

Неравенства с одной переменной

Понимаем сравнение, решаем и проверяем.



Зачем нужны неравенства



Неравенства помогают описывать ограничения, условия и допустимые значения в задачах про возраст, время и расстояние.



Равенство и неравенство



Точное совпадение

Равенство говорит о точном совпадении значений, а неравенство показывает, какое из них больше или меньше. Это основа для сравнения чисел и выражений.



Строгие сравнения

Знаки $<$ и $>$ читаются как «меньше» и «больше». Они показывают строгую границу, поэтому число на границе в ответ не входит.



Нестрогие сравнения

Знаки $\leq$ и $\geq$ означают «меньше или равно» и «больше или равно». В таких случаях граница разрешена и включается в решение.



Граница решения

При чтении важно сразу понимать, входит ли крайнее значение в ответ. Это помогает правильно записывать решение на прямой и в промежутках.

Что такое решение неравенства

Что считать решением

1

Решение неравенства — это каждое значение переменной, при котором запись становится верной. Одно неравенство может иметь одно значение, несколько значений или бесконечно много.

Проверка подстановкой

2

Если подставить число и получить верное утверждение, оно входит в множество решений. Если утверждение ложное, это число не подходит.

Много подходящих значений

3

Для $x > 2$ подходят 3, 4, 10 и любые другие числа, большие двух. Значит, решений не одно, а целый бесконечный набор.

Запись решения на числовой прямой :::

+

Пустая точка

На числовой прямой пустая точка показывает, что граница не входит в ответ. Так обозначают строгие неравенства со знаками $<$ и $>$.

+

Закрашенная точка

Закрашенная точка означает включение границы в решение. Её ставят при знаках $\leq$ и $\geq$, когда крайнее значение тоже подходит.

+

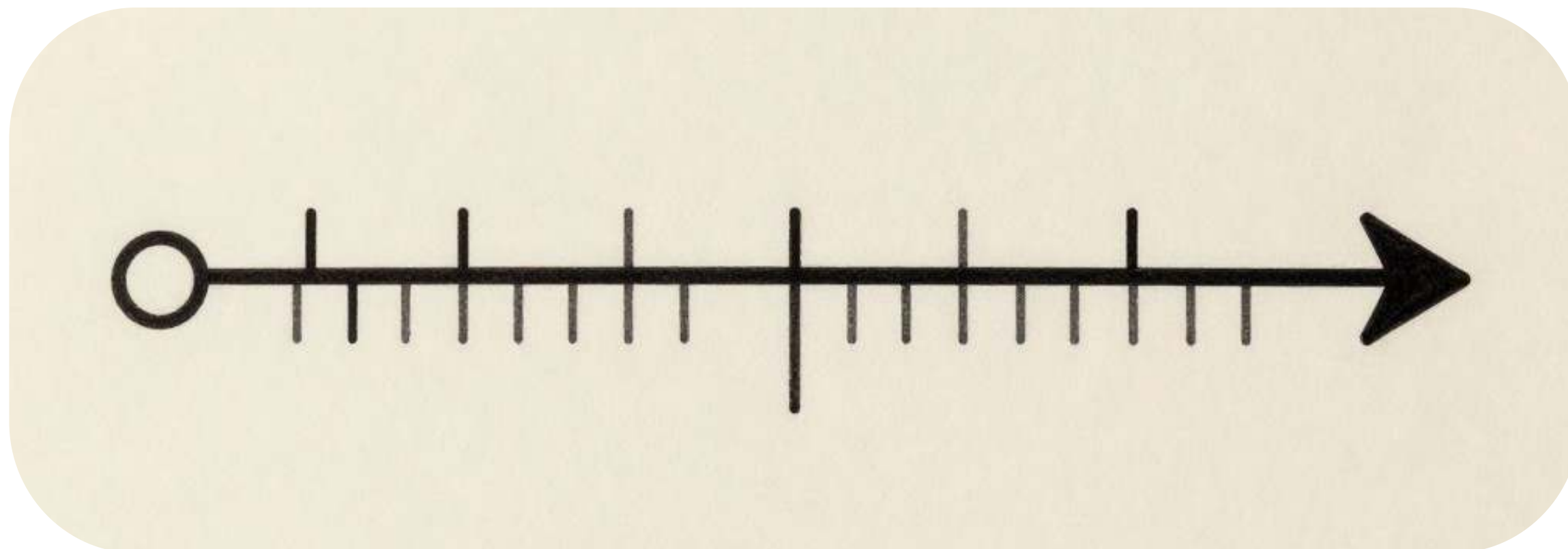
Направление луча

Луч направляют вправо, если нужны большие значения, и влево, если нужны меньшие. Направление всегда связано со знаком неравенства.

