

Точки, прямые и вписанная окружность

Как точки, прямые и касания собираются в одну точную геометрическую картину.



Геометрия точек и касаний



Вписанная окружность соединяет простые фигуры
и показывает, как измеряются расстояния внутри
треугольника.

Точка, прямая и отрезок

Точка как ориентир

Точка не имеет длины и ширины, но точно задаёт место на плоскости. В задачах она помогает отметить вершины, центры, точки касания и другие важные позиции.

Прямая без границ

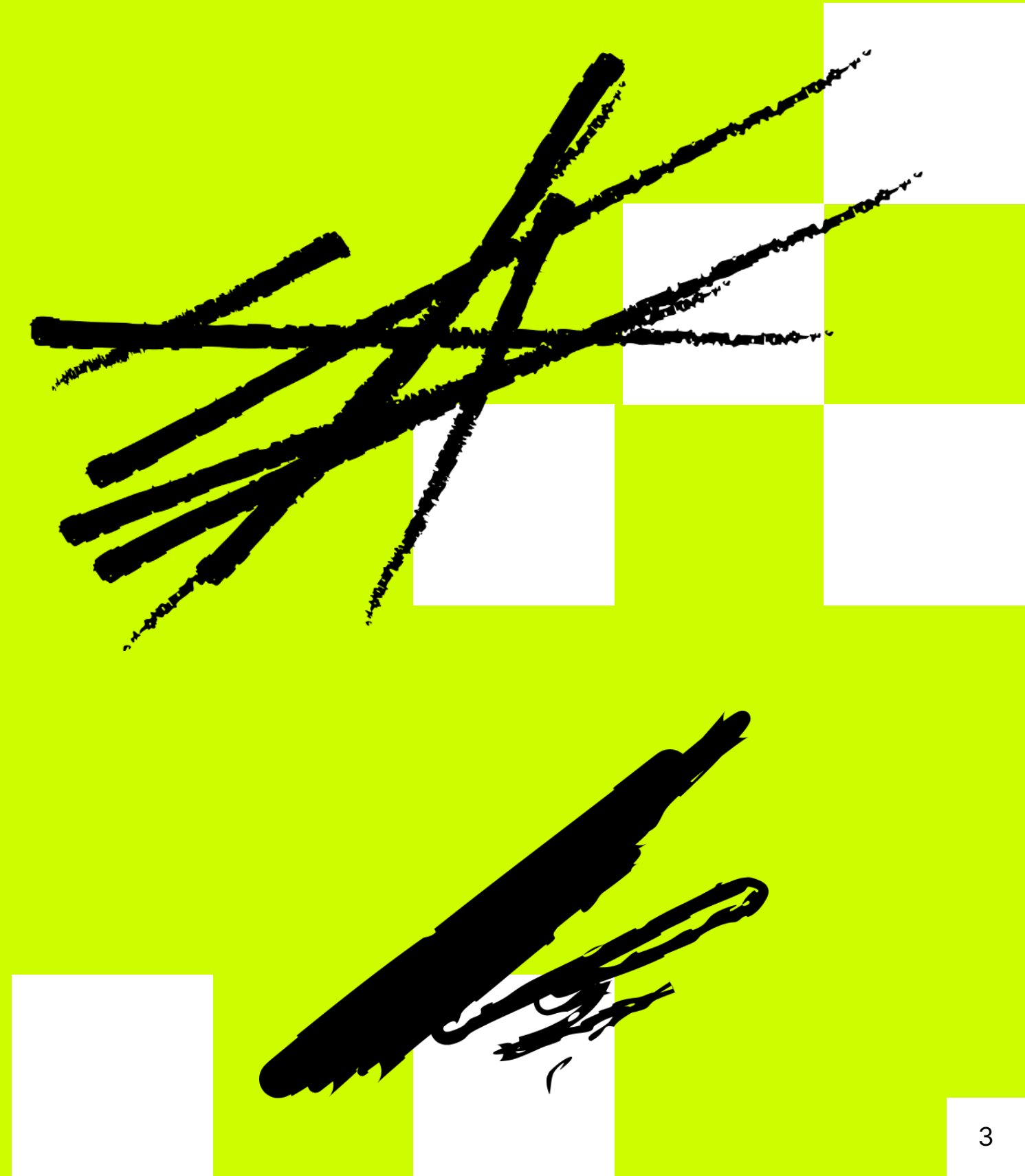
Прямая продолжается бесконечно в обе стороны. Именно её сравнивают со сторонами треугольника, когда говорят о касании, перпендикуляре или продолжении стороны за пределы фигуры.

