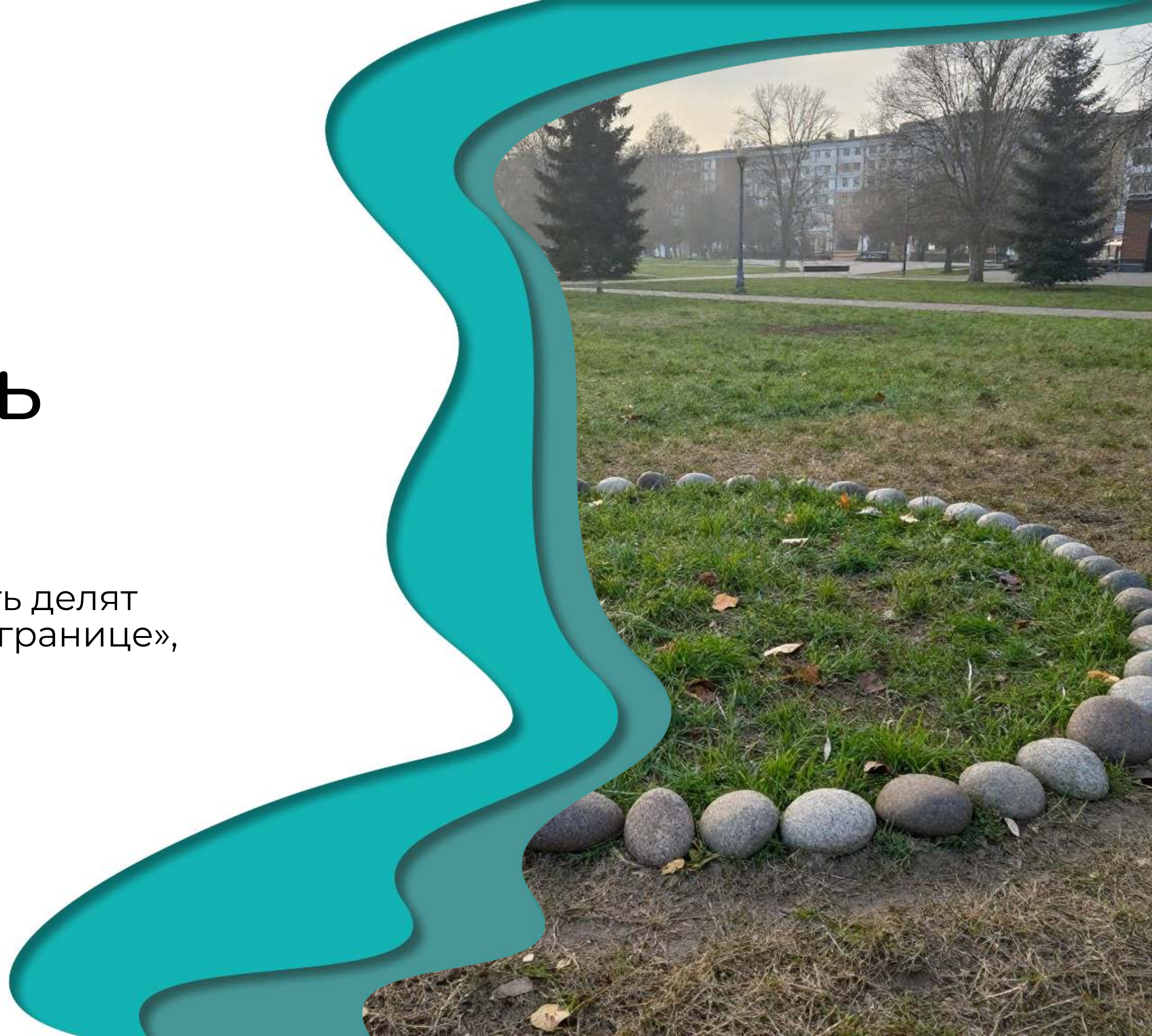


Граница и внутренность множества

Узнаем, как точка и окрестность делят пространство на «внутри», «на границе», «снаружи».



Почему это важно в школьной геометрии

В школьной геометрии множество задают отрезком, кругом, многоугольником или областью на координатной плоскости. Чтобы уверенно решать задачи, нужно различать точки внутри, на контуре и вне фигуры — и переводить рисунок в точные определения.



Окрестность точки как основа определения

- На прямой окрестность точки a — это интервал $(a-r, a+r)$ при $r>0$, который «обнимает» точку. В любой его точке проверяется, выполняется ли условие множества.
- На плоскости для точки $M(x_0, y_0)$ окрестность удобно задавать кругом радиуса r с центром в M . Тогда локально рассматриваем всё, что попадает внутрь этого малого круга.
- Именно через окрестности формулируют внутренние и граничные точки. Ведь решение зависит не только от положения точки, но и от того, что происходит в любой достаточно малой её окрестности.

Внутренняя точка множества

Определение внутренней точки

Точка называется внутренней, если существует её окрестность, целиком лежащая в множестве. Тогда вокруг точки есть «запас»: любая ближайшая внутренняя точка также принадлежит множеству.

Примеры для интервала и отрезка

Для интервала $(0,1)$ любая точка между 0 и 1 является внутренней, потому что рядом с ней всегда можно подобрать маленький интервал. Для отрезка $[0,1]$ внутренними остаются только точки из $(0,1)$: у концов любая окрестность выходит за пределы отрезка.