+

Как строить схему

Чтобы схема была понятной, сначала находят границу, затем выбирают тип точки и только после этого рисуют нужную часть прямой.



Линейное неравенство: первый вид

1

Привести к виду

Сначала выделяют выражение с переменной и приводят неравенство к более простому виду. Это помогает увидеть, какие действия нужно выполнить дальше.

2

Убрать свободный член

Для $3x+2>11$ вычитают 2 из обеих частей, получая $3x>9$. Так сохраняется равносильность, потому что обе части изменяются одинаково.

3

Найти x

Затем делят обе части на 3 и получают $x>3$. Деление на положительное число не меняет знак неравенства.

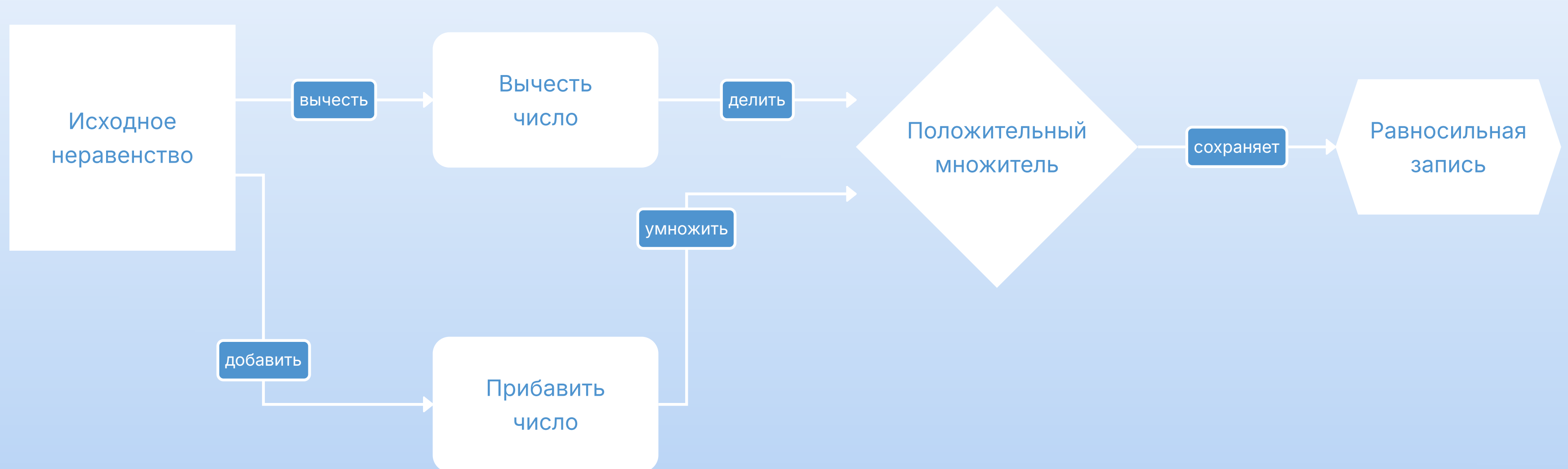
4

Записать результат

Полученный ответ удобно читать сразу: x больше трёх. Именно такой вид проще всего перенести на прямую или записать промежутком.

Основные преобразования

Преобразования выполняют по обеим частям, чтобы не изменить множество решений.



Когда знак меняется

Положительное число

1

Если умножают или делят обе части на положительное число, знак остаётся прежним. Это связано с тем, что порядок чисел не нарушается.

Отрицательное число

2

При делении на отрицательное число порядок меняется на противоположный, поэтому знак нужно развернуть. Без этого ответ будет неверным.

Типичный случай

3

В примере $-2x < 8$ после деления на -2 получаем $x > -4$. Здесь особенно важно не забыть поменять знак сравнения.

Подробное решение примера

1

Первое преобразование

Начинаем с неравенства $5x - 7 > 18$ и переносим свободное число в правую часть. Для этого прибавляем 7 к обеим частям.

2

Второе преобразование

Получаем $5x > 25$, после чего делим обе части на 5. Поскольку число положительное, знак не меняется.

3

Ответ

Итог записываем как $x > 5$. Это означает, что подходят все числа, которые больше пяти.