Отрезок для измерений

Отрезок ограничен двумя концами, поэтому его удобно измерять. Стороны треугольника — это отрезки, а части сторон до точки касания тоже рассматривают как отрезки.

Основа построений

Эти объекты нужны вместе: точка задаёт положение, прямая показывает направление, а отрезок помогает сравнивать длины. Без них нельзя точно описать вписанную окружность.



Треугольник как основа построения

1. Фигура для поиска

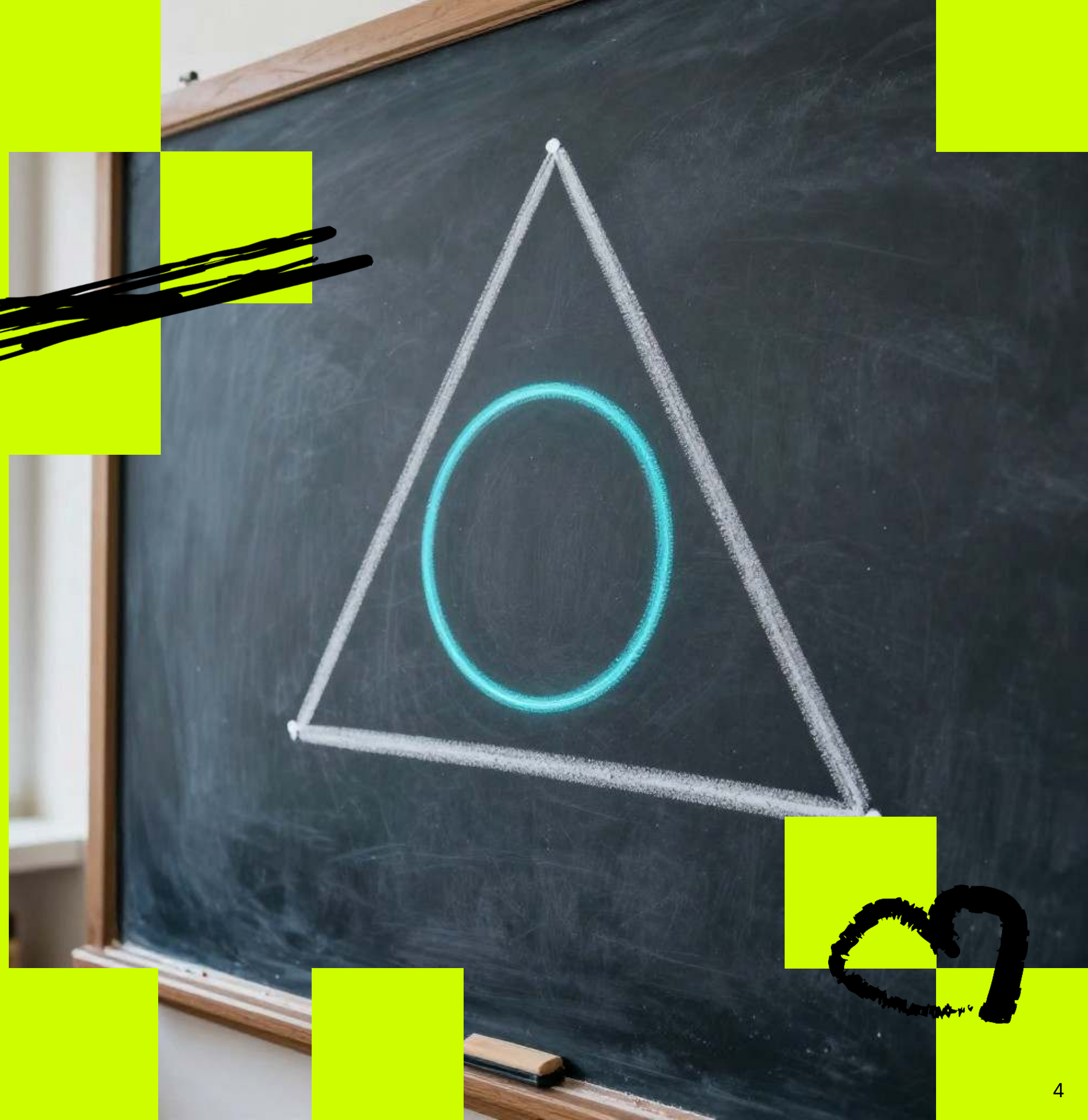
Треугольник состоит из трёх сторон и трёх углов. Внутри него можно искать особые точки, которые связаны со сторонами не случайно, а по строгим правилам.

