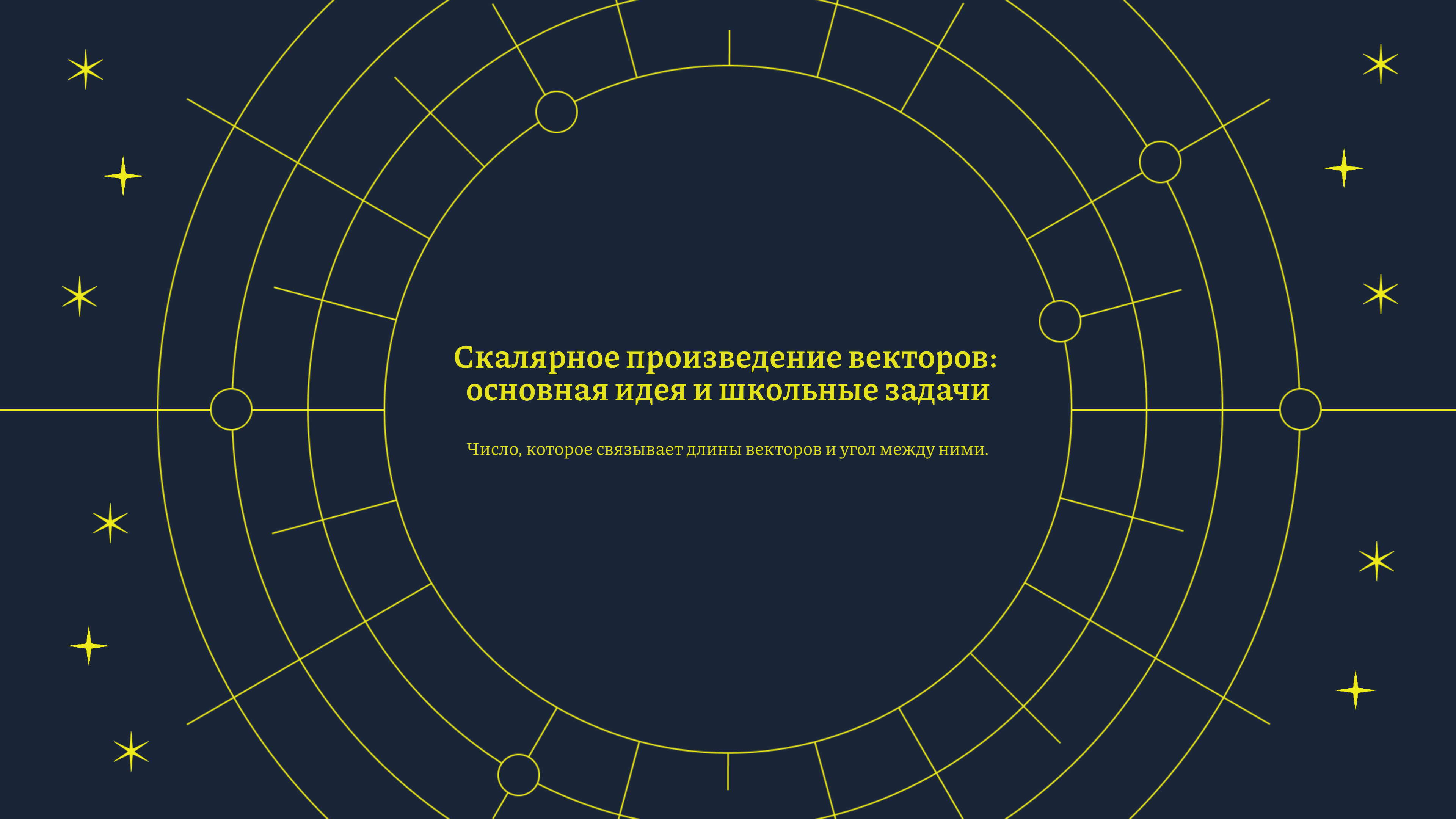


The background features a dark blue field with several concentric yellow circles. Radial lines connect these circles, and several small yellow circles are placed at the intersections. Scattered throughout the background are numerous yellow four-pointed stars of varying sizes.