4

Проверка

Проверяем подстановкой: при $x=6$ имеем $30 - 7 = 23$, а $23 > 18$ верно. На прямой это пустая точка 5 и луч вправо.

Четыре коротких примера помогут быстро отработать перенос слагаемых, деление и запись ответа.

4

коротких примера даны для самостоятельной тренировки.

Список заданий слайда

В простейших задачах достаточно убрать
доби одним умножением
на положительное число.

1

действие помогает сразу перейти к целым коэффициентам.

Школьный курс алгебры, 6–8 класс (обобщение правил преобразования неравенств)

Как записывать ответ промежутком



Запись	Значение	На прямой
$(a; b)$	без границ	пустые точки
$[a; b]$	с границами	закрашенные точки
$(a; +\infty)$	больше a	луч вправо
$(-\infty; b]$	не больше b	луч влево



Как читаются основные записи ответа и что они означают на прямой.



Круглые скобки показывают, что граница не входит в ответ, а квадратные — что входит. Вид точки на прямой совпадает с этим правилом.

- Школьный курс алгебры, 6–8 класс

Выбор правильной схемы



Строгое неравенство

Для неравенства $x > -1$ выбирают пустую точку в -1 и направляют луч вправо, потому что подходят все числа, которые больше границы.



Нестрогое неравенство

Для неравенства $x \leq 2$ ставят закрашенную точку в 2 и ведут луч влево: в ответ входят и меньшие числа, и сама граница.

Частые ошибки

1

Знак не меняют

Сначала проверяйте знак при делении или умножении на отрицательное число. Если его забыть поменять, получится равносильное преобразование, но с неверным ответом.

2

Путают границу

Строгие знаки $<$ и $>$ не включают границу, а $\leq$ и $\geq$ включают. Из-за этой разницы легко выбрать неправильную точку на прямой.

3

Неправильная точка

Пустая точка нужна для строгого неравенства, закрашенная — для нестрогого. Ошибка в виде точки сразу искажает смысл найденного промежутка.

4

Неполный ответ

Ответом обычно является не одно число, а целый промежуток. Если записать только значение границы, исчезает часть решений и ответ становится неполным.

Неравенства с модулем

:::

+

Смысл модуля

Модуль показывает расстояние до нуля, поэтому его значение не бывает отрицательным. Отсюда сразу следует неравенство $|x| \geq 0$ для любого действительного x .

+

Внутри интервала

Если $|x| < a$, число x должно быть ближе к нулю, чем a . Поэтому ответ записывают как $-a < x < a$, то есть с двумя границами.

+

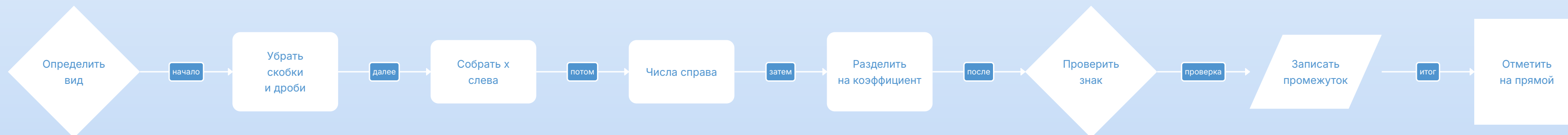
Вне интервала

Если $|x| > a$, значение x лежит дальше от нуля, чем a , по одну из сторон. Тогда получаем два промежутка: $x < -a$ или $x > a$.



Порядок действий

Последовательность действий при решении большинства школьных неравенств



Самостоятельная практика 1

1

Первый пример

Для $6x-4>8$ сначала прибавьте 4, затем разделите на 6. Ответ запишите как $x>2$ и отметьте пустую точку с лучом вправо.

2

Второй пример

В неравенстве $-2x+5\leq 11$ сначала перенесите 5, потом делите на -2 и не забудьте изменить знак. Получится $x\geq -3$.

