

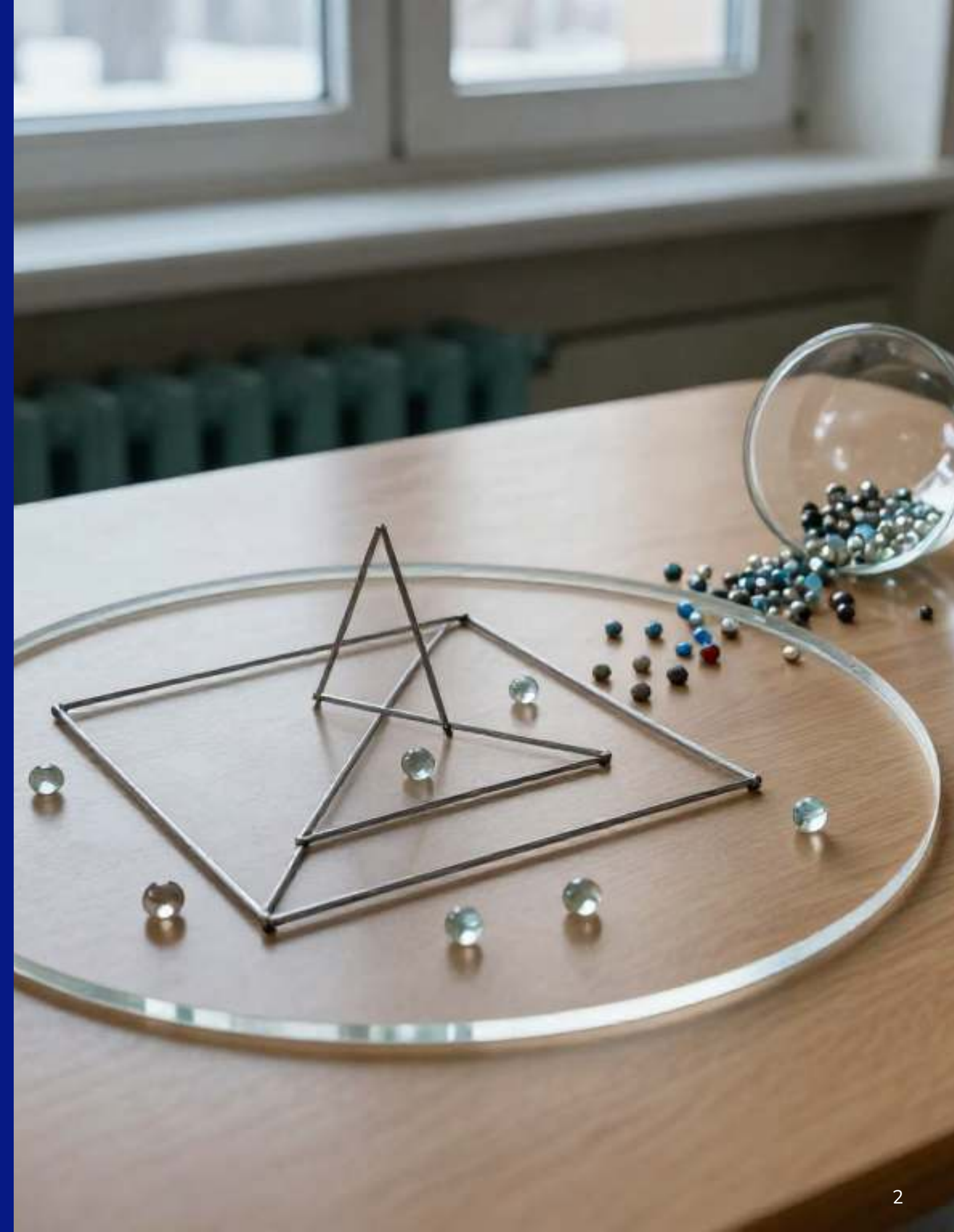
Геометрическая вероятность



Случайность можно измерить через длину, площадь и объём.