Скалярное произведение векторов: основная идея и школьные задачи

Число, которое связывает длины векторов и угол между ними.

Почему эта тема важна в 9 классе

Скалярное произведение связывает векторы, координаты и углы. Оно помогает находить угол между векторами, проверять прямой угол и решать задачи на длины и проекции.



0

означает, что векторы
перпендикулярны.

При нулевом результате между векторами образуется прямой угол, и это удобно проверять в задачах.

Школьный курс геометрии, 9 класс

Формула через длины векторов и угол между ними

Основная запись

Скалярное произведение вычисляют по формуле $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \alpha$. Она показывает, как длины векторов и угол между ними вместе определяют результат.

Один угол — два вывода

Если векторы направлены почти одинаково, косинус близок к 1, и произведение становится большим. При прямом угле $\cos 90^\circ$ равен нулю, поэтому результат исчезает.

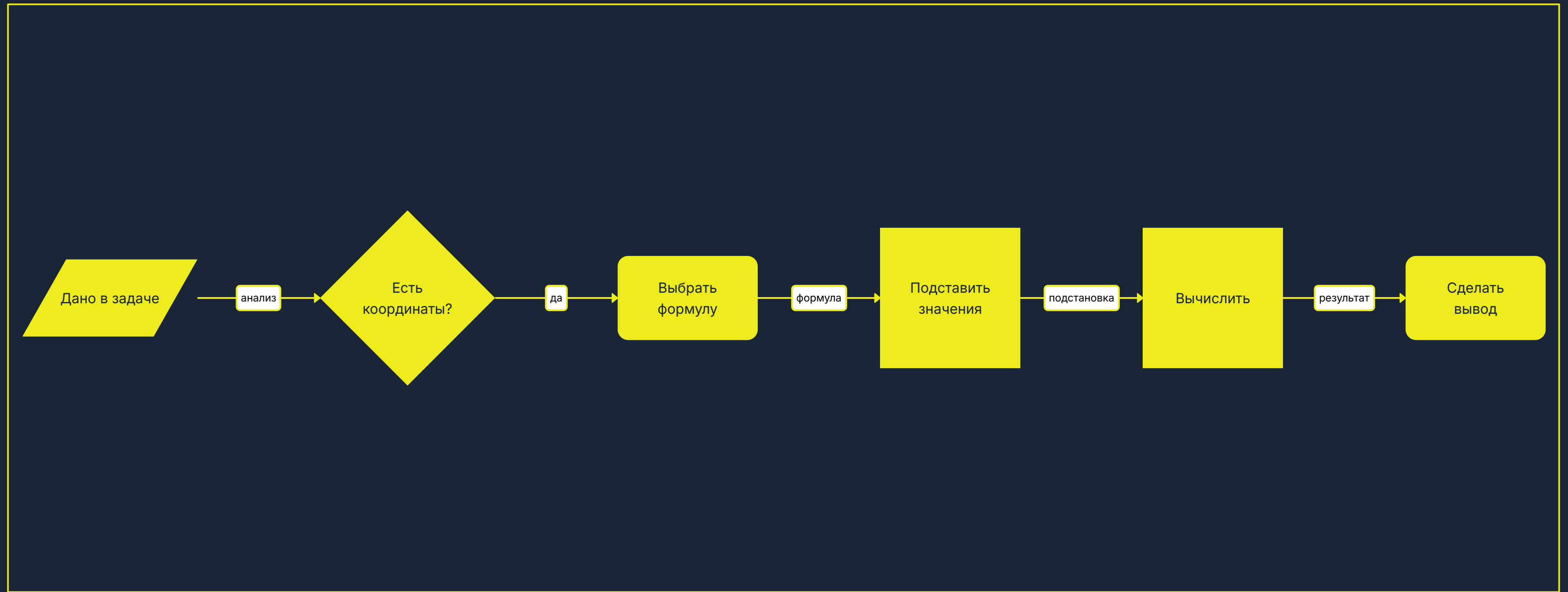
Зачем это нужно

По этой формуле можно не только найти число, но и понять взаимное положение векторов: острый, прямой или тупой угол между ними.