3

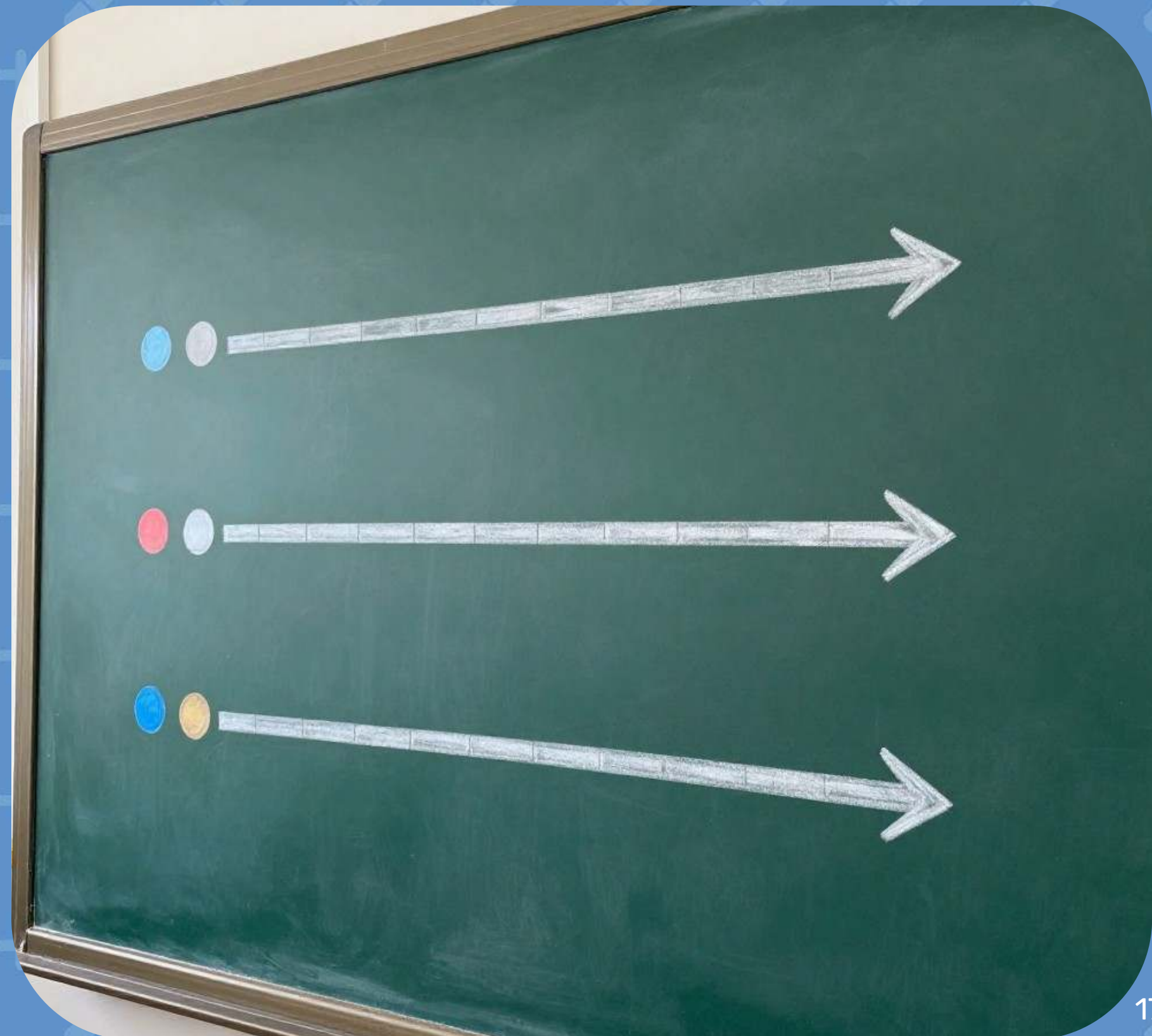
Третий пример

Для $3x+1<10$ вычтите 1, разделите на 3 и получите $x<3$. Здесь граница не входит, значит нужна пустая точка.

4

Четвёртый пример

В задании $x/2\geq 3$ удобнее умножить обе части на 2. Получается $x\geq 6$; на прямой это закрашенная точка 6 и луч вправо.