Где геометрия встречается случайность

Эта тема появляется там, где исходов слишком много
или их невозможно перечислить: на отрезке, на плоскости
и в пространстве.



Равномерный случайный выбор

Одинаковые шансы

Равномерный выбор означает, что любая точка области имеет одинаковые шансы попасть в результат, поэтому важны только размеры частей, а не их расположение.

Простые модели

Чаще всего используют отрезок, круг или прямоугольник: в таких моделях удобно показывать случайную точку и сравнивать, какая часть области подходит по условию.

Наглядность на рисунке

Сетка, мишень и отмеченная случайная точка помогают увидеть, что каждая зона области равноправна, если выбор действительно происходит без предпочтений.



Основная формула геометрической вероятности

1. Запиши отношение

Вероятность равна отношению меры благоприятной части к мере всей области выбора. В числителе всегда стоит то, что удовлетворяет условию задачи.

2. Выбери нужную меру

Для отрезка используют длину, для плоской фигуры — площадь, а для тела — объём. Выбор меры зависит от размерности объекта.

3. Не забудь про единицы

Если длины, площади или объёмы измерены в одинаковых единицах, дробь можно сокращать и получать удобный ответ без лишних вычислений.

4. Проверь границы

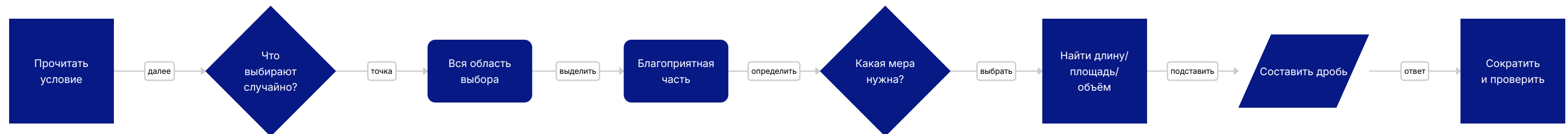
Любая вероятность лежит между нулём и единицей. Если ответ больше единицы, значит, в решении допущена ошибка в выборе области или меры.

5. Переведи в проценты

При необходимости дробь легко записать десятичной дробью или процентом, чтобы удобнее сравнивать результаты разных задач и моделей.