Как находить скалярное произведение

Порядок действий зависит от того, какие данные даны в задаче.



Скалярное произведение в координатах

1 На плоскости

Для векторов $a(x_1, y_1)$ и $b(x_2, y_2)$ используют запись $a \cdot b = x_1 x_2 + y_1 y_2$. Она особенно удобна, когда в условии сразу даны координаты концов или направляющих отрезков.

2 В пространстве

Если вектор имеет три координаты, к сумме добавляют третье слагаемое: $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$. Так считают скалярное произведение в задачах с объёмными фигурами.

3 Когда выбирать

Координатная формула помогает быстро считать без чертежа. Достаточно аккуратно выписать числа, не перепутать знаки и сложить попарные произведения одинаковых координат.

Два способа вычисления: формулы и условия применения

Выбор формулы зависит от того, какие данные уже известны в задаче.

Если известен угол, удобнее геометрическая запись; если заданы координаты, быстрее работает координатная формула.

Способ	Когда применять	Формула
Геометрический	Есть длины и угол	$a \cdot b = a \cdot b \cdot \cos \alpha$
На плоскости	Есть координаты	$x_1 \times x_2 + y_1 y_2$
В пространстве	Есть 3 координаты	$x_1 \times x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$

Как знак скалярного произведения связан с углом



Диаграмма показывает не величину, а направление вывода: положительное, нулевое или отрицательное значение сразу подсказывает тип угла между векторами.

Знак результата позволяет быстро определить угол между векторами без дополнительных построений.

Школьный курс геометрии, 9 класс

Перпендикулярность векторов

1

Главный признак

Если скалярное произведение равно нулю, то векторы перпендикулярны. Это один из самых удобных способов найти прямой угол в задачах по геометрии и координатам.

2

Где применяется

Признак используют в доказательствах свойств фигур, при проверке прямоугольности и в задачах, где нужно подтвердить наличие прямого угла по вычислениям.

3

Почему это важно

Вместо длинных построений можно получить точный ответ через числа. Это экономит время и делает решение более надёжным, особенно в координатных задачах.

Смысл проекции в скалярном произведении

Направление

Скалярное произведение показывает, насколько один вектор «смотрит» в сторону другого. Чем ближе направления, тем сильнее положительный вклад в результат.

Проекция

Проекция помогает увидеть, какая часть одного вектора действует вдоль другого. Поэтому важна не только длина, но и угол между ними.

Противоположные стороны

Если векторы направлены в разные стороны, результат становится отрицательным. Это означает, что направления частично «мешают» друг другу, а не усиливают.



Пример вычисления по координатам

1 Записываем данные

Пусть заданы векторы $a(3, 4)$ и $b(2, -1)$. Сначала внимательно выписываем координаты, чтобы не перепутать их порядок и не потерять знак у отрицательной координаты.

