

Вписанный четырёхугольник: основные идеи, признаки и формулы

Вершины лежат на одной окружности. Разберём критерии, углы, теорему Птолемея и площадь.



Где «вписанный четырёхугольник» встречается в 11 классе

Тема входит в раздел «Окружность» и опирается на хорды, дуги, вписанные и центральные углы. В задачах по планиметрии она помогает находить неизвестные углы, стороны и диагонали без координат. Особенно ценна в усложнённых заданиях, где нужно связать несколько свойств.



Определение вписанного четырёхугольника

Четырёхугольник называется вписанным, если все его вершины лежат на одной окружности. Эта окружность называется описанной около четырёхугольника.

Стороны вписанного четырёхугольника становятся хордами той окружности, на которой расположены все точки-вершины. Поэтому длины сторон связаны с геометрией окружности.

Важно: важен порядок вершин: геометрическая картинка не должна «перемешиваться», иначе угловые соответствия и дуги перестанут совпадать с используемыми формулами.



180°

**Сумма противоположных углов
равна 180°, значит четыре
вершины лежат на одной
окружности.**

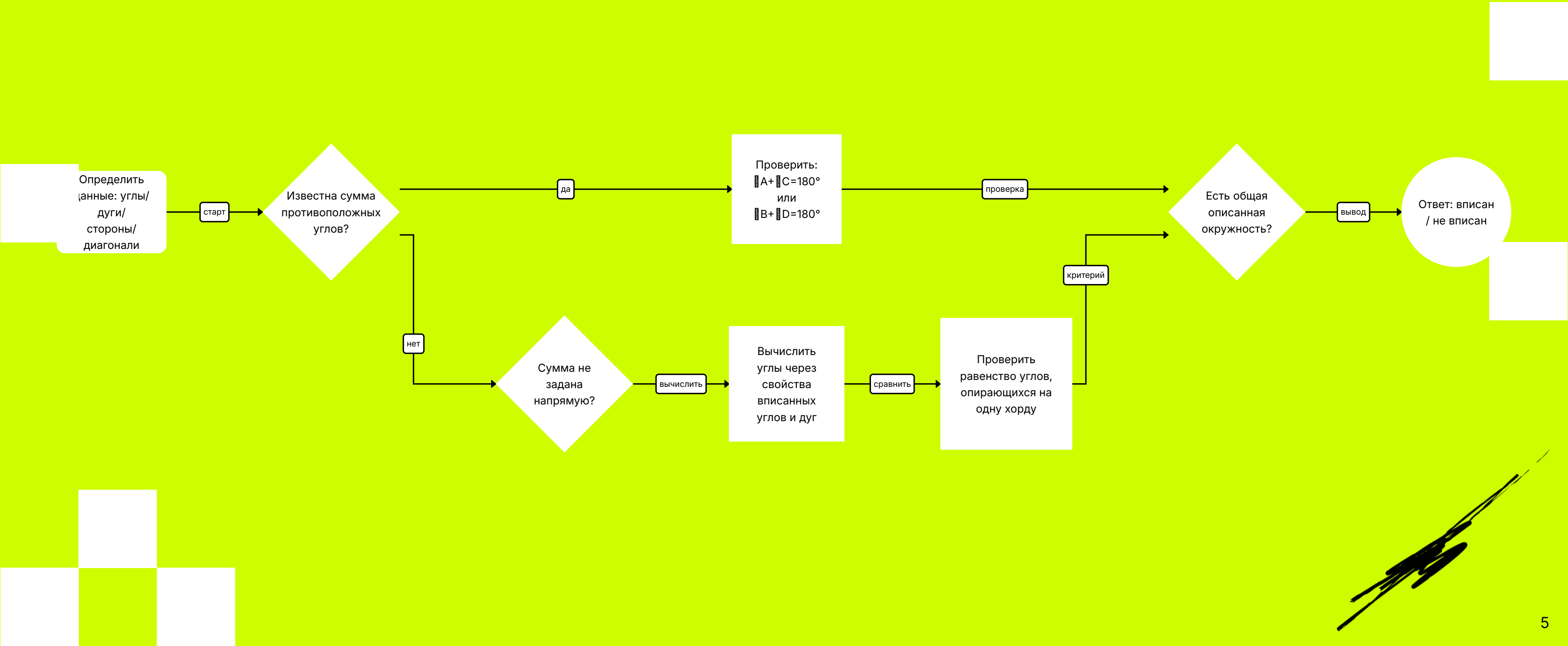
*Классический признак вписанного четырёхугольника (школьная геометрия,
планиметрия)*



Четырёхугольник является вписанным тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180°. Проверка по углам — базовый критерий в школьных задачах.