Как решать задачи на геометрическую вероятность

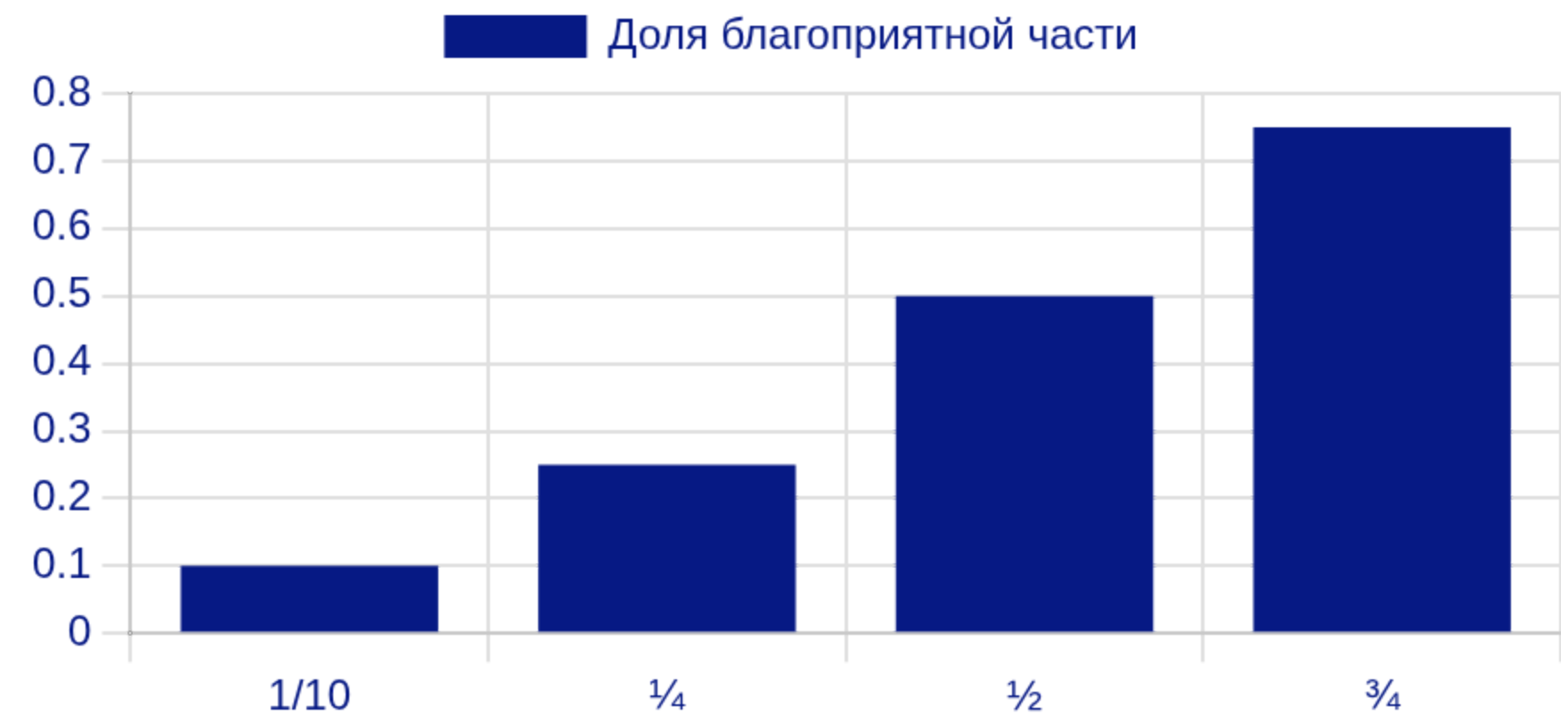
Последовательность шагов от условия к ответу



Как меняется вероятность при изменении доли области

Чем больше подходящая часть области, тем легче случайной точке попасть в неё при равномерном выборе.

Рост доли благоприятной области напрямую увеличивает вероятность события.



Иллюстративные значения по дробям $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{4}$

3/10

— вероятность попасть
в нужный участок
при длине 10 см
и благоприятной части
3 см.

На отрезке вероятность равна отношению длины
нужной части к длине всего отрезка.

Пример из условия: 10 см и 3 см

Какая мера используется в разных задачах

Объект	Мера	Пример
Отрезок	длина	точка на линии
Плоская фигура	площадь	точка в круге
Тело	объём	точка в кубе

Обобщение правил геометрической вероятности

В разных задачах выбор меры зависит от формы области и от того, что именно выбирают случайно.

Размерность объекта определяет, какую меру нужно сравнивать: длину, площадь или объём.