2 Применяем формулу

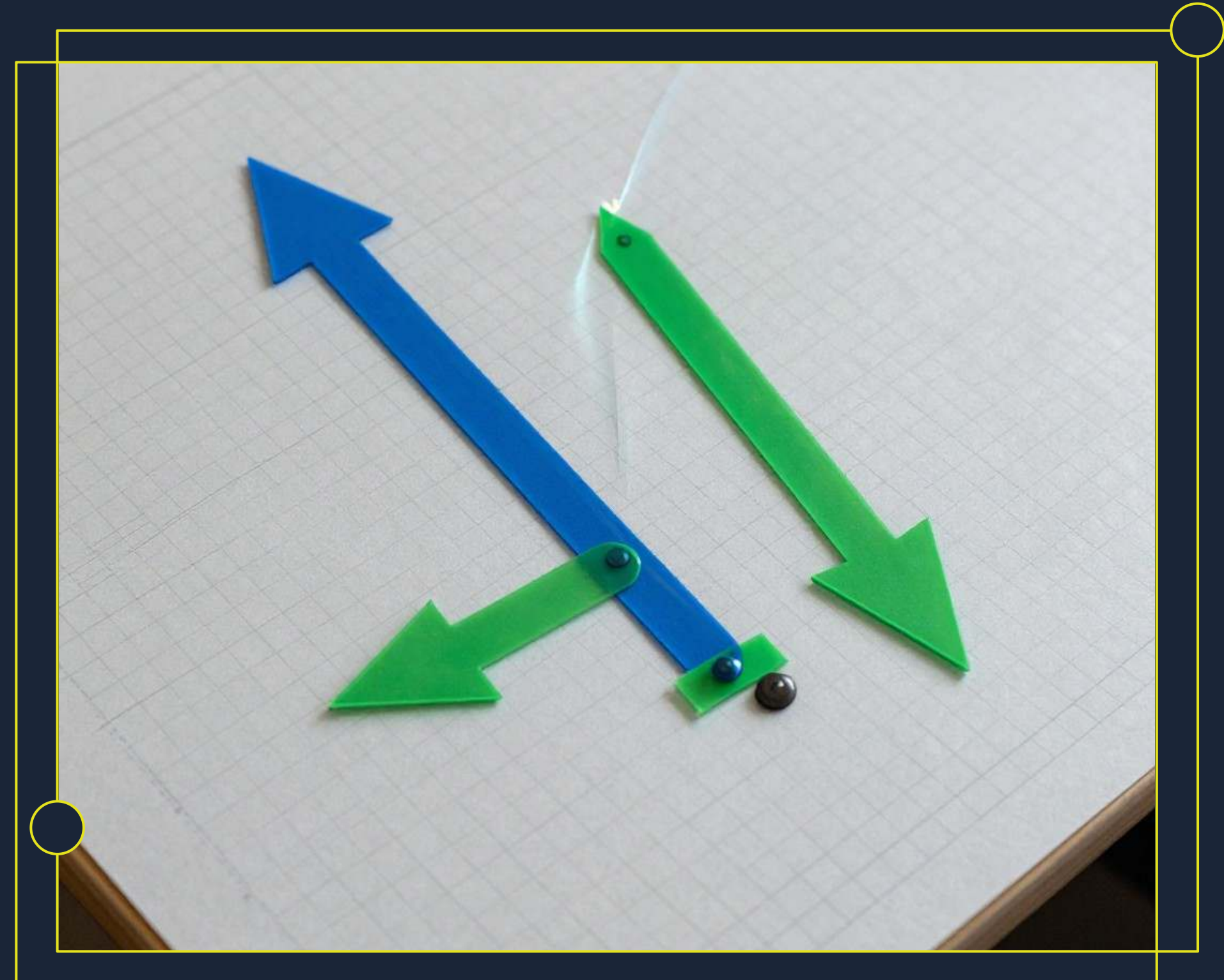
Для координат на плоскости используем правило $a \cdot b = x_1 \times x_2 + y_1 y_2$. Подставляем числа: $3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1)$. Здесь важно каждое произведение считать отдельно.

3 Считаем результат

Получаем $6 - 4 = 2$. Это значение скалярного произведения, то есть не вектор, а обычное число, которое можно сразу анализировать по знаку.

4 Делаем вывод

Положительный результат означает, что угол между векторами острый. Значит, направления векторов в целом совпадают, хотя один из них частично отклонён от другого.



Проверка результата по смыслу

Острый угол

Если векторы смотрят примерно в одну сторону, скалярное произведение получается положительным. Это первый быстрый способ проверить, не ошиблись ли в вычислениях.

Прямой угол

Когда векторы перпендикулярны, их скалярное произведение равно нулю. Такой результат сразу подсказывает, что между ними есть прямой угол.

Тупой угол

Если один вектор направлен в противоположную сторону, значение становится отрицательным. Тогда ответ согласуется с тупым углом между векторами.