2. Стороны можно продолжать

Если продолжить стороны треугольника как прямые, станет удобнее рассматривать касания, перпендикуляры и расстояния. Так геометрическая задача превращается в аккуратное построение.

3. Особый внутренний центр

Среди таких точек особенно важен центр вписанной окружности. Он находится внутри треугольника и одинаково удалён от всех его сторон.



Что такое вписанная окружность

1.

Определение окружности

Вписанной называют окружность, которая касается каждой стороны треугольника ровно в одной точке. Это значит, что окружность расположена внутри фигуры и не пересекает стороны.

2.

Где находится центр

Центр такой окружности находится внутри треугольника. От него до каждой стороны можно провести одинаковые отрезки, поэтому окружность получается единственной для данного треугольника.

3.

Три точки касания

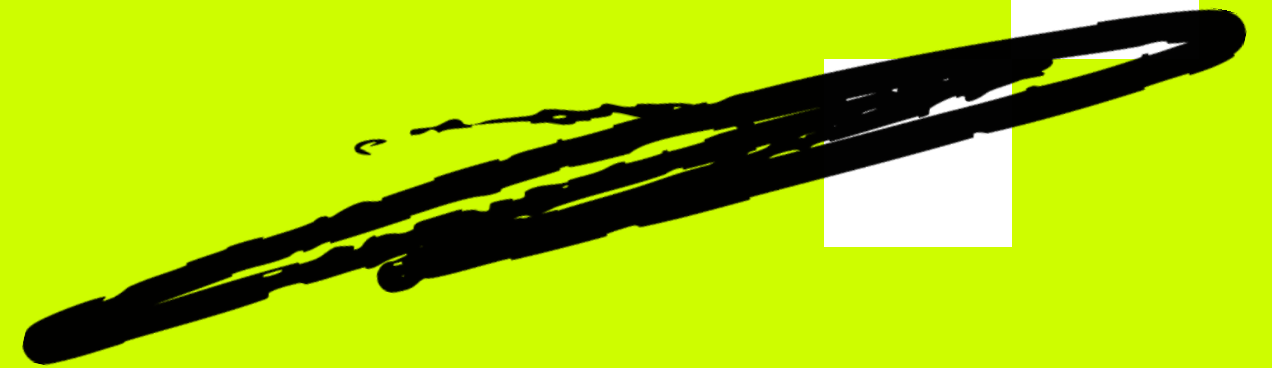
На каждой стороне есть своя точка касания. Именно они показывают, где окружность «прикладывается» к треугольнику и почему её удобно использовать в задачах.



Касание и перпендикуляр

1. Одна общая точка

Точка касания — это место, где окружность и прямая имеют только одну общую точку. Если общих точек больше, касания уже нет.



2. Радиус и прямой угол

Радиус, проведённый в точку касания, всегда образует прямой угол с касательной. Это главное правило, по которому узнают и проверяют касание на чертеже.



3. Признак для задач

В задачах это свойство особенно полезно: стоит показать перпендикуляр, и сразу понятно, что перед нами точка касания. Так легче строить и доказывать.

Инцентр: центр вписанной окружности

Пересечение биссектрис

Инцентр — это точка, где пересекаются биссектрисы треугольника. Она служит центром вписанной окружности и всегда находится внутри треугольника.

Равные расстояния

От инцентра до всех сторон треугольника расстояния одинаковые. Поэтому именно эта точка подходит для построения окружности, касающейся всех сторон.

Как его находят

Чтобы найти инцентр, обычно достаточно провести две биссектрисы. Их пересечение и даст нужный центр, а третья биссектриса пройдёт через ту же точку.