Площадь как основа вероятности на плоскости

1. Сравни площади

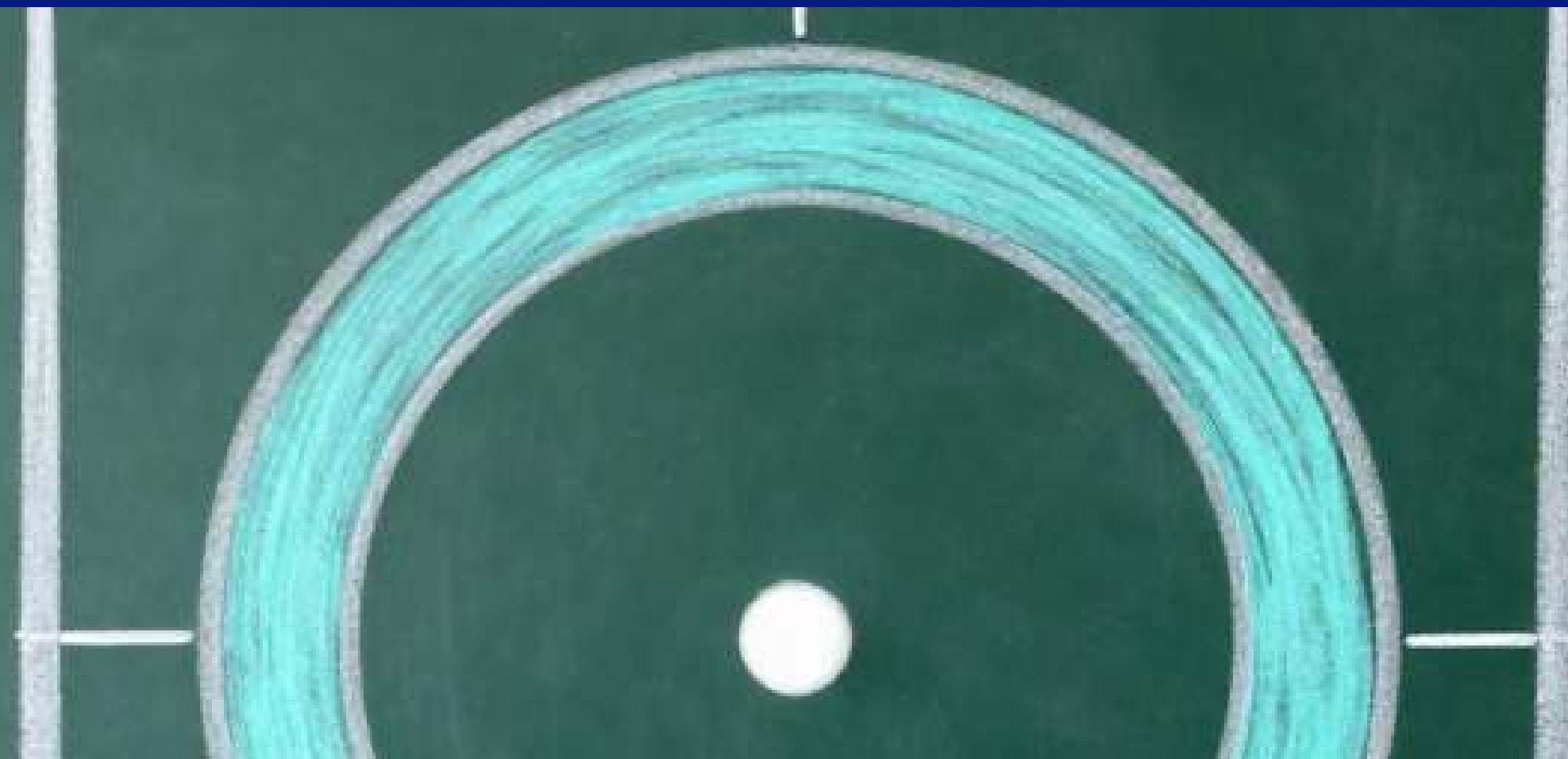
Если случайная точка выбирается внутри плоской фигуры, вероятность равна отношению площади нужной области к площади всей фигуры. Именно поэтому важны границы и размеры.

2. Удобные примеры

Часто рассматривают круг внутри квадрата или прямоугольника, потому что такие рисунки легко разбить на части и наглядно показать, где находится благоприятная область.

3. Что показать на рисунке

На схеме полезно выделить всю фигуру контуром, закрасить благоприятную часть и отметить случайную точку, чтобы сразу было видно, что сравниваются именно площади.



Связь между размером области и шансом события

График показывает один и тот же принцип для длины, площади и объёма: больше подходящая часть — выше шанс попадания.

Зависимость возрастающая: увеличение благоприятной области ведёт к росту вероятности.



Иллюстративная модель зависимости вероятности от доли области

Типичные ошибки в задачах

Путают меру

Ученик выбирает длину там, где нужна площадь, или наоборот. Из-за этого отношение частей становится неверным, хотя рисунок выглядит убедительно и ответ кажется правдоподобным.

Берут не всю область

Иногда в знаменатель попадает только часть фигуры, а не вся область выбора. Тогда вероятность теряет смысл, потому что сравнивается не с целым, а с уже уменьшенным участком.