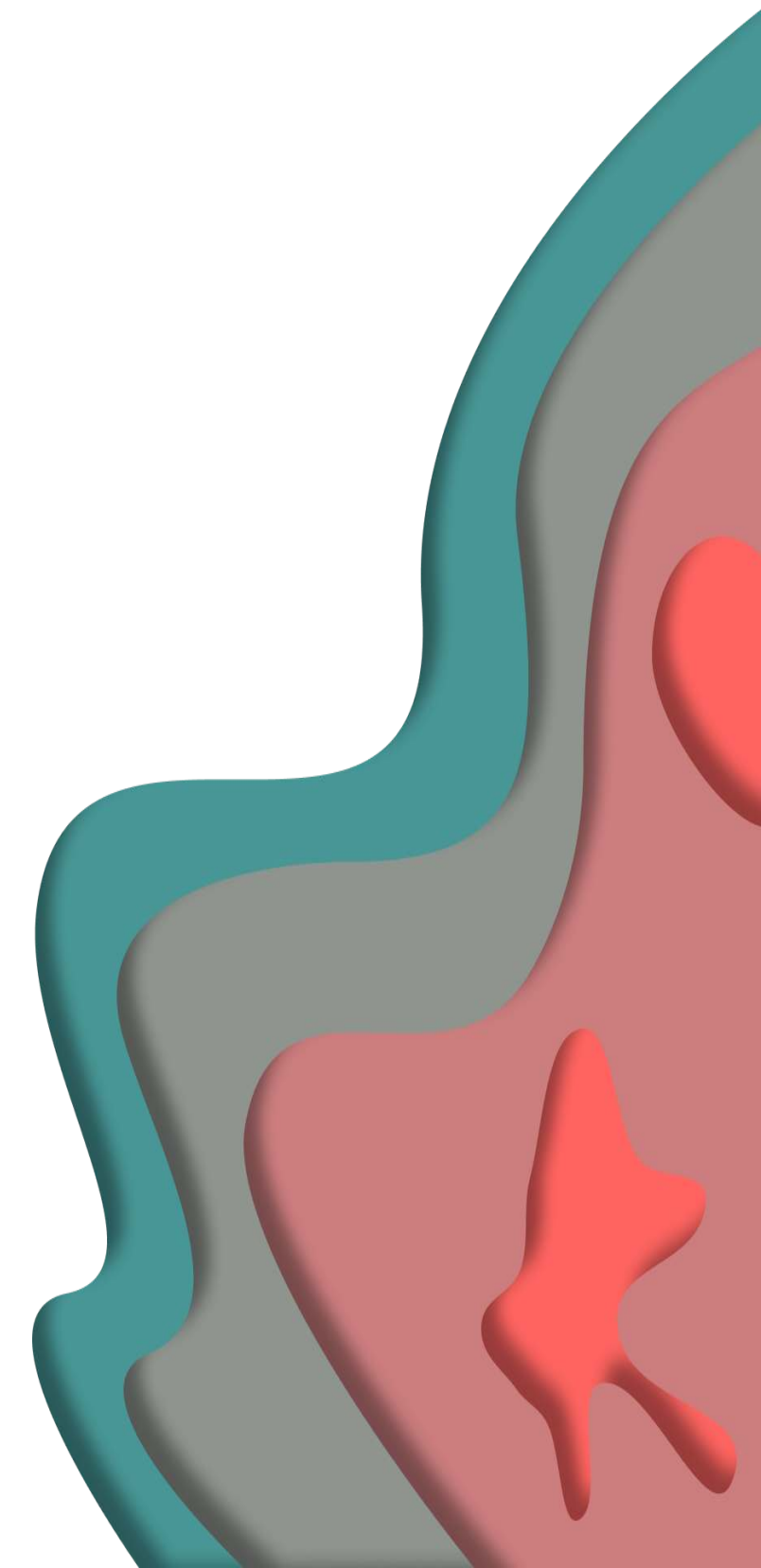
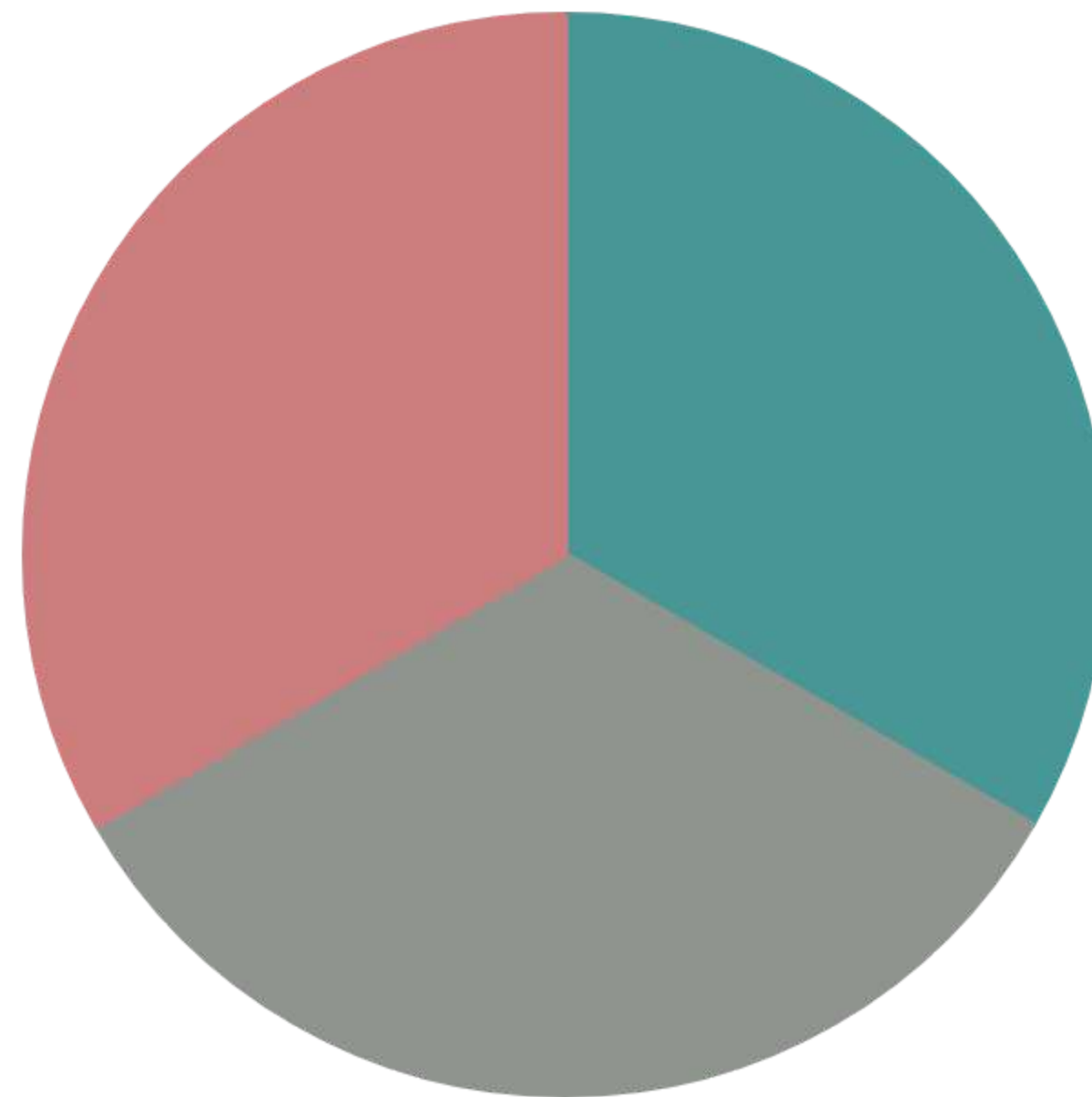
Открытые и замкнутые множества на примерах

Открытое множество содержит лишь внутренние точки, а замкнутое — все свои граничные точки. Промежуточные примеры показывают, что граница может частично «выпадать».

