуле $V = \pi r^2 h$. В неё входят радиус основания и высота, поэтому изменение любого из этих размеров влияет на результат.

Пример расчёта

При радиусе 3 см и высоте 10 см объём составляет примерно $282,6 \text{ см}^3$, а площадь поверхности — примерно $245,0 \text{ см}^2$.



Влияние высоты на объём цилиндра



При постоянном радиусе объём меняется только из-за высоты, поэтому зависимость получается линейной и легко прослеживается на диаграмме.

При неизменном радиусе объём цилиндра прямо пропорционален высоте: чем выше цилиндр, тем больше его вместимость.

По формуле $V = \pi r^2 h$; $r = 2$ см, расчётные значения для $h = 5, 10$ и 15 см.

$$4\pi r^2$$

— формула площади поверхности шара, потому что вся его поверхность расположена на одинаковом расстоянии от центра.

Для шара площадь поверхности зависит только от радиуса: чем больше радиус, тем заметнее рост площади и объёма.

Формулы площади и объёма шара из школьного курса геометрии.

Единицы измерения площади и объёма

1 Квадратные единицы

Площадь поверхности всегда записывают в мм^2 , см^2 или м^2 , потому что она показывает размер внешней оболочки фигуры и сравнивает плоские величины.

2 Кубические единицы

Объём измеряют в мм^3 , см^3 или м^3 , так как речь идёт о внутреннем пространстве, которое может вместить тело или ёмкость.

3 Связь с литрами

В практических задачах полезно помнить, что 1 л равен 1000 см^3 . Это помогает быстро переводить объёмы воды, воздуха или других жидкостей.

4 Проверка размеров

Перед вычислением все размеры нужно привести к одним и тем же единицам. Иначе даже верная формула даст неправильный ответ из-за несогласованных величин.

Типичные ошибки при вычислении площади и объёма

Анализ типичных ошибок при решении задач на площадь поверхности и объём.

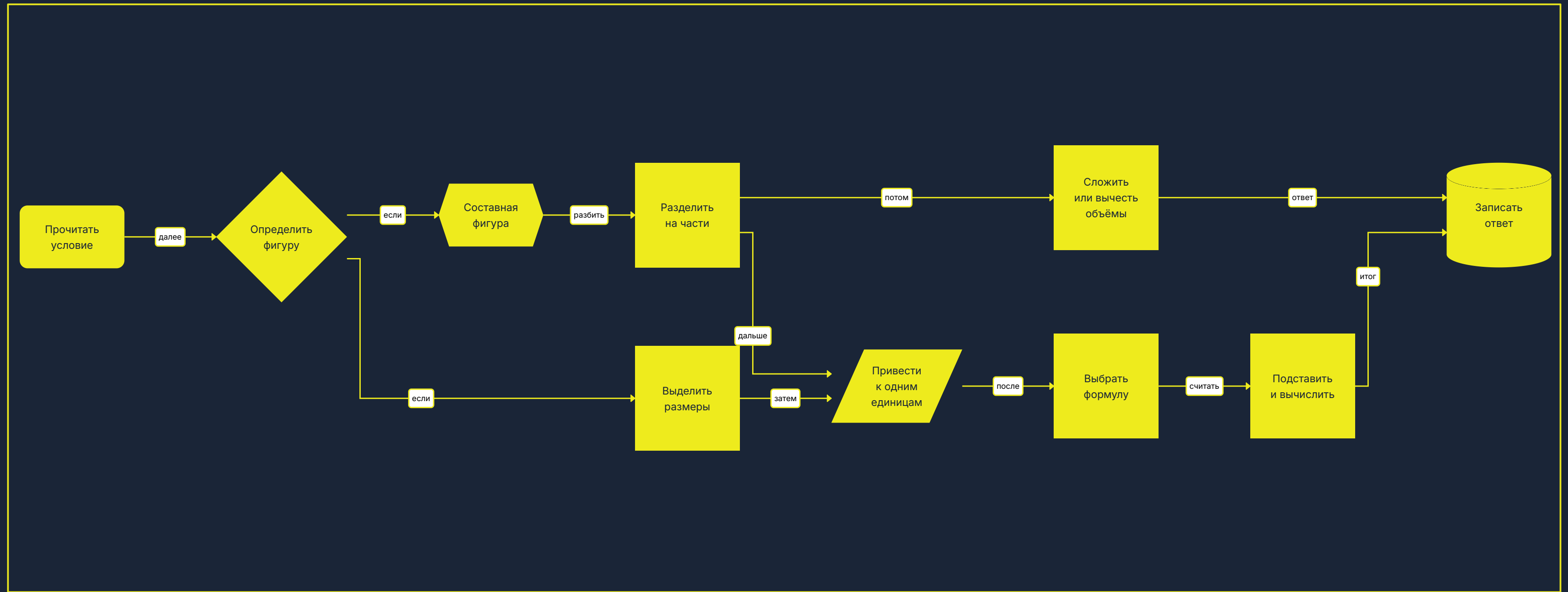
Ошибка	Как проверить
Не умножили на 2	Проверить формулу
Путают см ² и см ³	Смотреть единицы
Взяли диаметр	Нужен радиус
Учили не всё	Сделать полный подсчёт

Сравните частые ошибки с правильными проверками, чтобы не терять баллы из-за невнимательности.