Почему работают биссектрисы



1.

Равные части угла

Биссектриса делит угол на две равные части. Это деление не зависит от размера треугольника, поэтому свойство работает в любых геометрических построениях.

2.

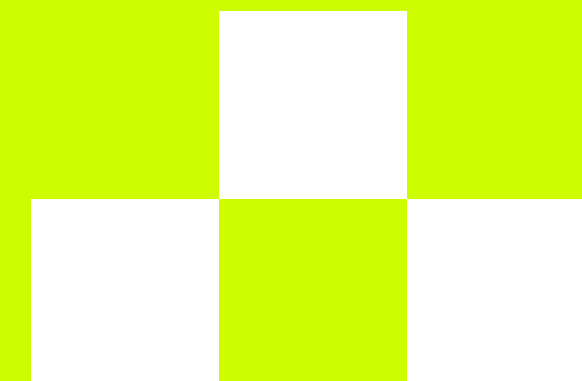
Равное расстояние до сторон

Если точка одинаково удалена от двух сторон угла, она лежит на его биссектрисе. Так можно не только искать, но и проверять положение точки.

3.

Почему ищут центр

У инцентра расстояния до сторон треугольника равны, а значит, он лежит на биссектрисах всех углов. Поэтому биссектрисы и приводят к центру окружности.



Равные касательные из одной точки

 $\sqrt{x}$

Равные отрезки

Если из одной точки к окружности провести две касательные, отрезки от этой точки до мест касания будут одинаковыми. Это помогает находить неизвестные длины без лишних вычислений.



Поиск длин

Свойство удобно использовать, когда нужно восстановить стороны треугольника. Достаточно знать один отрезок касательной, чтобы вывести второй и проверить правильность чертежа.



Проверка построения

Если равенство не выполняется, значит, где-то допущена ошибка в построении или измерении. Поэтому касательные часто используют как проверку решения.



Какие расстояния нужно различать



В одной задаче важно не путать три вида расстояний: до стороны, до точки касания и радиус.

Радиус и перпендикуляр связаны с касанием, а отрезки касательных помогают находить длины.

Величина	Как понимается	Где встречается
Радиус	До стороны	Инцентр и окружность
Перпендикуляр	К кратчайшему пути	Касание окружности
Касательная	До точки касания	Равные отрезки

Свойства вписанной окружности и касательных в треугольнике



Памятка свойств



Свойство	Что означает	Где используется
Биссектрисы	Пересекаются в инцентре	Поиск центра
Радиус и касательная	Перпендикулярны	Проверка касания
Касательные из точки	Равны	Нахождение длин

Свойства вписанной окружности и касательных к окружности из курса геометрии



Короткая памятка по трём ключевым свойствам, которые чаще всего нужны в задачах на вписанную окружность.

Эти свойства связывают построение, проверку и вычисления в одной схеме решения.

2

— радиус вписанной
окружности в примере.

По условию примера: треугольник со сторонами 6, 8 и 10, площадью 24

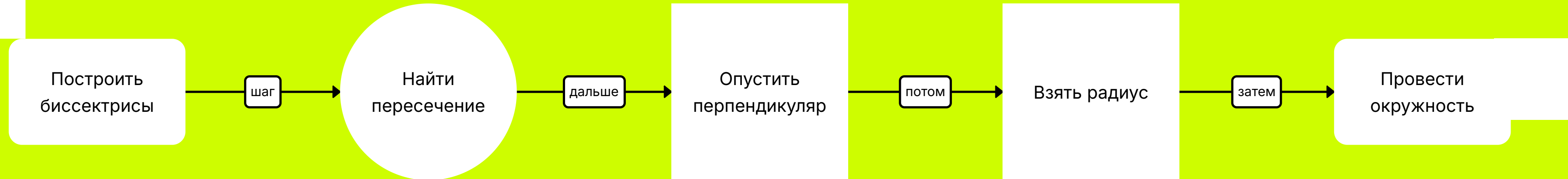


Формула связывает площадь треугольника с радиусом вписанной окружности и позволяет находить его без дополнительных построений.



Как построить вписанную окружность

Последовательность построения вписанной окружности по свойствам биссектрис и перпендикуляра к касательной.