Различия удобно видеть через принадлежность границы: именно она определяет, открыто множество или замкнуто, даже когда форма фигуры похожа.

Учебный материал (схема для сравнения случаев)

Только внутренние Включая границу
Промежуточный случай

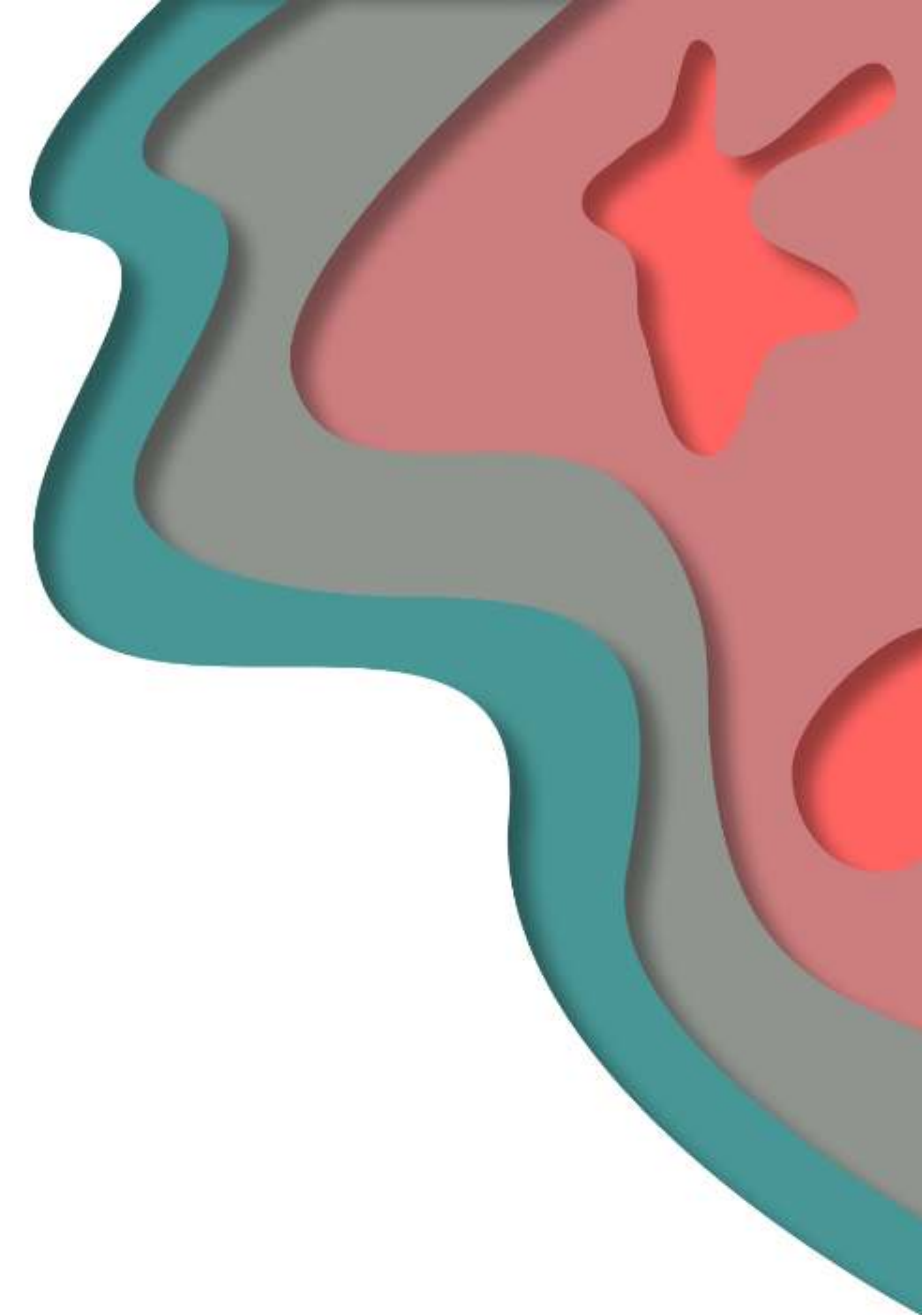


Граничная точка множества

Точка называется граничной, если любая её окрестность содержит и точки множества, и точки дополнения. Иными словами, рядом всегда есть «и внутри», и «снаружи».

Для интервала $(0,1)$ граница состоит из двух точек — 0 и 1: возле каждой из них окрестность неизбежно захватывает как допустимые, так и недопустимые значения.