Большинство ошибок связано не с вычислениями, а с невнимательностью к формуле, единицам и полному учёту частей фигуры.

Алгоритм решения задач на объём

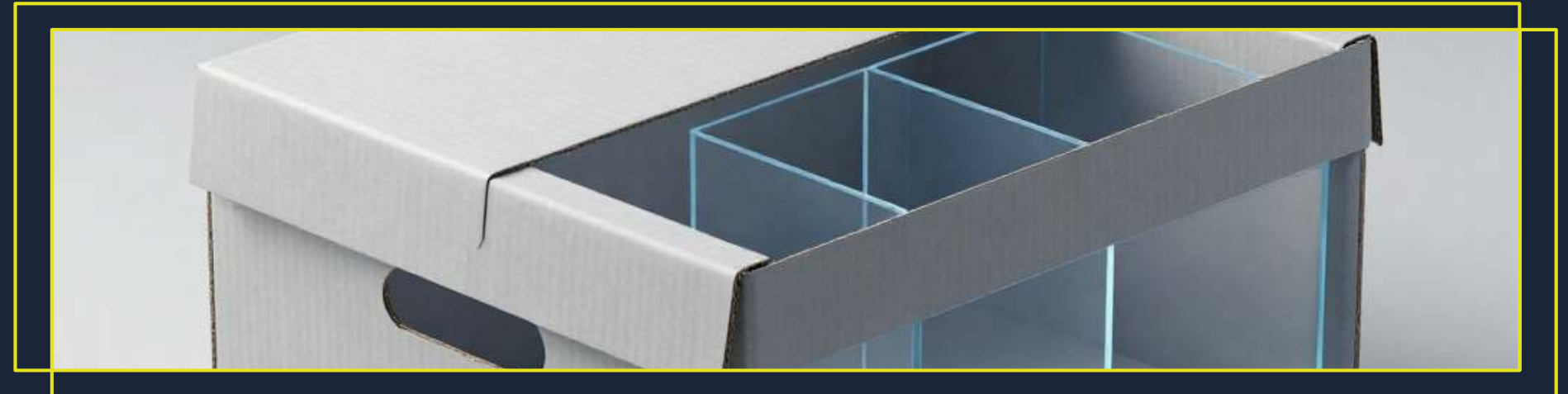
Последовательность подходит для кубов, параллелепипедов, призм и цилиндров, включая составные фигуры.



Составные фигуры в реальных объектах

Коробка с крышкой

Такой предмет удобно представить как несколько прямоугольных блоков. Сначала находят объём каждой части отдельно, а затем объединяют результаты. Этот приём помогает не запутаться, когда форма кажется сложной только на первый взгляд.



Аквариум и бак

Ёмкости часто состоят из прямоугольных и цилиндрических частей. При вычислениях важно понять, где находится каждая часть, и использовать подходящую формулу для каждой из них, чтобы получить точный объём и площадь поверхности.



Бутылка и упаковка

Сложная форма может включать цилиндр, призму и другие простые тела. Разделение на знакомые фигуры делает задачу понятной и показывает, как геометрия помогает оценивать реальные предметы вокруг нас.



Где используются площади поверхности и объёмы



Чем сложнее форма изделия, тем важнее заранее оценить материал, вместимость и расход ресурсов ещё на этапе проекта.

Наибольший спрос на такие вычисления связан с упаковкой и строительством, но они нужны и в моделировании, и в повседневных задачах.

Условные данные для учебной круговой диаграммы, 2025.

Практический смысл формул



Экономия материалов

Меньшая площадь поверхности помогает тратить меньше картона, краски, плёнки и упаковки. Это особенно важно, когда нужно изготовить много одинаковых предметов.



Вместимость и полезный объём

При выборе коробок, баков или резервуаров важнее не только размер, но и сколько они могут вместить. Формулы объёма показывают это без лишних измерений.



Выбор лучшей формы

Сравнивая разные фигуры, можно понять, какая конструкция расходует меньше материала и при этом сохраняет нужную вместимость. Так математика помогает принимать практичные решения.