Выход за пределы

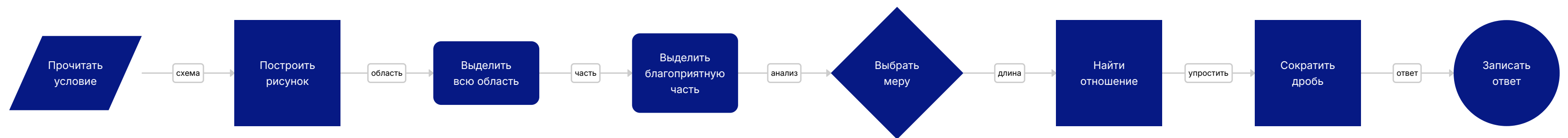
Если благоприятная часть выбрана неправильно, дробь может оказаться больше 1. Это сразу показывает ошибку: вероятность не бывает больше 100% и всегда относится к целой области.

Нет проверки условия

Полезно ещё раз перечитать задачу после вычислений. Проверка помогает убедиться, что благоприятная область действительно является частью общей, а все размеры взяты в одних единицах.

От условия к ответу

Последовательность действий при решении задач на геометрическую вероятность



Классическая и геометрическая вероятность

Модель	Основа	Пример
Классическая	исходы	кубик
Геометрическая	меры	точка на отрезке
Классическая	равновозможность	монета
Геометрическая	длина/площадь	мишень

Сравнение показывает, что способы подсчёта вероятности зависят от типа задачи и способа задания случайного выбора.

Классическая модель удобна для конечного числа исходов, а геометрическая — для непрерывных областей и измеряемых частей.

4/25

— таково отношение
площадей внутренних
и внешних кругов
в приведённом примере.

Этот результат показывает, что вероятность попадания в центральную область определяется площадями, а не просто радиусами фигур.

Пример с радиусами 2 см и 5 см из учебной темы

Равномерное распределение в случайных моделях

Без предпочтений

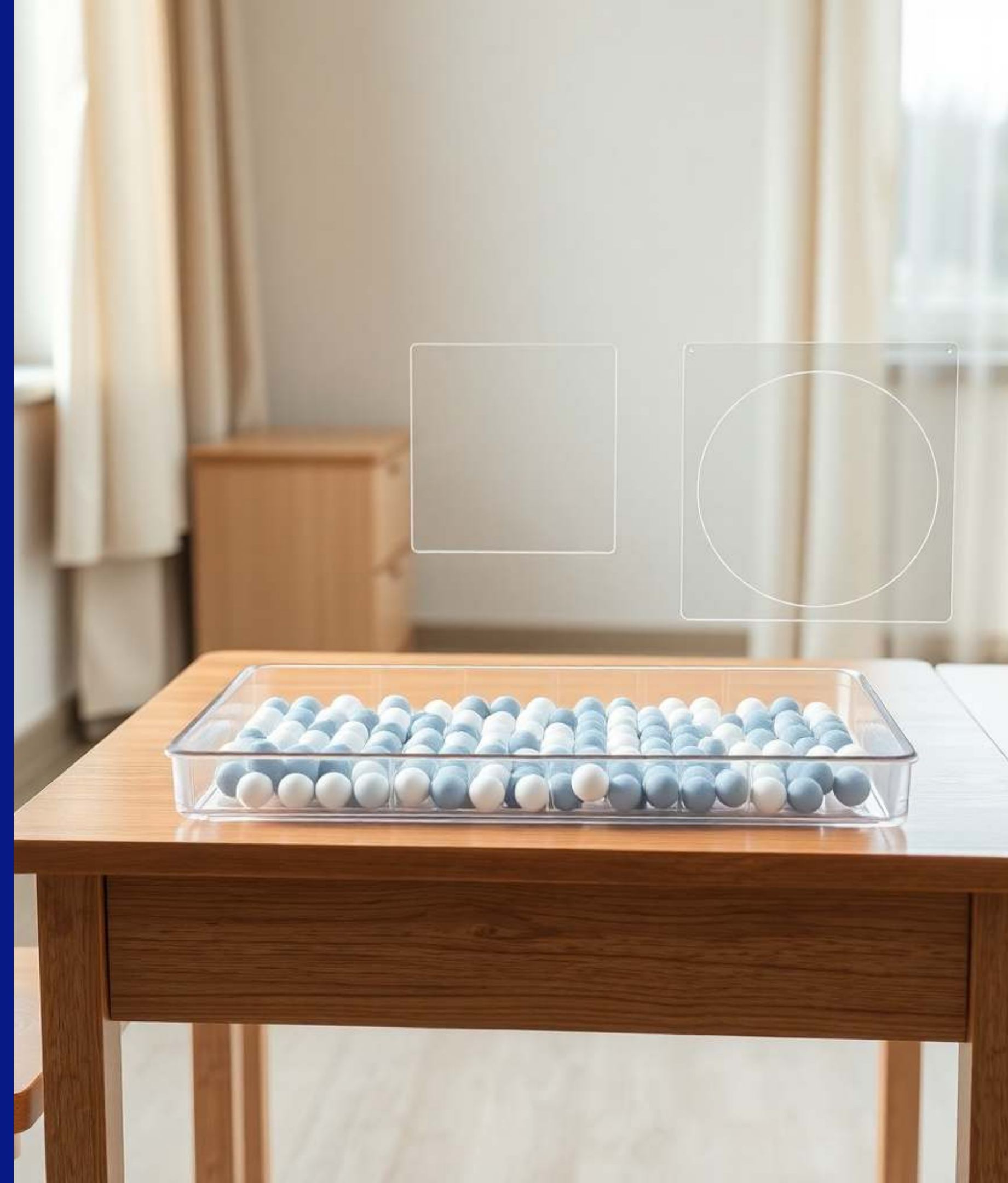
При равномерном выборе каждая точка области имеет одинаковые шансы. Поэтому отрезок, квадрат или круг рассматриваются как полностью «справедливые» области для случайного попадания.