Как проверить, вписан ли четырёхугольник

Даны углы, стороны, диагонали или дуги; дальше используем признаки и угловые соотношения.

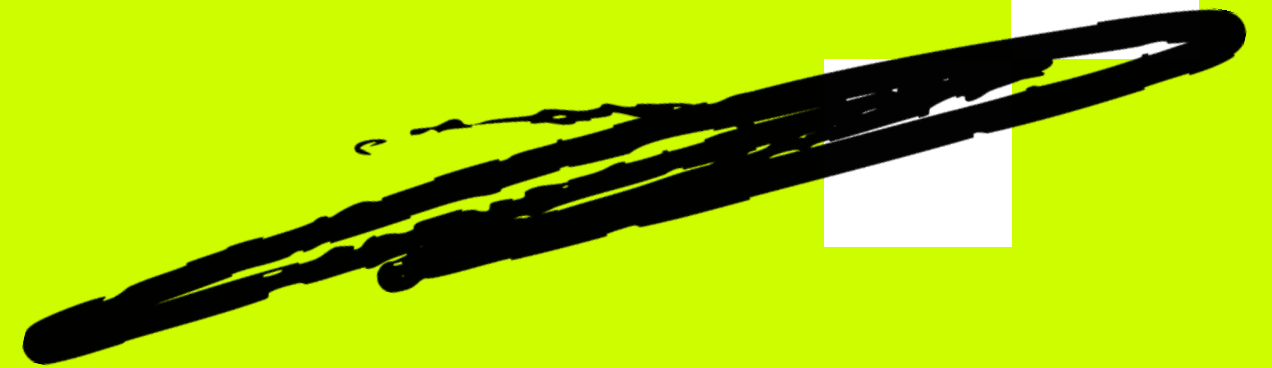


Свойства углов в окружности

Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается. Это связывает «угол» и «дугу» так, что можно переводить одно в другое для вычислений.

Если два вписанных угла опираются на одну и ту же хорду, то они равны. Значит, по одному элементу можно восстановить другие угловые величины.

Для вписанного четырёхугольника каждый внешний угол равен внутреннему противоположному. А сумма противоположных внутренних углов всегда составляет 180° .



Диагонали и работа с углами

Диагональ как «вход» в окружность

Проведите диагонали AC и BD и мысленно разложите четырёхугольник на четыре треугольника. В каждом треугольнике появляются вписанные углы, связанные с дугами на окружности. Так угловые задачи перестают быть «разрозненными».

Дуги подсказывают равенства

На схеме отметьте дуги, соответствующие найденным углам. Если углы опираются на одну и ту же хорду, на диаграмме проявится повторяемость дуг и углов. Это помогает сократить вычисления и проверить себя прямо по рисунку.

Диагонали собирают информацию в одну строку решения

Когда диагонали делят фигуру, удобно сравнивать углы, полученные из разных треугольников. В итоге связи между AC, BD и дугами превращаются в набор строгих равенств. Решение становится последовательным, а не «на угадывание».



Что нужно помнить про вписанный четырёхугольник



Большинство задач сводятся к цепочке «угол $\leftrightarrow$ дуга $\leftrightarrow$ хорда», а затем — к вычислениям через теорему Птолемея или площади.

Самым практичным входом остаётся признак по сумме противоположных углов: он быстро подтверждает, что можно использовать всю «окружностную» технику.



Сводка учебных фактов по теме «Вписанный четырёхугольник», школьный курс геометрии (без числовых статистик)

Основные свойства и формулы

Сопоставьте формулировку с типом задания: когда углы известны — работайте с углами и дугами; когда длины — подключайте Птолемея и площади.

Один и тот же рисунок можно решать разными путями: сначала убедиться во вписанности, затем выбрать инструмент под конкретные данные (углы или длины).