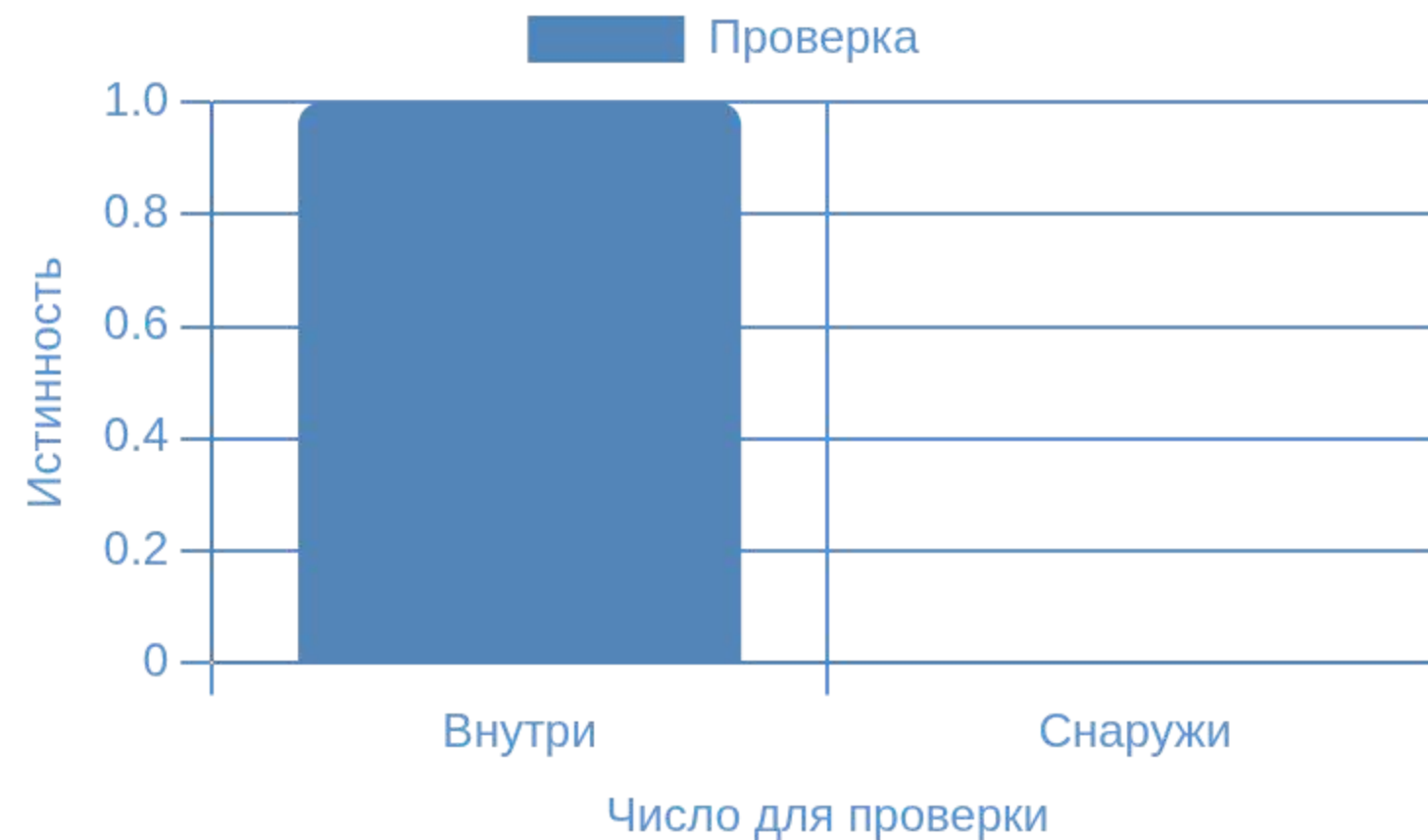


Самостоятельная практика 2



+ Перенос слагаемого В $x-7 \geq -2$ перенесите -7 вправо или прибавьте 7 к обеим частям. Получится $x \geq 5$, то есть закрашенная точка 5 и луч вправо.	+ Отрицательный делитель Для $5-3x > 14$ сначала вычтите 5, затем разделите на -3 и поменяйте знак. Ответ: $x < -3$.	+ Смена знака В $-4x \leq 12$ деление на -4 требует смены знака. Получается $x \geq -3$, поэтому на прямой включается точка -3.	+ Сравнение двух выражений Неравенство $2x+3 < 3x-1$ решают переносом x влево и чисел вправо. После преобразований выходит $x > 4$.	+ Скобки и проверка В $3(x-2) > 6$ сначала раскрывают скобки, затем делят на 3. Итог: $x > 4$, что удобно проверить подстановкой числа из промежутка.
--	--	---	--	--

Как быстро проверить ответ



Для проверки удобно сравнить подстановку внутри найденного промежутка и за его пределами на одном и том же неравенстве.

Если внутри промежутка неравенство истинно, а снаружи ложно, решение выбрано верно и граница отмечена правильно.

Иллюстрация правила проверки подстановкой по школьному курсу алгебры

Что нужно помнить

Неравенство с одной переменной всегда описывает множество чисел, а не один результат. Главное — аккуратно преобразовать выражение, правильно изменить знак при делении на отрицательное число и обязательно проверить ответ.