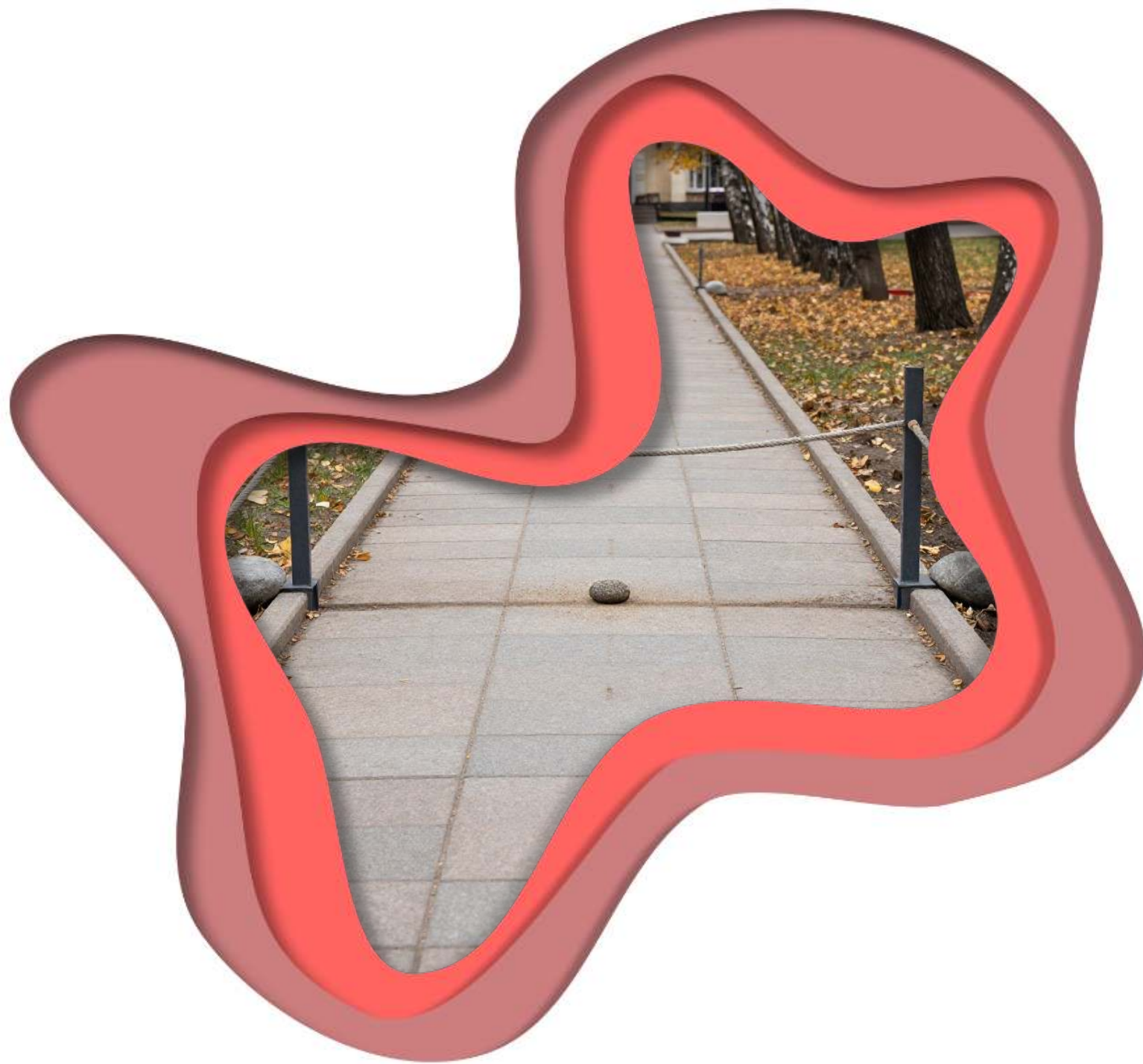
В плоском случае для круга граничные точки образуют окружность. Граница отделяет внутреннюю область от внешней в строгом локальном смысле: «где множество заканчивается».



Как определить тип точки

Алгоритм проверки через окрестности

Внешняя точка и связь с дополнением



- Внешняя точка принадлежит дополнению множества и имеет окрестность, которая не пересекает само множество. Значит, вокруг точки можно построить «маленькую безопасную зону» вне фигуры.
- Для интервала $(0,1)$ точки -1 , 2 и 5 внешние: для них существует достаточно малый интервал, не затрагивающий $(0,1)$. Точки 0 и 1 — граничные, а $0,5$ — внутренняя. Важно: граничная точка может не принадлежать множеству, как в открытом интервале.

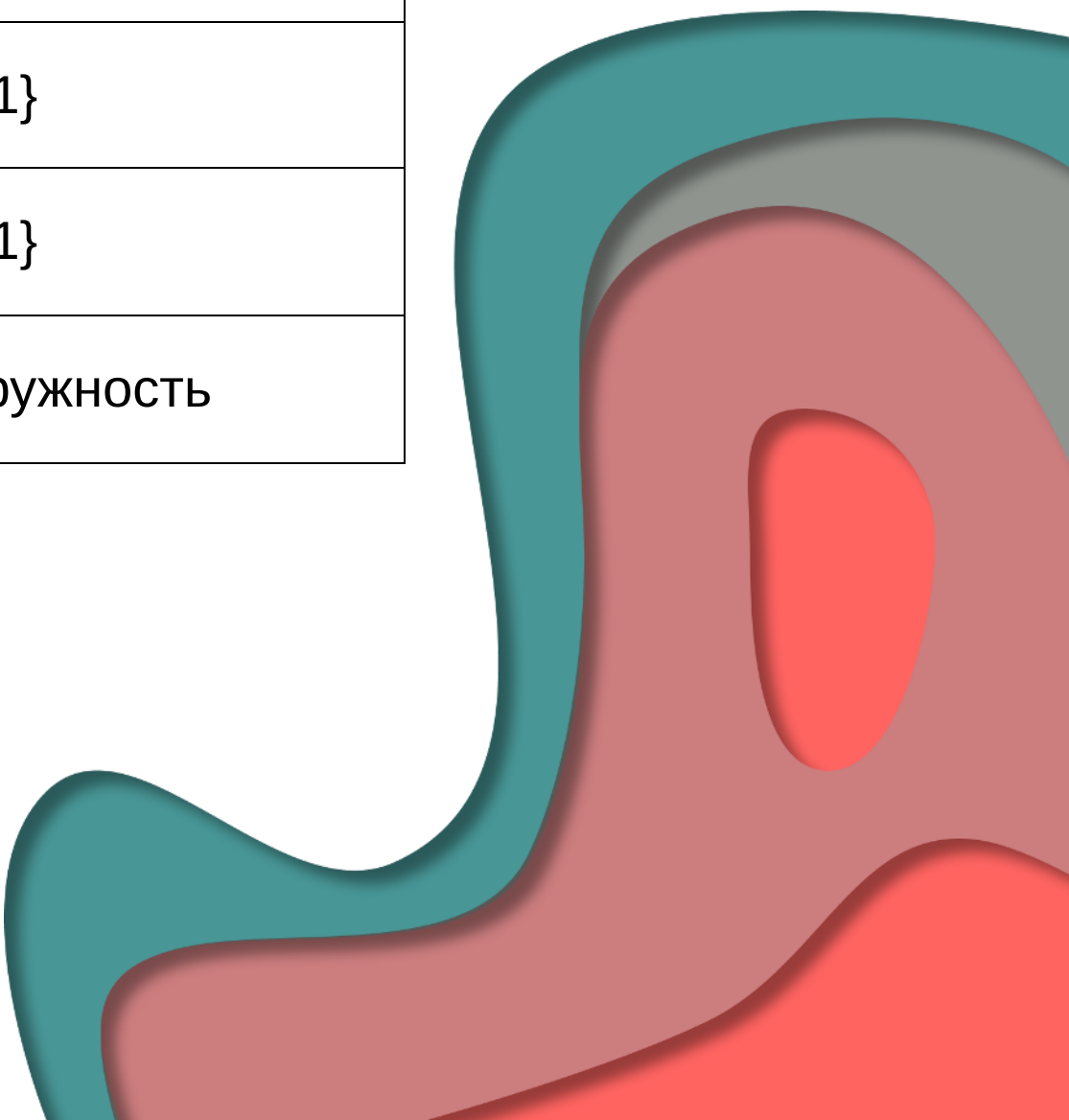
Примеры внутренних точек и границ

Для каждого множества показаны внутренняя часть $\text{int } A$ и граница $\text{Fr } A$. Граница задаётся включённостью крайних точек, а не «размером» фигуры.