Свойство	Формулировка	Применение в задачах
Противоположные углы	Сумма противоположных углов равна 180°	Проверка вписанности, поиск углов
Вписанный угол	Вписанный угол равен половине дуги	Нахождение углов через дуги
Одна хорда	Вписанные углы, опирающиеся на одну хорду, равны	Сравнение углов без вычислений
Существование описанной окружности	Если углы дают сумму 180° , окружность существует	Обоснование возможности применения свойств
Птолемей	$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$	Нахождение стороны/диагонали
Площадь	Через диагонали (и угол), и по Брахмагупте	Вычисление площади по заданным данным

Школьная программа по геометрии, раздел «Окружность» и стандартные теоремы/формулы

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

**По этой формуле можно
связывать диагонали и
стороны вписанного
четырёхугольника.**

*Теорема Птолемея (для вписанного четырёхугольника), классический результат
планиметрии*



Произведение диагоналей вписанного четырёхугольника равно сумме произведений противоположных сторон: $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.
Теорема нужна для вычисления неизвестных отрезков и проверки числовых данных.

Где чаще применяется теорема Птолемея



Теорема Птолемея особенно уместна, когда одновременно видны длины противоположных сторон и диагоналей, а угловая информация неполная: диагонали «достраивают» вычисления.

По задачным типам видно: чаще всего теорема работает как вычислительный мост между сторонами и диагоналями, позволяя завершать решение без перевода всех данных в углы.



Обобщение типовых школьных задач (практика планиметрии), без привязки к конкретной статистике.

Площадь вписанного четырёхугольника



Площадь S вписанного четырёхугольника удобно находить через диагонали: $S = 1/2 \cdot AC \cdot BD \cdot \sin \varphi$, где φ — угол между диагоналями. Это сокращает шаги по сравнению с построением высот.

В задачах часто дают диагонали и угол между ними: тогда формула сразу даёт ответ. Если φ находится из угловых соотношений, площадь вычисляется в два логических перехода.

Для любого вписанного четырёхугольника применяется формула Брахмагупты: $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где p — полупериметр, a, b, c, d — стороны. Она работает по длинам без тригонометрии.

Выбор инструмента зависит от данных: диагонали и φ — формула через $\sin$; только стороны — формула Брахмагупты. Оба подхода особенно полезны в задачах на вычисление площади «в один проход».



Частные случаи вписанных четырёхугольников

Прямоугольник как «идеальный» вписанный пример

В прямоугольнике противоположные углы равны 90° , а значит, их сумма составляет 180° . Поэтому он автоматически удовлетворяет признаку вписанности. В рисунке хорошо выделяются два равных угла и одна общая описанная окружность.



Квадрат: вписанность благодаря симметрии

У квадрата все углы по 90° , следовательно, сумма противоположных углов также равна 180° . Визуально легко показать, что окружность проходит через все вершины. Симметрия делает этот случай «самым наглядным» для проверки понимания признака.