12

— полупериметр в этом
треугольнике.

По условию примера: стороны 6, 8 и 10; площадь 24



В прямоугольном треугольнике со сторонами 6, 8 и 10 полупериметр равен 12, а по формуле $S = p \cdot r$ радиус легко найти.



5

— длина каждого отрезка
от вершины А до точки
касания.

По условию задачи на равные касательные



От вершины А до точек касания получились два одинаковых отрезка; это помогает сразу проверить правильность чертежа и восстановить соседние части стороны.



Почему центр получается один

Центр внутри треугольника

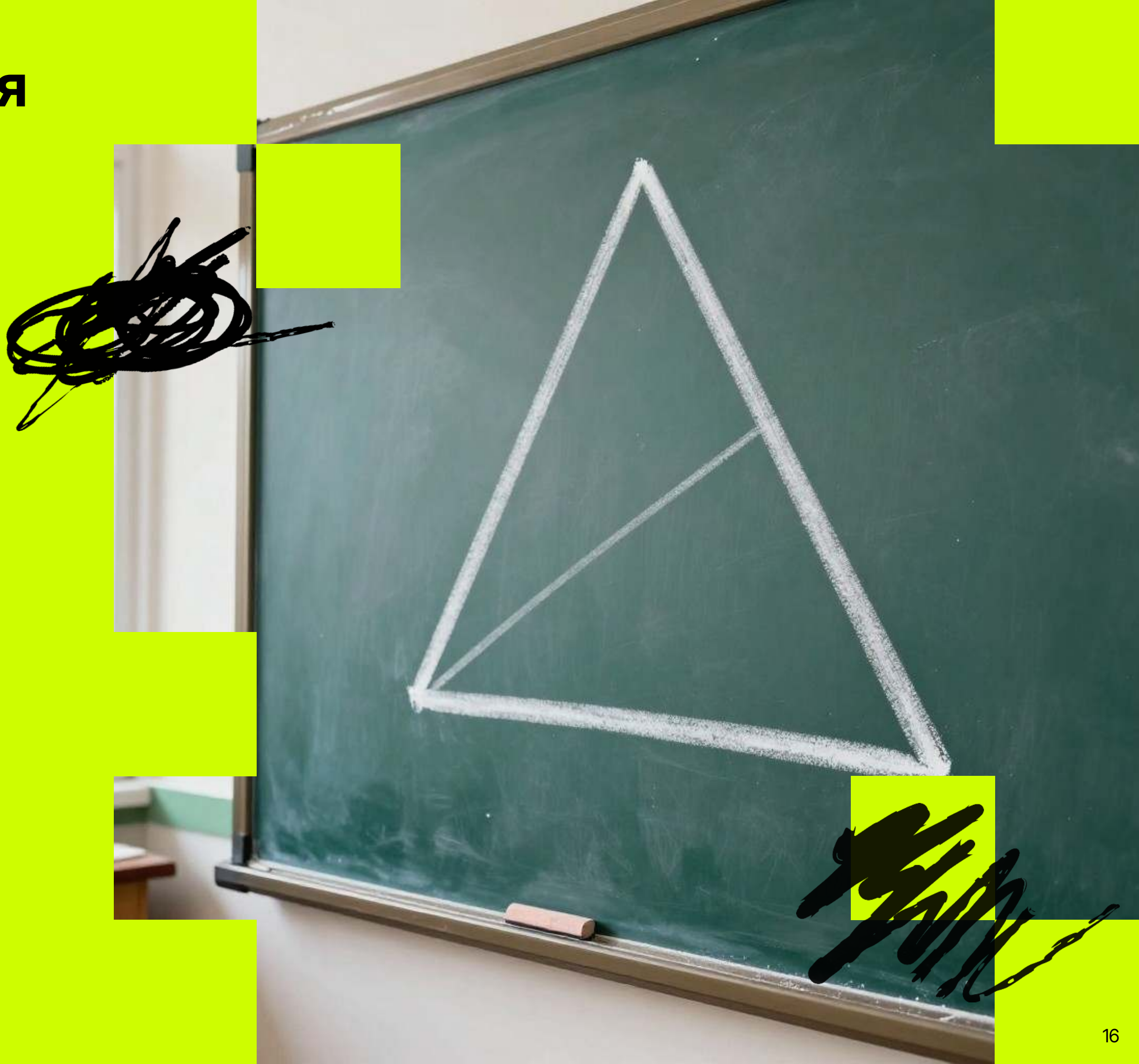
Инцентр — это точка, где пересекаются биссектрисы треугольника. Она одинаково удалена от всех сторон, поэтому именно из неё строят вписанную окружность.

