

Сочетания в комбинаторике

Выбираем объекты без учёта порядка.



Выбор без порядка в комбинаторике

Комбинаторика помогает считать варианты выбора. Сочетания применяют тогда, когда важен состав, а не порядок: например, команда, набор карточек или группа учеников.



Что такое сочетания

Один и тот же состав

Набор объектов считается одним вариантом, если меняется только порядок элементов. В сочетаниях важен сам состав: {А, Б, В} и {Б, В, А} — это один выбор.

Примеры выбора

Сочетания удобно применять в задачах, где нужно выбрать несколько объектов из группы. Например, можно выбрать 3 дежурных из 10 или 5 книг из 12.

Когда порядок не важен

Если нужно взять 2 билета из 8, то каждый набор из двух билетов считается отдельно, но порядок внутри набора не влияет на результат.

Перестановки и сочетания

Сравним два типа подсчёта: когда порядок важен и когда он не влияет на ответ.

Если смысл выбора не меняется при перестановке элементов, нужно считать сочетания.

Ситуация	Порядок	Результат
Перестановки	важен	разный
Сочетания	не важен	одинаковый

Сравнение базовых определений комбинаторики.

Где применяют сочетания



Команда

Когда выбирают команду, важен только её состав. Если участники те же самые, но стоят в другом порядке, ответ не меняется, значит подходит подсчёт сочетаний.



Отбор предметов

При отборе предметов учитывают, какие именно объекты взяли, а не их очередь. Это типично для задач с книгами, карточками, цветами или деталями.



Ингредиенты

В рецептах и наборах ингредиентов важен список компонентов. Смена порядка не создаёт новый набор, поэтому здесь тоже используют сочетания.



Лотерейный набор

Если выигрывает любой набор билетов, а не их расположение, порядок не влияет на результат. Такие задачи естественно решаются через сочетания.

Модель выбора: n и k

1. Дано множество

Сначала задают количество всех объектов, обозначая его n . Это общее множество, из которого нужно сделать выбор, не повторяя элементы.

2. Нужно выбрать

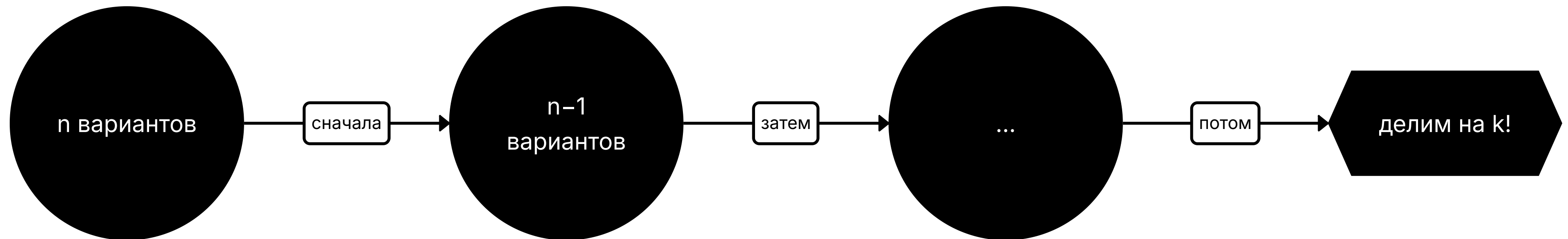
Затем выбирают k объектов. Условие задачи требует, чтобы k не превышало n , иначе выбрать столько элементов просто невозможно.

3. Что считаем

Полученный выбор рассматривают как подмножество размера k . Именно число таких подмножеств и требуется найти в задачах на сочетания.

От умножения к делению

От упорядоченных выборов к числу сочетаний через деление на число перестановок.



Формула сочетаний

Запись формулы

Формула сочетаний записывается так: $C(n, k) = n! / (k! (n-k)!)$. Она показывает, сколько способов выбрать k объектов из n , если порядок внутри выбора не важен.

Как читать и использовать

Читают это так: «число сочетаний из n по k ». Формула удобна тем, что сразу даёт ответ для любых допустимых значений n и k .