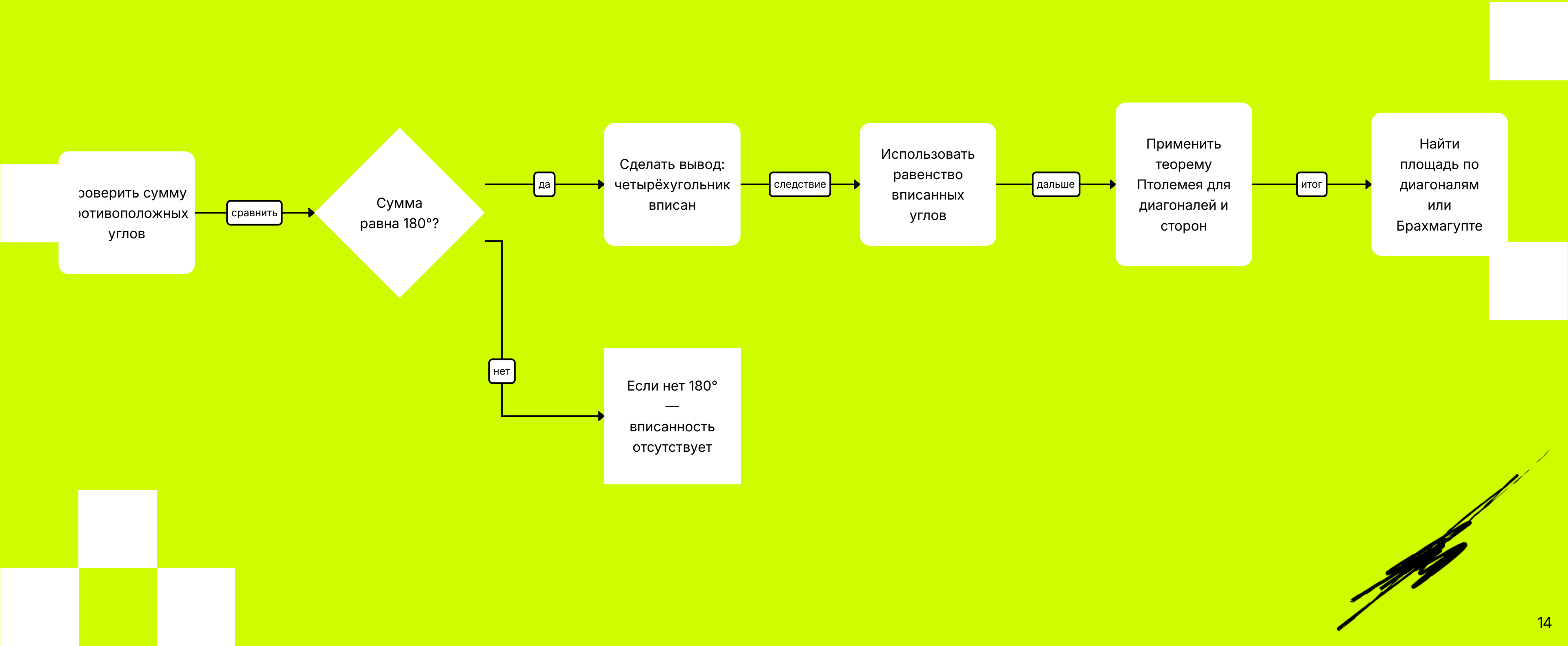
Равнобедренная трапеция: углы складываются до 180°

У равнобедренной трапеции углы при основании попарно равны, а противоположные углы дополняют друг друга до 180° . Именно это позволяет утверждать вписанность. На иллюстрации удобно подчеркнуть равенства углов и геометрическую симметрию фигуры.



Связь признаков и следствий

Цепочка рассуждений: от углов к вычислениям



Основные способы решения задач



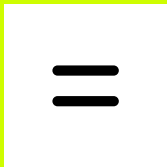
Углы → дуги

Когда в задаче встречаются углы, переводите их в дуги: так легче применять соотношения вписанного угла с дугой и находить недостающие угловые величины.



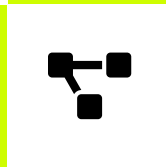
Дополнительные углы

Часто удобно дорисовать лучи и рассмотреть внешние углы. Это позволяет связать нужный угол с противоположным и быстрее выйти к признаку вписанности.



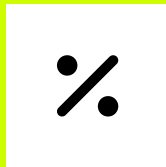
Равенство вписанных углов над хордой

Если два угла опираются на одну и ту же хорду, они равны. Этот приём помогает быстро связать разные вершины и построить систему равенств.



Разбиение на треугольники

Диагонали делят четырёхугольник на треугольники. Затем применяются свойства вписанных углов в каждом треугольнике, что упрощает работу с углами и дугами.



Теорема Птолемея как вычислительный центр

Когда известны стороны и диагонали (или часть из них), используйте формулу $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$. Она помогает закрыть расчёт и проверить согласованность данных.



Типовые данные и подходящие инструменты

Что дано	Удобный инструмент	Что находится
Два угла	Свойства вписанных углов	Недостающие углы/проверка вписанности
Сторона и диагональ	Теорема Птолемея	Вторая сторона или другая диагональ
Четыре стороны	Формула Брахмагупты	Площадь S
Площадь и диагонали	S через $\sin \varphi$	Угол φ или диагональ
Равнобедренная трапеция	Признак по углам	Уточнение параметров вписанности
Дуги	Связь «угол—дуга»	Углы и диагонали через дуговые соотношения

Типология школьных задач по теме «Окружность. Вписанный четырёхугольник» (обобщение методики).