Почему центр один

Если биссектриса проведена верно, любая точка на ней равноудалена от сторон угла. Из-за этого центр получается единственным и устойчивым при изменении размеров фигуры.

Удобный способ построения

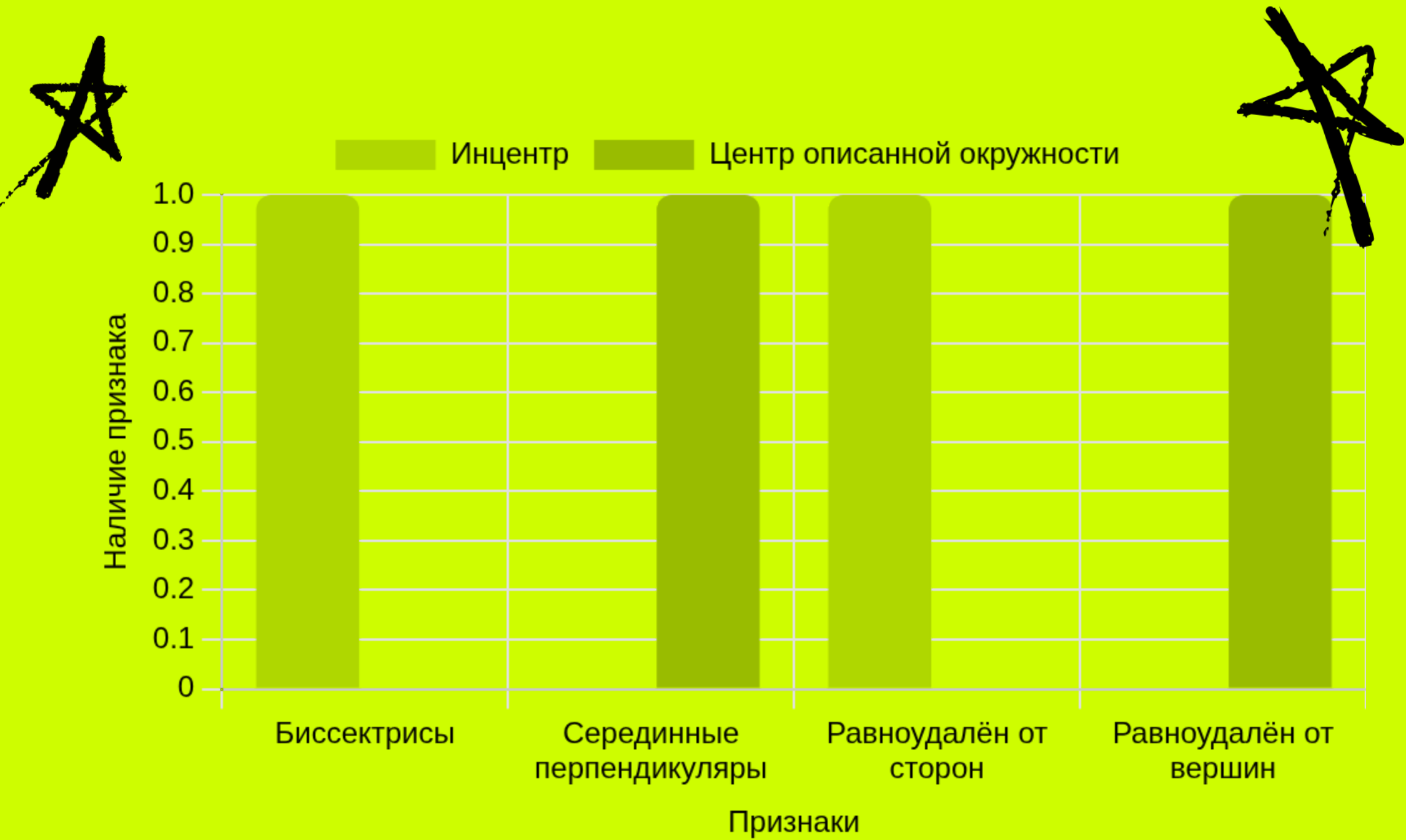
При построении удобно сначала взять два угла и проверить пересечение биссектрис. Так легче избежать ошибок и сразу получить точку, из которой можно провести окружность.