Основные школьные задачи, где используется скалярное произведение

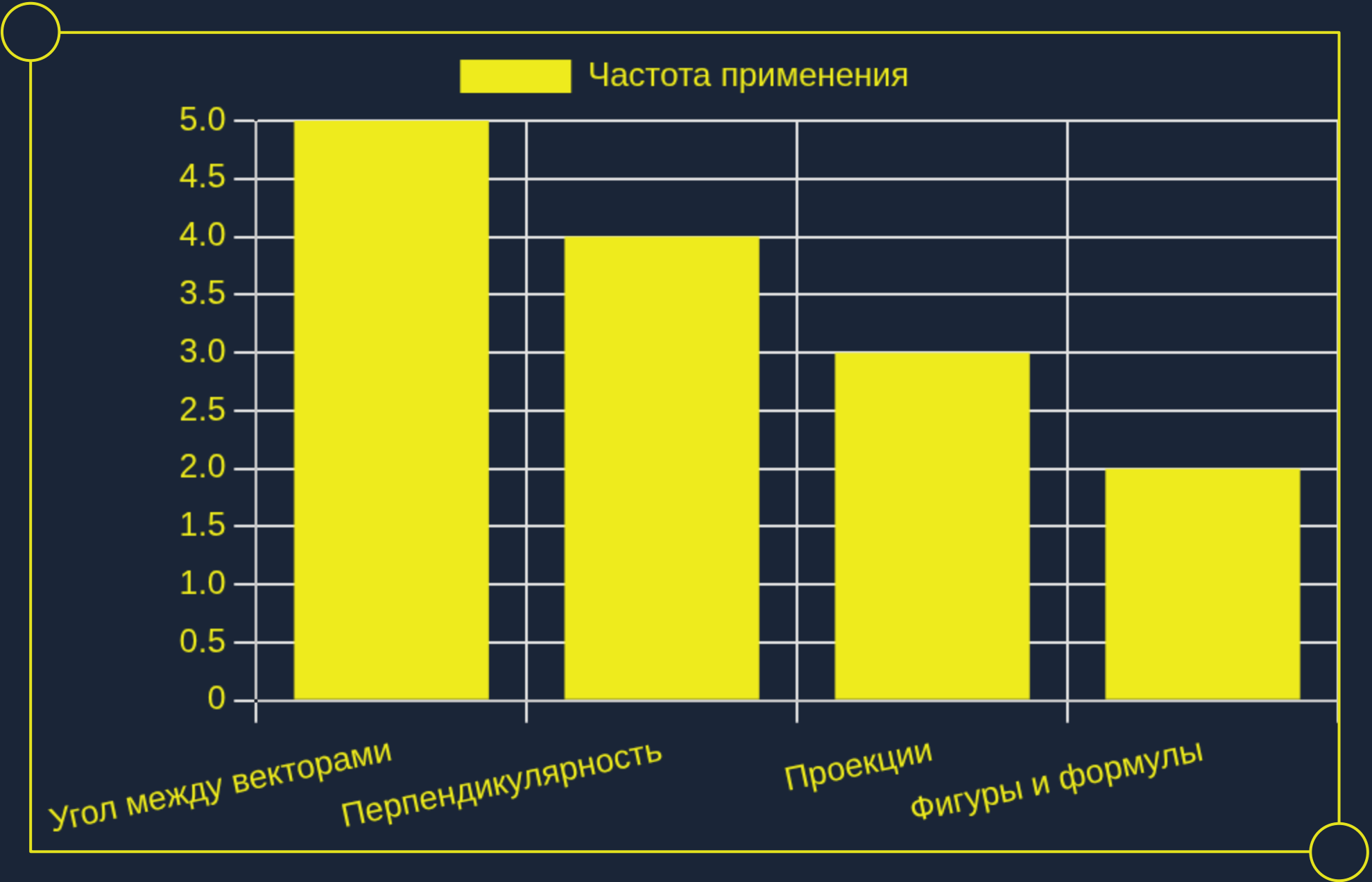


Диаграмма показывает, что тема нужна не только для вычислений, но и для проверки свойств фигур и углов в типовых задачах.

Чаще всего школьники используют скалярное произведение для нахождения угла и проверки прямого угла; остальные применения дополняют эти основные задачи.