Во всех случаях граничные точки отделяют внутренность от внешности. Разные включения крайних точек меняют, что входит в $\text{int } A$, а что остаётся только в $\text{Fr } A$.

Собранные определения из школьного курса (интервалы и круги)

Множество A	$\text{int } A$	$\text{Fr } A$
$(0,1)$	$(0,1)$	$\{0,1\}$
$[0,1]$	$(0,1)$	$\{0,1\}$
Круг с окружностью	весь круг	окружность



Свойства внутренней множества

Внутренность $\text{int } A$ — это наибольшее открытое подмножество множества A . Поэтому всегда верно включение $\text{int } A \subseteq A$: все внутренние точки обязательно принадлежат самому множеству.

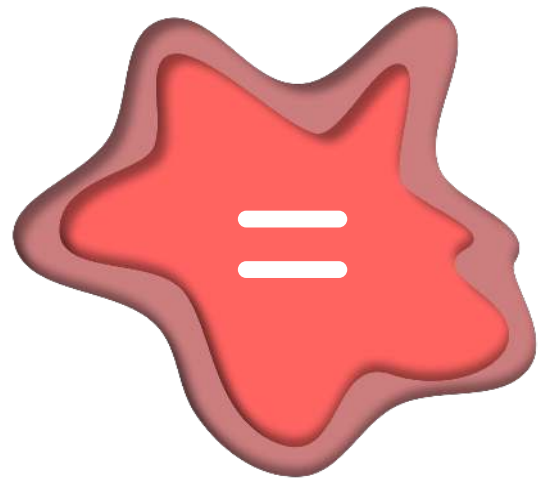
Для пересечения множеств справедливо равенство $\text{int}(A \cap B) = \text{int } A \cap \text{int } B$. А вот для объединения обычно выполняется лишь включение $\text{int}(A \cup B) \supseteq \text{int } A \cup \text{int } B$, потому что новые области могут «захватить» границу.

Для отрезка $[a, b]$ внутренняя часть равна (a, b) : концы не могут иметь окрестность, целиком лежащую внутри. Аналогично, для прямоугольника с включенной границей внутренняя часть — это точки, удалённые от сторон и вершин.

Эти свойства помогают без лишних рисунков проверять ответы в задачах: где гарантированно есть запас до края, а где начинается риск попасть на границу из-за малейшего смещения точки.

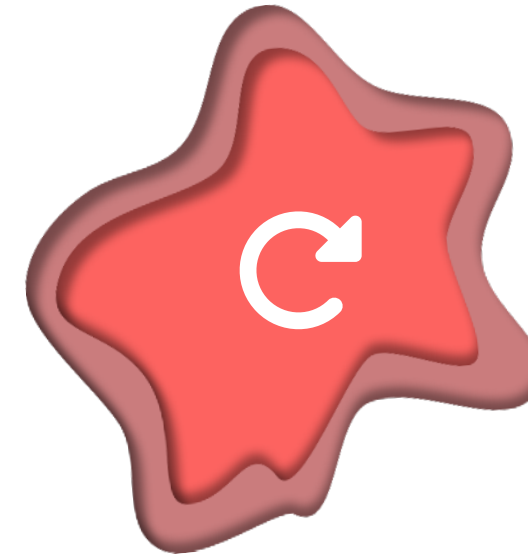


Свойства границы множества



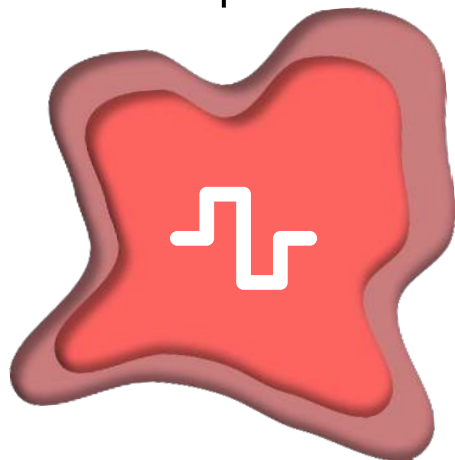
Формула через замыкание и внутренность

Граница $\text{Fr } A$ выражается формулой $\text{Fr } A = \text{cl } A \setminus \text{int } A$. Это означает: на границе остаются те точки, которые не уходят целиком внутрь, но и не исчезают из замыкания.



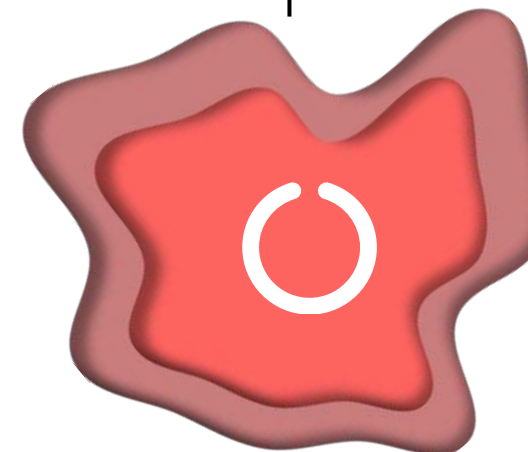
Граница дополняющего множества совпадает

Отдельно важно свойство $\text{Fr } A = \text{Fr}(\bar{A})$, где $\bar{A}$ — дополнение. Значит, одна и та же «кромка» отделяет множество и его внеобласть локально одинаково.



Пример на отрезке $[0;1]$

Для интервала $[0;1]$ граничные точки — это концы 0 и 1. В каждой окрестности около 0 и 1 встречаются и точки множества, и точки вне него.