Инцентр и другие центры треугольника

Инцентр и центр описанной окружности часто путают, но они опираются на разные линии построения и отвечают за разные расстояния внутри треугольника.

Инцентр связан со сторонами, а центр описанной окружности — с вершинами; это помогает быстро различать их в задачах.



Сравнение центров треугольника по школьному курсу геометрии

Чек-лист для решения задач

1. 1. Найти центр

Сначала отметьте, какой центр нужно найти: инцентр. От него дальше строится вся схема решения, потому что он задаёт равные расстояния до сторон треугольника.

2. 2. Проверить биссектрисы

Проверьте биссектрисы: именно они приводят к инцентру. Если две биссектрисы пересеклись, вы уже получили точку, из которой можно начать построение окружности.

3. 3. Найти радиус

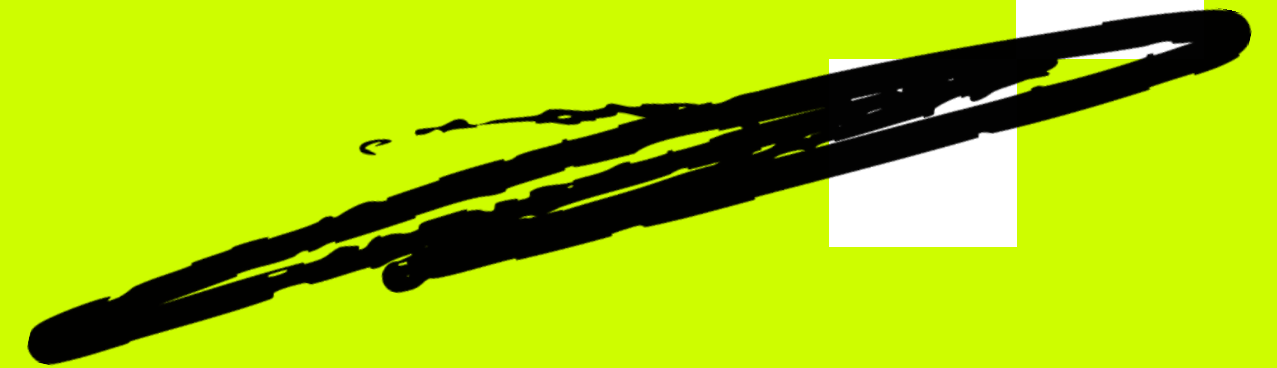
Опустите перпендикуляр на сторону треугольника. Его длина равна радиусу, а сама точка на стороне показывает место касания окружности.

4. 4. Проверить касательные

Вспомните свойство касательных: от одной точки их отрезки равны. Это помогает проверять вычисления и быстро находить неизвестные части стороны.

5. 5. Посчитать по формуле

Если известны площадь и полупериметр, используйте формулу $r = S/p$. Она особенно удобна, когда чертёж есть, а точный радиус ещё нужно посчитать.



Итог: связи между объектами



Связь фигур

Точки, прямые и отрезки перестают быть абстрактными, когда видно, как они работают внутри треугольника и приводят к одной центральной точке.

Понятное построение

Биссектрисы показывают путь к центру, а перпендикуляр к стороне подтверждает радиус. Так построение становится понятным и проверяемым на каждом шаге.

Удобные вычисления

Свойство равных касательных помогает находить длины без лишних измерений. Это особенно удобно в задачах, где часть сторон уже известна.

Два способа решения

Формула через площадь и полупериметр связывает чертёж с расчётом. Поэтому одна и та же задача решается и геометрически, и вычислительно.





Главные выводы и памятка

Вписанная окружность объединяет биссектрисы, касание и расстояния до сторон треугольника. Если помнить инцентр, перпендикуляр к касательной и формулу $r = S/p$, задачи решаются быстрее и аккуратнее.