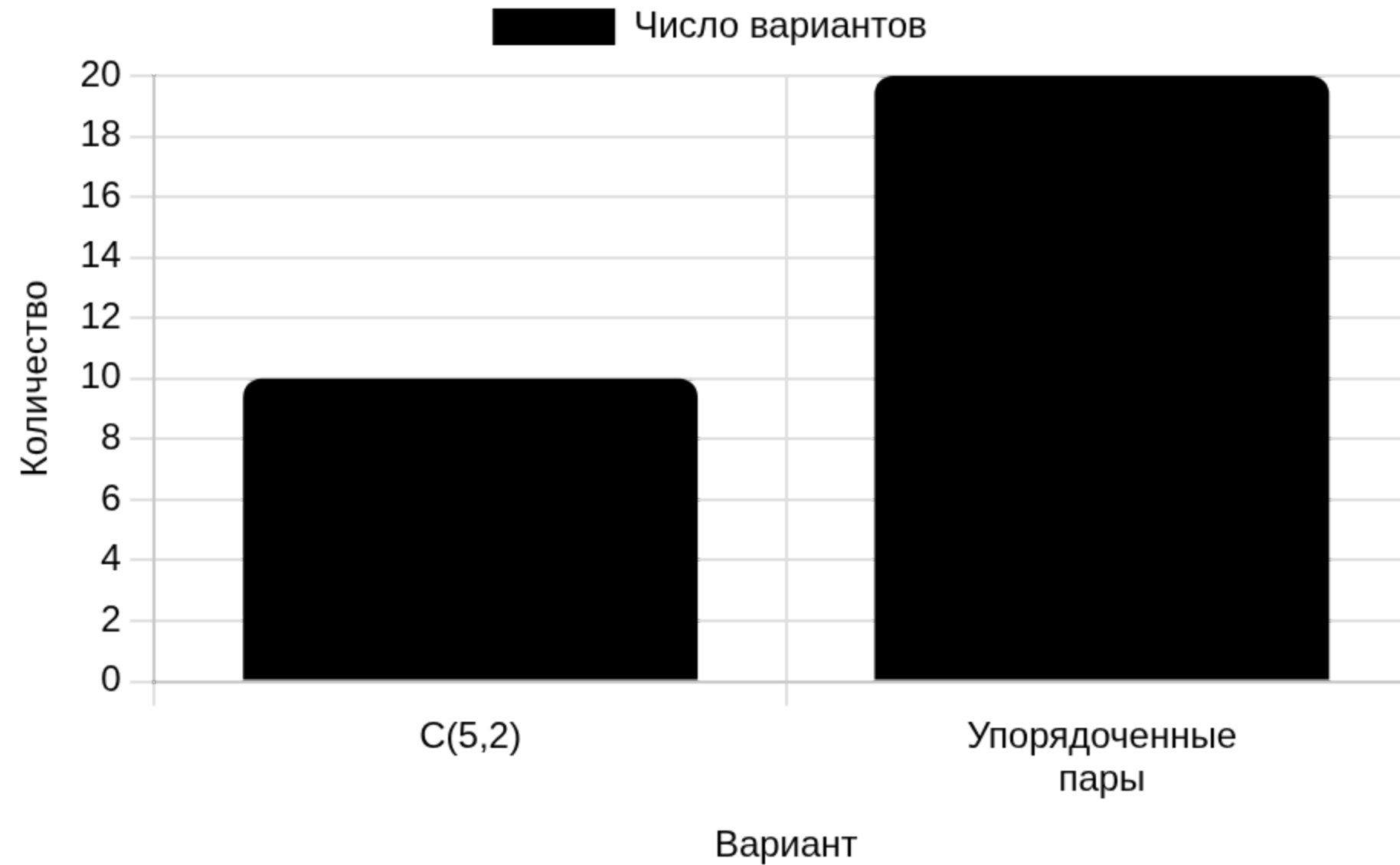
0!

**равен единице, чтобы
формулы сочетаний
оставались
согласованными.**

Факториал нужен, чтобы сначала посчитать все упорядоченные варианты, а потом убрать повторяющиеся перестановки одного и того же набора.

Стандартное соглашение в комбинаторике.

Мини-пример с числами



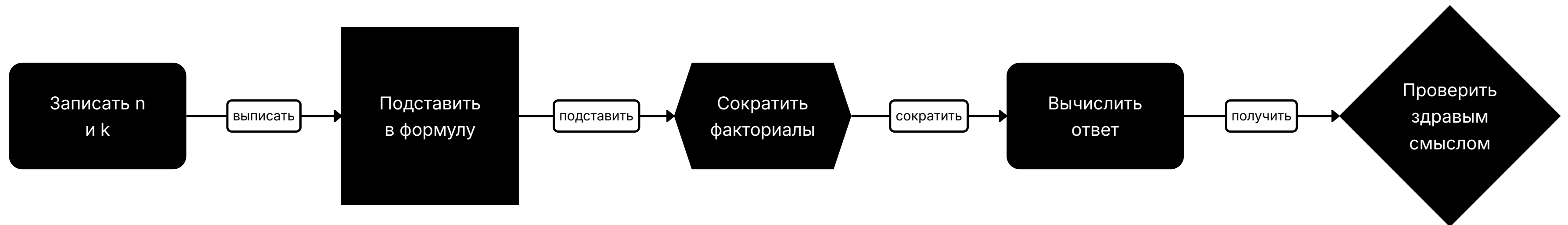
Для пяти объектов число сочетаний заметно меньше числа упорядоченных пар.