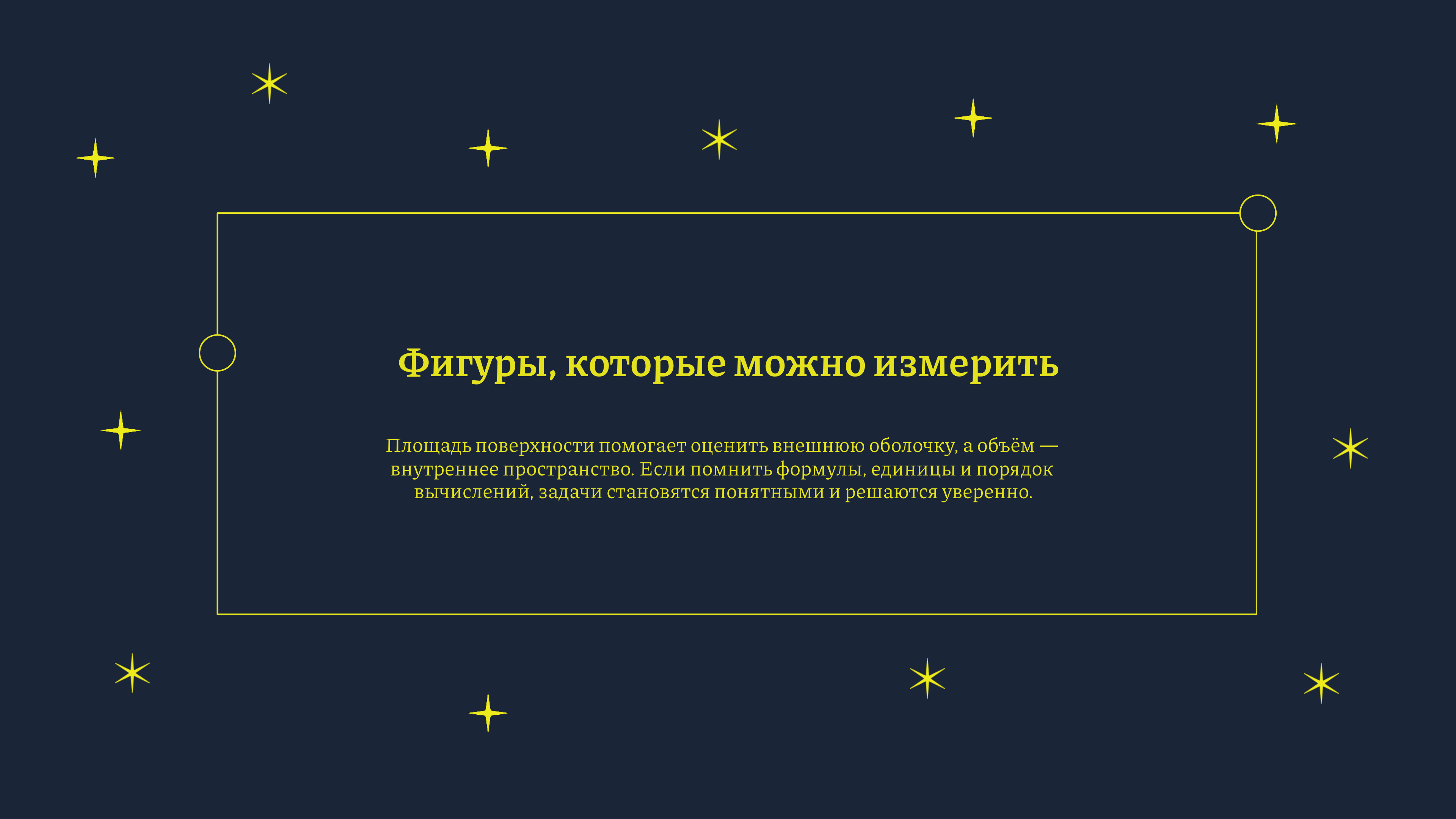
Краткий справочник формул

Соберите основные формулы в одной таблице, чтобы быстро сверяться при решении задач.

У разных фигур свои обозначения, но общий принцип один: площадь описывает внешнюю оболочку, а объём — внутреннюю вместимость.

Фигура	Обозначения	S	V
Куб	a	$6a^2$	a^3
Параллелепипед	a, b, c	$2(ab+bc+ac)$	abc
Призма	S _{осн} , h	$S_{бок}+2S_{осн}$	$S_{осн} \cdot h$
Цилиндр	r, h	$2\pi r^2+2\pi rh$	πr^2h
Шар	r	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$

Школьные формулы площади поверхности и объёма пространственных фигур.



Фигуры, которые можно измерить

Площадь поверхности помогает оценить внешнюю оболочку, а объём — внутреннее пространство. Если помнить формулы, единицы и порядок вычислений, задачи становятся понятными и решаются уверенно.