Схематическое сравнение по типовым заданиям школьного курса геометрии 9 класса

Знак скалярного произведения и геометрический смысл

Школьный курс геометрии, 9 класс

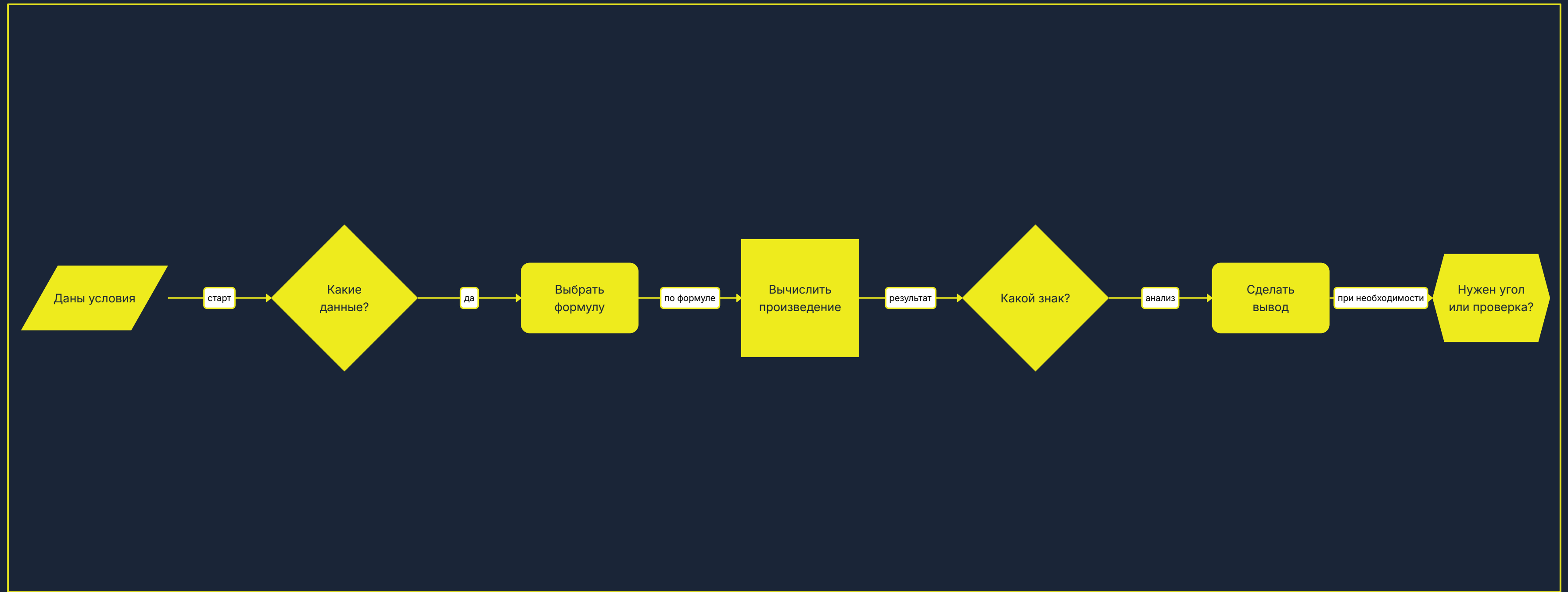
Знак	Смысл
$a \cdot b > 0$	угол острый
$a \cdot b = 0$	угол прямой
$a \cdot b < 0$	угол тупой

Таблица помогает быстро связать знак результата с видом угла между векторами и сделать правильный вывод без лишних построений.

Знак скалярного произведения сразу показывает взаимное расположение векторов, а нулевое значение служит признаком перпендикулярности.

Алгоритм решения задач на скалярное произведение

Последовательность действий для школьных задач по векторам и координатам



Связь с теоремой косинусов



Общий язык формул

Скалярное произведение и теорема косинусов описывают одну и ту же связь: длины сторон и угол между ними. Поэтому обе формулы удобно применять вместе.



Треугольники без лишних шагов

В задачах на треугольники можно выразить угол через стороны или проверить длину стороны по известным данным. Это делает вычисления короче и понятнее.



Связь разделов геометрии

Тема соединяет векторы, углы и свойства фигур в один рабочий инструмент. Именно поэтому она полезна не только в этой главе, но и дальше.