Сочетаний вдвое меньше, потому что порядок внутри пары не учитывается.

Расчёт по формуле $C(5,2)=10$; упорядоченные пары: $5 \times 4 = 20$.

Как считать сочетания шаг за шагом

Алгоритм вычисления $C(n, k)$ на примере $C(6, 3)$



Практическая задача: команда

Смысл выбора

В задаче важно не место в списке, а сам состав команды. Поэтому из 8 учеников выбирают 3 именно как сочетание, без учёта очередности.

Подсчёт вариантов

Подставляем данные в формулу: $C(8,3) = \frac{8!}{(3! \cdot 5!)}$. После сокращения получаем 56 возможных команд. Это число показывает, сколько разных троек можно собрать.

Проверка решения

Если поменять выбранных учеников местами, команда останется той же. Значит, порядок не влияет на ответ, и здесь не нужны перестановки.

Симметрия сочетаний

1.

Один и тот же выбор

Выбираем k элементов из n и получаем тот же набор, что и при мысли о невыбранных $n-k$ элементах. Это одна и та же ситуация.

2.

Удобная замена

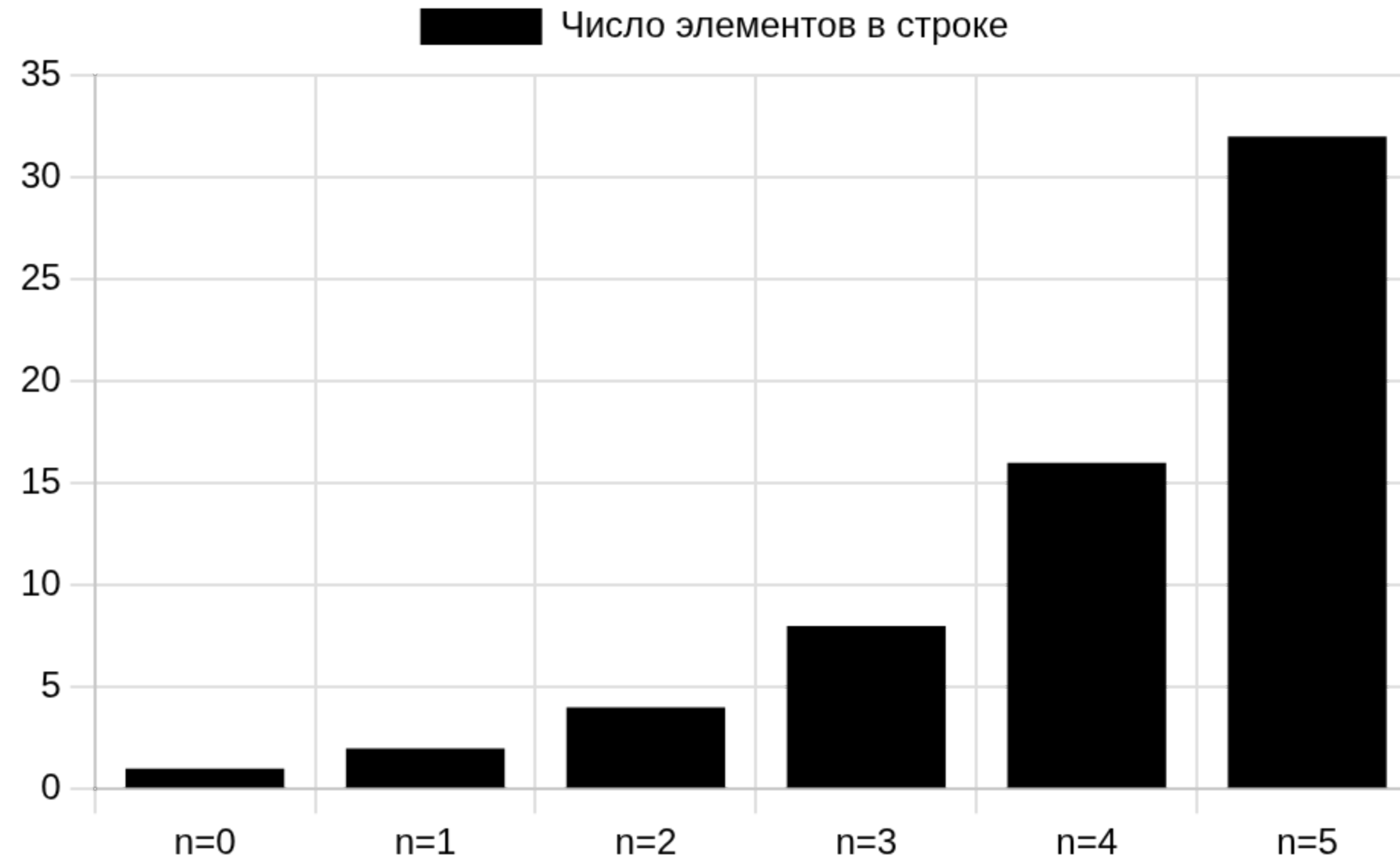
Поэтому $C(n, k) = C(n, n-k)$.
Если второе число меньше, считать обычно проще.
Например, $C(10, 8)$ удобнее заменить на $C(10, 2)$.