Пример для открытого круга

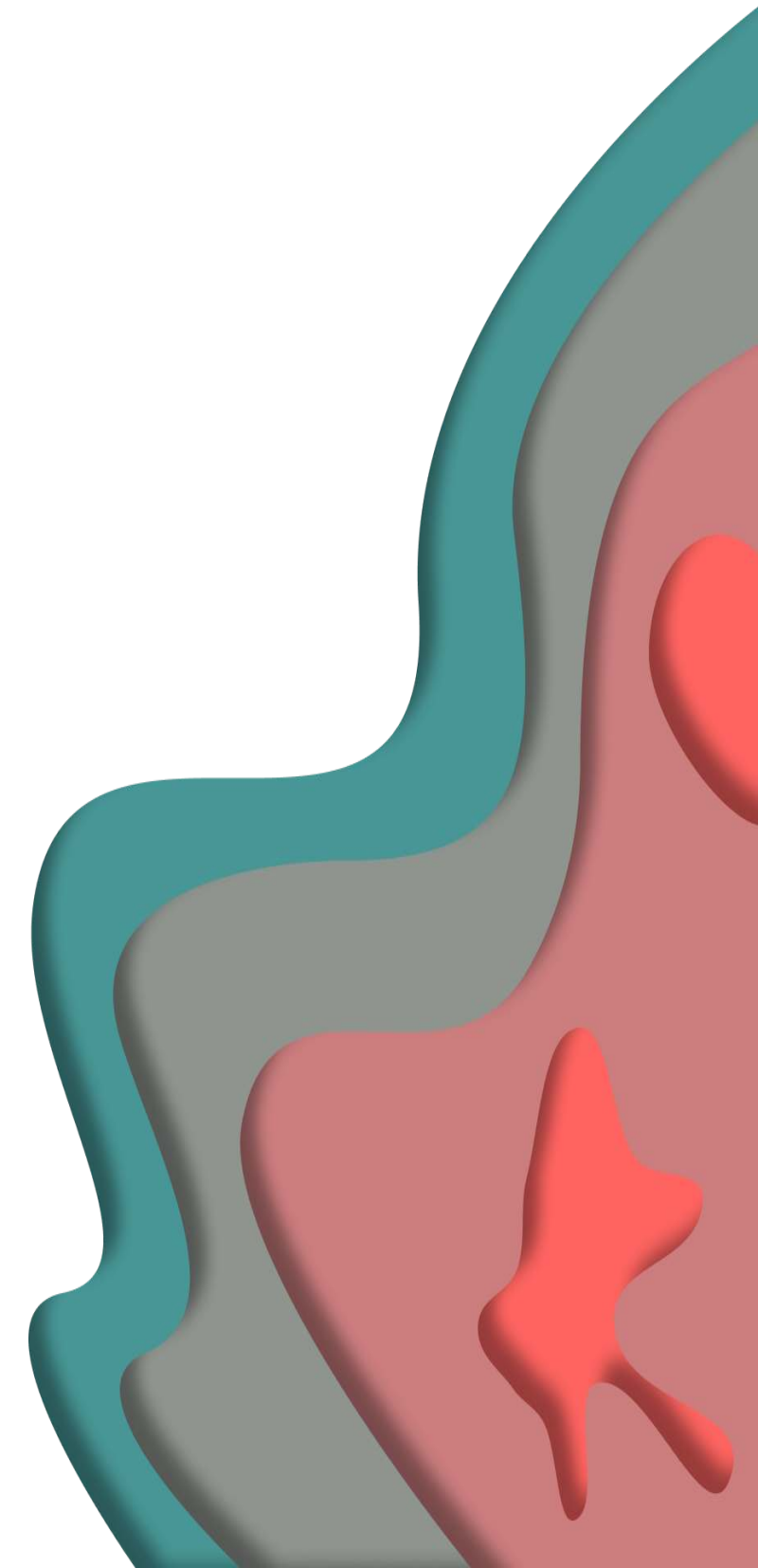
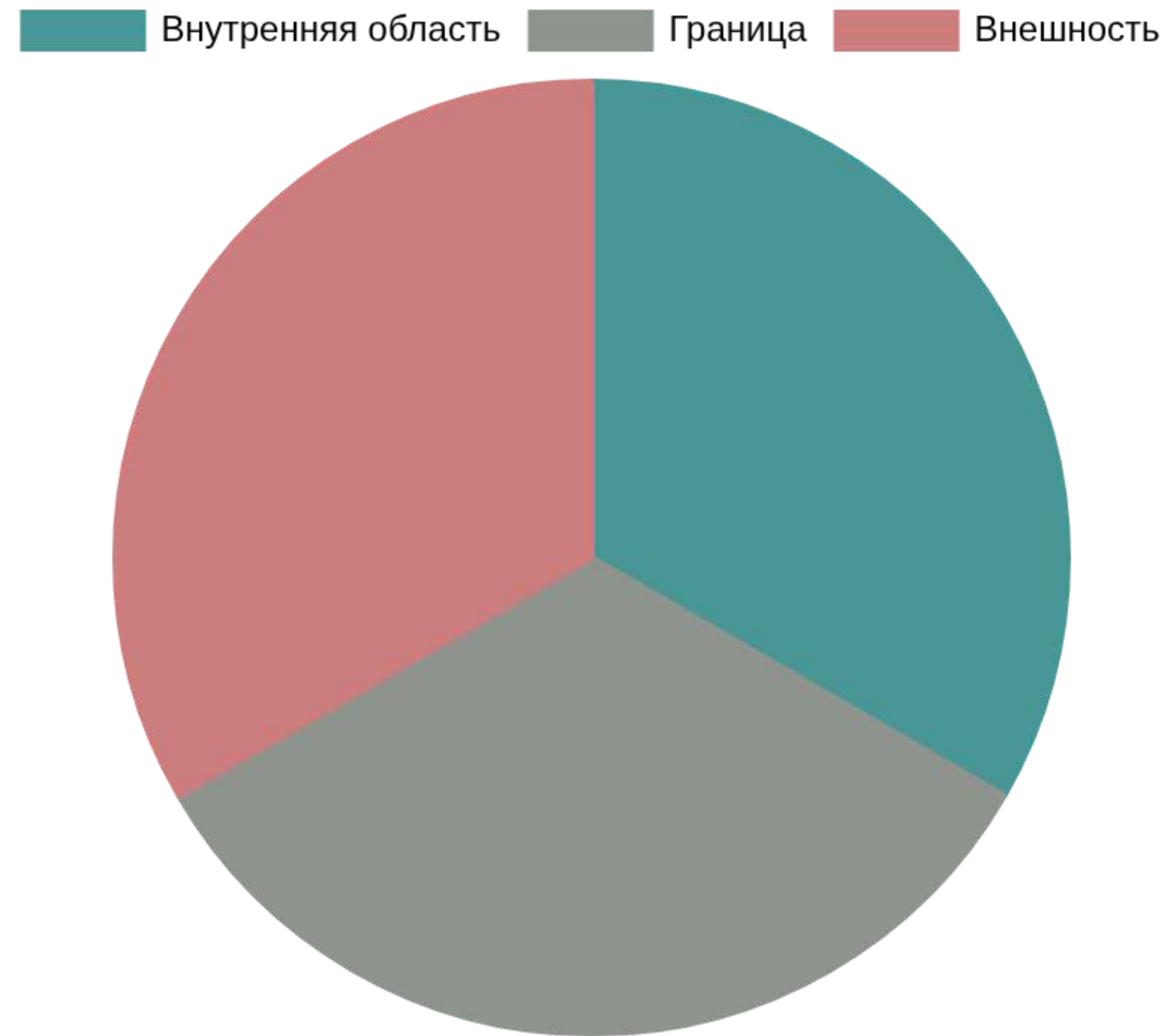
Для открытого круга на плоскости граница совпадает с окружностью: сами внутренние точки лежат не на контуре, а каждая точка окружности не имеет вокруг себя полностью «внутреннего» пространства.