Применение в физике, навигации и компьютерной графике

Сила и движение

В физике важно не всё направление силы, а только её часть вдоль движения. Скалярное произведение помогает найти именно этот вклад, поэтому им пользуются при расчёте работы. На схеме удобно показать силу, наклонённую к траектории под углом.



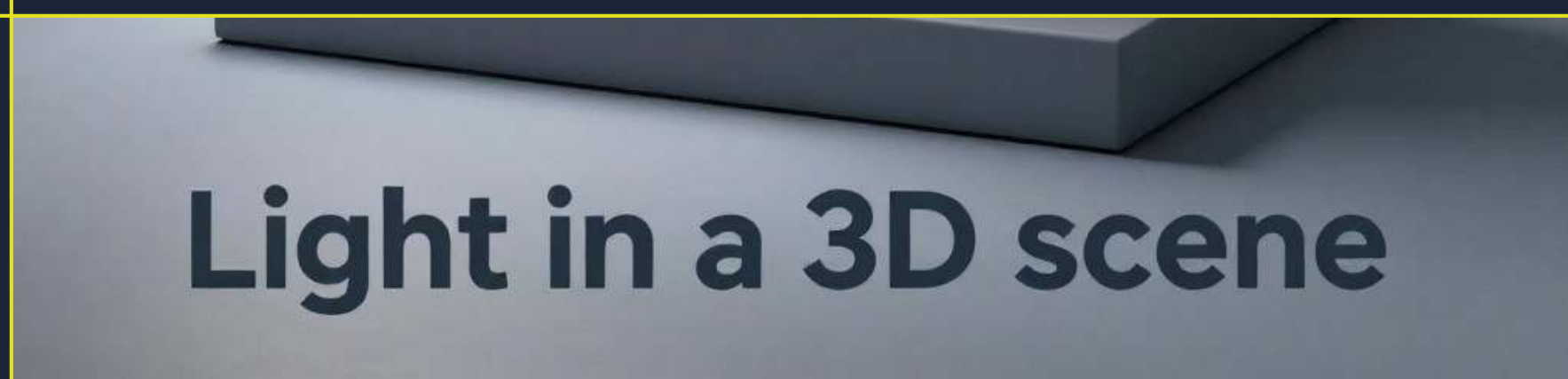
Ориентирование и путь

В навигации сравнивают, насколько два направления совпадают или расходятся. Это полезно для движения по маршруту, поворотов и оценки курса. На изображении можно показать стрелки на карте и их угол друг к другу.



Свет в 3D-сцене

В компьютерной графике скалярное произведение помогает понять, как поверхность «смотрит» на источник света. От этого зависит яркость участка и реалистичность изображения. Уместна 3D-сцена с объектом, светом и выделенной гранью.



Типичные ошибки при работе со скалярным произведением

Путают разные произведения

Скалярное произведение иногда ошибочно смешивают с векторным. Нужно помнить: здесь результатом всегда является число, а не стрелка с направлением.

Забывают знаки координат

Особенно часто ошибки появляются при отрицательных числах. Один неверный знак в координатах меняет результат и может исказить вывод о виде угла.

Не учитывают угол

Если применять формулу через длины, важно правильно взять косинус угла между векторами. Иначе ответ получится формально верным по записи, но неверным по смыслу.

Неверно читают ответ

После вычисления нужно сразу понять, что означает число: перпендикулярность, острый или тупой угол. Ответ в виде вектора здесь недопустим.

Короткая памятка для решения задач

Памятка помогает быстро выбрать нужную формулу и сразу проверить смысл полученного результата в типовых задачах по векторам.

Сначала выбирают данные, затем формулу, после чего проверяют знак результата и делают геометрический вывод.

Ситуация	Действие
Координаты	сумма произведений
Длины и угол	формула через cos
Прямой угол	проверить ноль
Нужен смысл	смотреть знак



Скалярное произведение: число, которое помогает видеть геометрию

Скалярное произведение связывает длины, направления и углы в одном числе. Оно помогает находить угол между векторами, проверять перпендикулярность и уверенно решать школьные задачи по геометрии.