Модели выбора

Для объяснения используют бросок точки, случайный шарик или расположение фигуры на сетке. Все эти модели помогают увидеть, что результат зависит только от доли подходящей части.

Наглядность рисунка

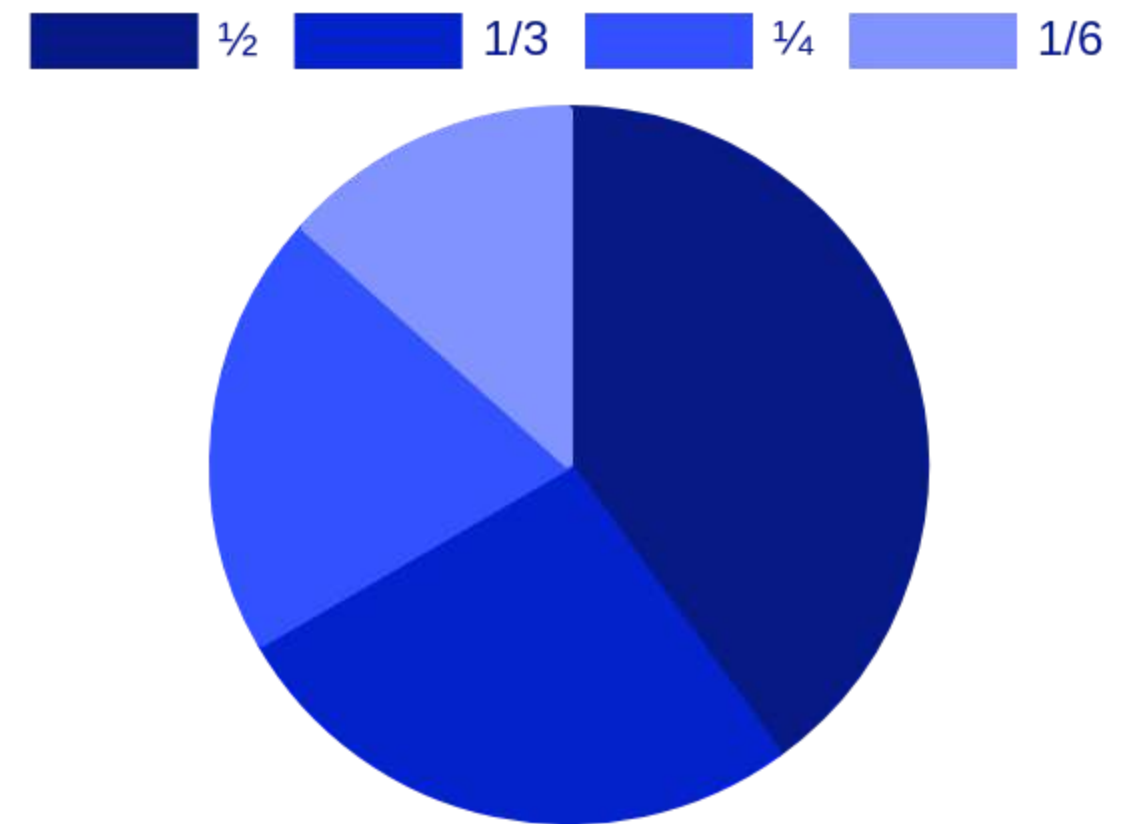
Если область разбита на равные ячейки или сектора, легче заметить, где вероятность больше. Такой рисунок помогает сравнивать части без сложных вычислений и быстрее понимать условие.