Один и тот же объект в задаче можно решать разными способами: угловым анализом, через теорему Птолемея или формулами площади. Выбор зависит от того, какие величины даны в условии.

Если данные преимущественно угловые — начинайте с соотношений между вписанными углами и дугами; если длины — центр тяжести переносится на Птолемея и формулы площади.

Типичные ошибки при решении задач



Самая частая проблема — угловая: неверно выделяют противоположные углы или теряют условие, что все вершины лежат на одной окружности.

Диаграмма подтверждает: ошибки концентрируются вокруг распознавания структуры «вписанности» и корректной работы с углами и дугами.



Методическое обобщение типовых работ учащихся (качественный анализ), без привязки к конкретному набору оценок.

Исторический контекст и место в математике

Античная геометрия

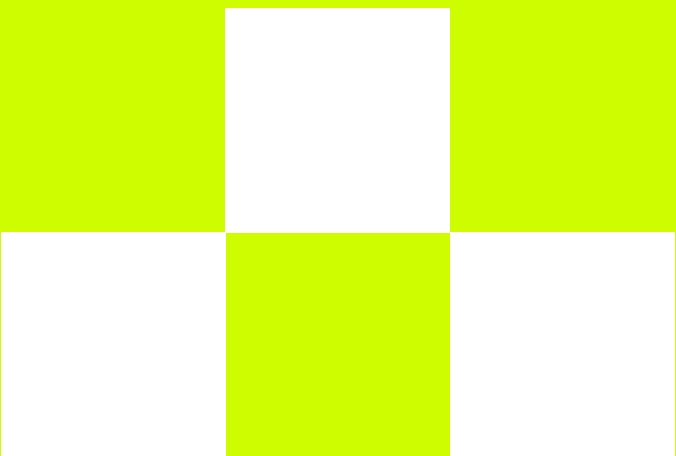
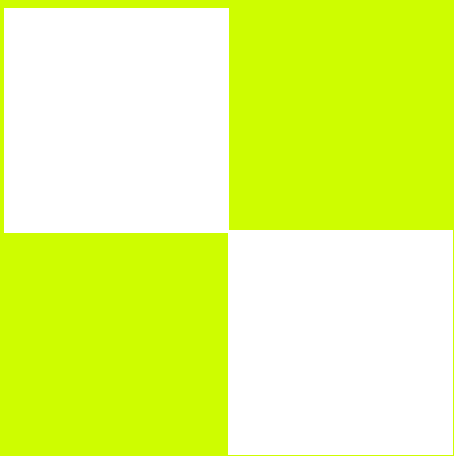
Идеи окружности и свойства вписанных фигур развивались в классической геометрии. Множество утверждений о хордах и углах формировались как результат наблюдений над конструкциями.

Формула Брахмагупты

Формула Брахмагупты для площади вписанного четырёхугольника демонстрирует единство геометрии и вычислений. Она подчёркивает, что задачи на площадь можно решать «длиннами», избегая лишних построений.

Теорема Птолемея (древнегреческая традиция)

Теорема Птолемея связывает геометрию окружности с алгебраическим соотношением между длинами. Это пример того, как из геометрических фактов рождаются точные вычислительные формулы.



Практическое значение темы



Чертежи и схемы

Вписанный четырёхугольник помогает находить неизвестные элементы прямо по рисунку: углы, стороны и диагонали. Свойства окружности сокращают число промежуточных вычислений.



Олимпиадный стиль решения

В задачах повышенной сложности тема работает как «связующее звено»: углы помогают выйти к Птолемею, а Птолемея — к диагоналям и площади. Получается цепочка логических ходов.



Проверка правильности построений

Условия вписанности дают встроенный контроль: если вычисленные углы не согласуются с признаком, то чертёж или исходные данные ошибочны. Это полезно и в задачах, и в самопроверке.



Связь с тригонометрией и алгеброй

Формулы площади вводят синус угла между диагоналями и радикалы Брахмагупты. Кроме того, теорема Птолемея превращает геометрию в аккуратные алгебраические преобразования.



Вписанный четырёхугольник: геометрия, которая даёт точные вычисления

Главный признак вписанного четырёхугольника: сумма противоположных углов равна 180° . Далее следуют равенства вписанных углов, теорема Птолемея и формулы площади через диагонали и стороны, обеспечивая решения задач разного уровня сложности.