Связь внутреннейности, замыкания и границы

Внутренняя область $\text{int } A$ состоит из точек, имеющих «запас» до края. Замыкание $\text{cl } A$ расширяет множество, добавляя предельные точки, которые упираются в границу.

Схема подчёркивает: граница — промежуточная зона, где окрестность всегда «переходит» через разделяющую линию. Это помогает быстро классифицировать точки по формуле или рисунку.

Материал курса: определения $\text{int } A$, $\text{cl } A$ и $\text{Fr } A$ (без внешних данных), дата подготовки: 2026-05-14



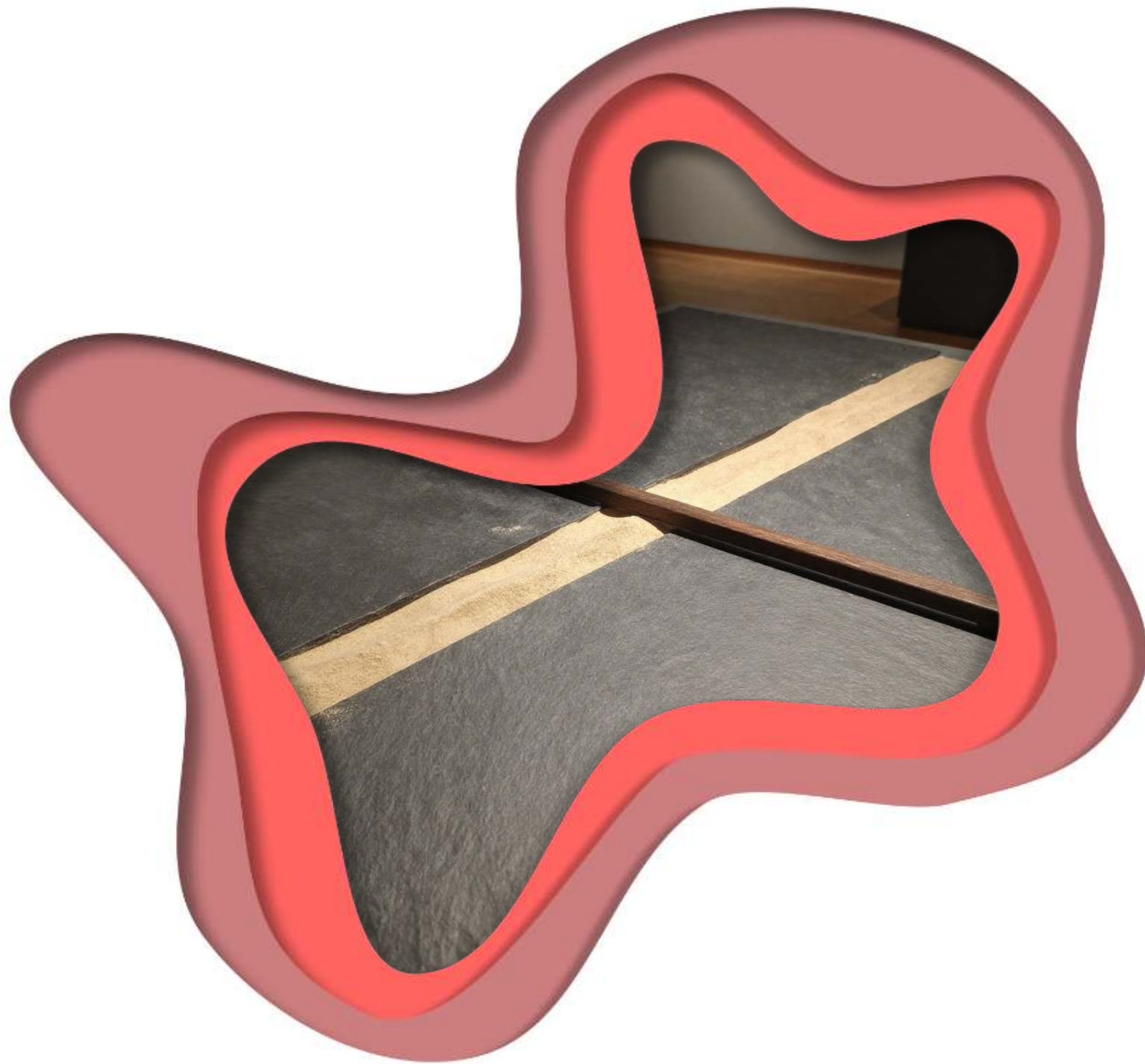
Связь с открытыми и замкнутыми множествами

Множество открыто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своей внутренностью: $A = \text{int } A$. Тогда любая точка множества гарантированно имеет окрестность, целиком лежащую внутри.

Множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит свою границу: $\text{Fr } A \subseteq A$. Если какая-то граничная точка «выпала», то множество перестаёт быть замкнутым.

Для отрезка $[a,b]$ множество замкнуто, но не открыто: концы входят в A , однако около них нет «полностью внутренней» окрестности. Для (a,b) наоборот: оно открыто, но концов там нет.

Граница на прямой и на плоскости



- На числовой прямой граница отрезка $[a,b]$ — это две точки a и b . Для луча $[a,+\infty)$ граница состоит только из точки a , потому что правее любой окрестности уже «всё внутри».
- На плоскости граница круга — окружность, а граница прямоугольника — его стороны. Геометрически это тот самый контур, где окрестность одновременно касается и множества, и его дополнения.

Как находят внутренность и границу сложных фигур

Пошаговый алгоритм классификации точек через локальные окрестности и свойства int , cl и Fr

Типичные ошибки и верные формулировки

Ошибка	Верно	Ключ
Все точки на контуре — внутренние	Точки контура обычно граничные	Запас до края отсутствует
Все граничные точки обязательно принадлежат множеству	Это зависит: открытое или замкнутое множество	Проверяйте условие A
У открытого множества границы нет	Граница есть, но не входит в множество	Напр.: открытый круг

Таблица помогает избежать распространённых логических сбоев при работе с определениями внутренней, границы и внешности множеств.