Доли и проценты в простых примерах

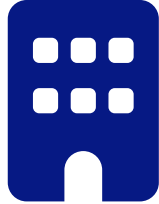
Округлённые значения помогают быстро сравнивать вероятности и переводить дроби в привычные проценты без дополнительных вычислений.

Чем меньше доля, тем меньше вероятность события; круговая диаграмма наглядно показывает порядок значений и связь дроби с процентом.



Наглядные дроби: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$

Геометрическая вероятность в жизни и задачах

	Навигация При планировании маршрутов важно оценивать, попадёт ли объект в нужную зону. Геометрическая вероятность помогает работать с картой, расстояниями и выделенными участками пространства.
	Строительство В строительных задачах важно понимать, насколько вероятно размещение элемента в заданных границах. Здесь полезны чертёж, масштаб и точное сравнение площадей или объёмов.
	Спорт На спортивных площадках и мишенях вероятность связана с попаданием в выделенную область. Такие задачи делают математику более понятной, потому что легко представить цель и границы.
	Компьютерные модели В цифровых моделях случайное размещение объектов часто описывают через доли области. Это помогает имитировать распределение точек, фигур и событий в ограниченном пространстве.

Формулы для отрезка, плоскости и пространства

Область	Формула	Мера
Отрезок	$P = l_1/l$	длина
Плоскость	$P = S_1/S$	площадь
Пространство	$P = V_1/V$	объём

Обобщение формул геометрической вероятности

Три записи отличаются мерой, но сохраняют один и тот же принцип: вероятность равна доле благоприятной части от всей области.

Во всех случаях числитель показывает подходящую часть, а знаменатель — целую область; меняется только геометрическая мера.

Что важно помнить перед решением задач

1. Определи область

Сначала нужно понять, откуда выбирается точка, отрезок или фигура. Ошибка в выборе всей области сразу делает ответ неверным, даже если дальнейшие вычисления выполнены аккуратно.

2. Выбери меру

Затем подбирают подходящую геометрическую меру: длину, площадь или объём. Она должна соответствовать самой фигуре и условию задачи, иначе сравнение частей будет некорректным.

3. Проверь ответ

После вычислений полезно проверить дробь и единицы измерения. Если результат больше 1 или получился слишком странным, значит, в схеме или подсчёте допущена ошибка.

Геометрическая вероятность: случайность, которую можно измерить

Геометрическая вероятность учит описывать случайность через длину, площадь и объём. Она делает задачи наглядными, помогает работать с долями и развивает аккуратность при решении практических примеров.