3.

Практическая польза

Симметрия помогает быстро проверять ответы и экономить время в задачах. Достаточно выбрать более короткий путь вычисления, а результат останется тем же.

Структура треугольника Паскаля



В строках треугольника сразу видны значения сочетаний. Чем ниже строка, тем больше вариантов выбора; центральные числа обычно растут быстрее крайних.

Каждая следующая строка строится по простому правилу суммы соседних чисел, поэтому треугольник Паскаля удобен для быстрого поиска сочетаний.

Треугольник Паскаля, построенный по правилу суммирования соседних чисел

Строка для n=4

Позиция	Значение
Край	1
Середина	6
Край	1

Строка треугольника Паскаля для n=4

В строке для n=4 числа читаются слева направо как коэффиценты сочетаний: от C(4,0) до C(4,4).

Крайние значения всегда равны 1, а середина строки даёт наибольшие числа. Это помогает быстро находить нужный коэффициент без полной формулы.

Типичные ошибки

1. Путают с перестановками

Путаница возникает, когда считают АБ и БА разными ответами. Если задача говорит только о выборе, а не о порядке, нужна формула сочетаний.

2. Неверные значения

Нельзя подставлять k больше n : выбрать больше объектов, чем есть, невозможно. Если такое получилось, значит, условие прочитано неверно или допущена ошибка в записи.

3. Ошибка в сокращении

При сокращении факториалов важно не терять множители и не сокращать лишнее. Лучше выписывать шаги аккуратно, чтобы видеть, что именно остаётся в числителе и знаменателе.

4. Неправильный смысл

Иногда считают порядок там, где он не влияет на результат. Перед вычислением полезно спросить себя: меняется ли ответ, если переставить выбранные элементы местами?

Проверь себя: три примера

Проверьте три короткие задачи и сравните свои ответы с таблицей. Здесь удобно использовать и формулу, и быстрые правила для крайних случаев.

Вторую и третью задачи можно проверить без полного вычисления: $C(n, 1)=n$ и $C(n, n-1)=n$. Это хороший способ быстро контролировать себя.

Задача

$C(7,2)$

$C(9,1)$

$C(6,4)$

Ответ

21

9

15

Вычисления по формуле сочетаний $C(n, k)$

Проверь себя: немного сложнее

Задача	Ответ
10 выбрать 4	210
12 выбрать 5	792
$C(8,3)$ и $C(8,5)$	равны

Вычисления по формуле сочетаний и свойству симметрии

Во второй тренировке главное — не торопиться и сначала выбрать удобную форму записи. Симметрия особенно полезна, когда k близко к n .

Все ответы находятся по одной логике: формула даёт число вариантов, а симметрия подтверждает равенство $C(8,3)$ и $C(8,5)$.

Короткое резюме

Смотреть на смысл

Если важен только состав группы или набора, а не порядок, выбирают сочетания. Это основной ориентир, который помогает сразу понять, какую формулу применять.

Запомнить формулу

Главная формула: $C(n, k) = n! / (k! (n-k)!)$. Она показывает число способов выбрать k объектов из n без повторений и без учёта очередности.

Проверять крайние случаи

Для быстрой проверки полезны равенства $C(n, 1) = n$ и $C(n, n-1) = n$. Они помогают заметить ошибку ещё до полного вычисления.

Использовать симметрию

Симметрия $C(n, k) = C(n, n-k)$ часто упрощает задачу. Если второе число меньше, счёт становится короче и удобнее для устного решения.

Выбор без порядка

Сочетания помогают отвечать на главный вопрос комбинаторики: сколько способов выбрать набор, если порядок не важен. Если помнить формулу, симметрию и смысл задачи, решения становятся намного проще.