Ошибки возникают, когда путают «лежит на краю» и «лежит внутри». Если окрестность не гарантирует попадание только в A, точку нельзя автоматически считать внутренней.

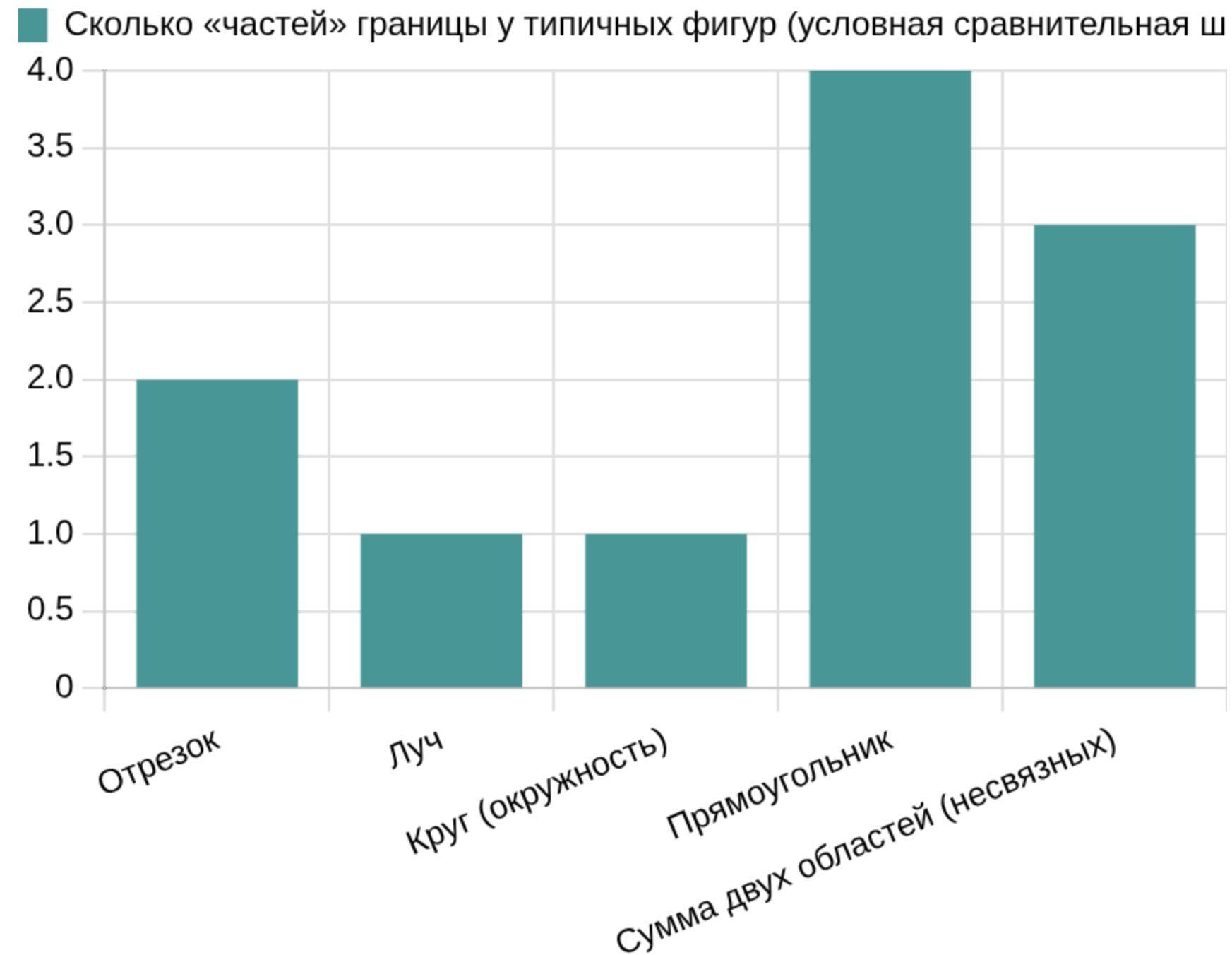
Методические рекомендации к теме «Граница и внутренность множества», опора на определения (без внешних данных)

Сравнение границ разных геометрических фигур

Сравнение показывает: граница может быть как набором отдельных точек, так и протяжённой линией. В несвязных объединениях контур распадается на несколько компонент.

По виду границы часто легко понять тип множества и как читать неравенства: включён ли край. Это сокращает время на проверку решений по рисунку.

Собственная схема сравнения на основе геометрических определений границы (без числовых измерений), 2026-05-14



Практическое значение в школьных задачах



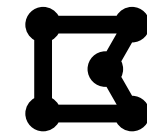
Графики неравенств: что входит, а что нет

При чтении неравенств важно видеть, где граница рисуется сплошной линией, а где штриховой. Это напрямую соответствует тому, включаем мы точки границы в ответ или нет.



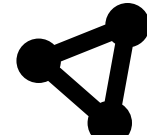
Проверка точки по рисунку и по записи

Одна и та же точка на плоскости может оказаться внутренней или граничной в зависимости от формулировки условий. Рассуждение через окрестности помогает не ошибиться при выборе ответа.



Область решений по системе условий

Когда область строится как пересечение нескольких условий, границы каждого ограничения «складываются» вместе. Внутренность определяется тем, где существует запас, а не только визуальное попадание.



Окружности и многоугольники как наглядный полигон

Для задач с окружностями и многоугольниками граница особенно «читается». По ней удобно тренировать различие между строгими и нестрогими неравенствами и корректно отмечать край.

Итоговые ориентиры для распознавания точек

- Внутренняя точка имеет запас до границы: вокруг неё можно выделить маленькую окрестность, целиком принадлежащую множеству. Это ключ к строгому отличию «внутри» от «на краю».
- Граничная точка лишена такого запаса, потому что любая её окрестность содержит и точки множества, и точки вне его. Поэтому по локальному поведению граница становится однозначной.
- Внешняя точка отделена от множества окрестностью, не пересекающей фигуру. Эти три категории формируют строгий язык, который помогает описывать контур и область любой геометрической конструкции.

Граница и внутренность: строгий язык геометрии

Граница и внутренность множества дают точный язык для описания геометрических фигур в 11 классе. Внутренность показывает локальное заполнение, граница — контур, а замыкание добавляет предельные точки. Это связывает рисунок с математической записью для отрезков, кругов, прямоугольников и областей решений.

