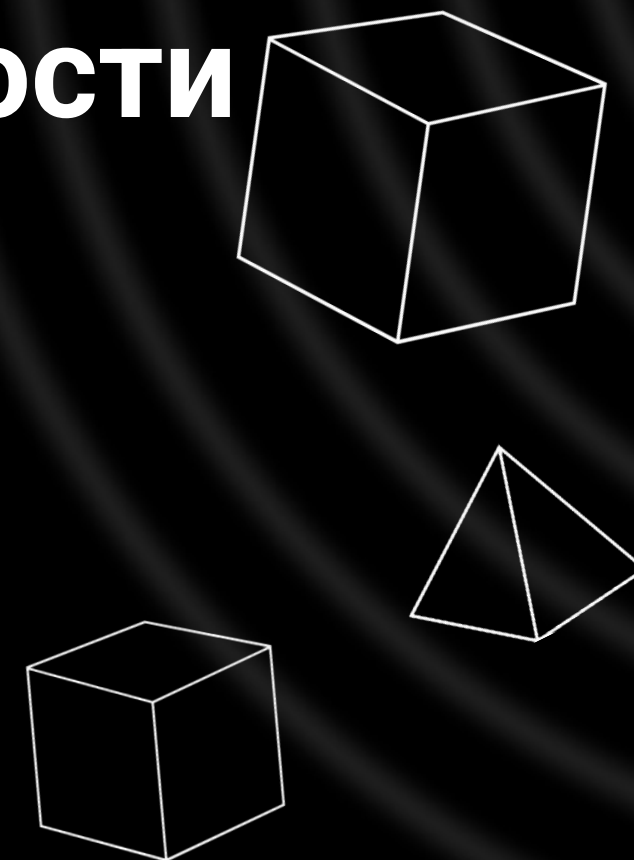


Взаимное расположение прямой и окружности

Сегодня разберём, как прямая может не иметь общих точек, касаться или пересекать окружность.



Зачем это нужно на практике

Тема помогает решать построения, задачи по рисунку и уравнения в координатной геометрии. Здесь работают радиус, перпендикуляр, касательная, секущая и хорда. Часто достаточно найти расстояние от центра до прямой и сравнить с радиусом.



Три возможных положения прямой относительно окружности

1

Если расстояние от центра окружности до прямой d больше радиуса r , общих точек нет: прямая проходит «снаружи» и не касается окружности.

2

Когда d равно r , прямая касается окружности в одной точке. В этой точке окружность и прямая имеют общий «прикосновение», без пересечения по двум точкам.

3

Если же d меньше r , прямая пересекает окружность в двух точках. Одна и та же прямая «входит» в окружность и «выходит» из неё через разные точки.

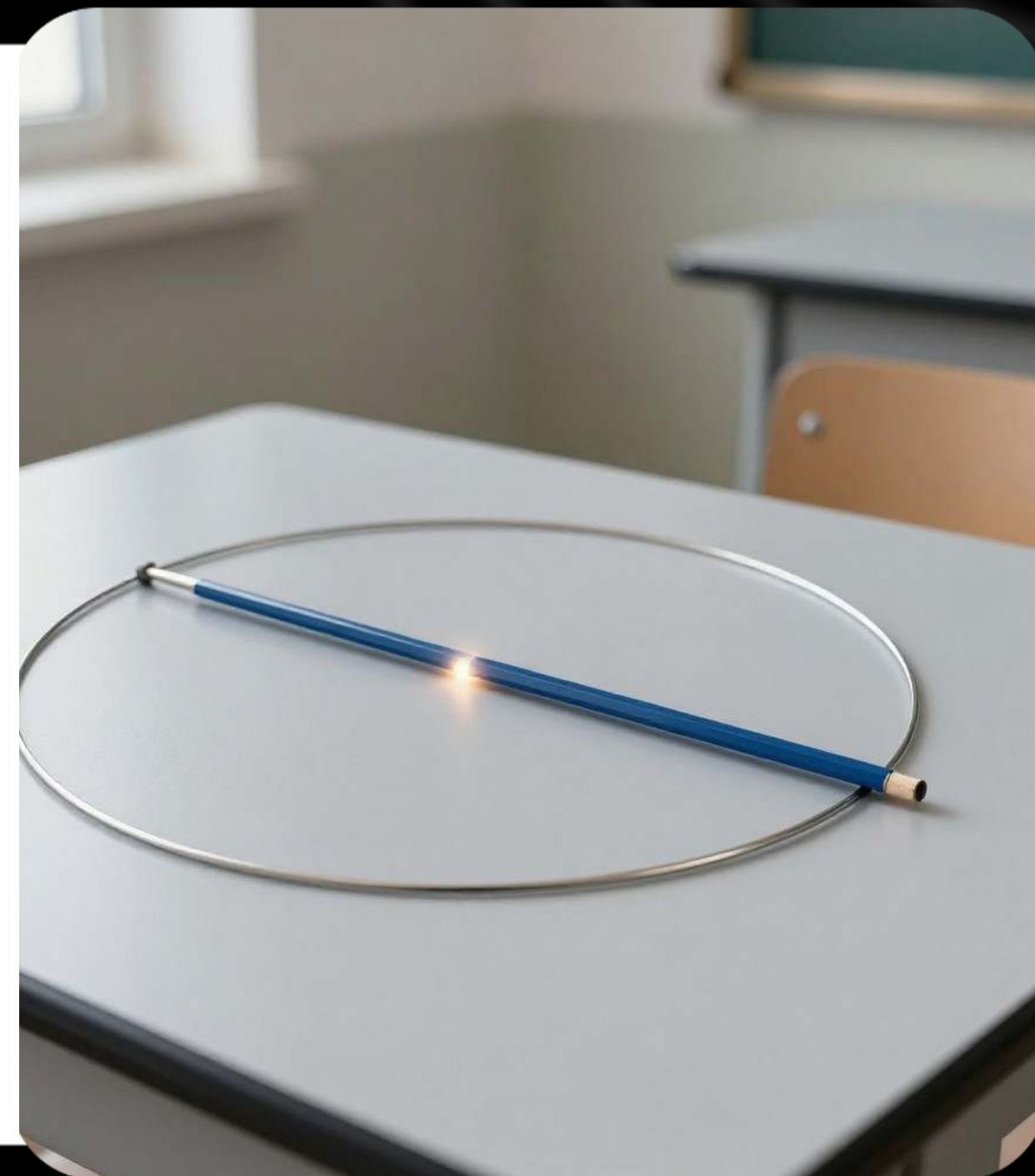
Обозначения на чертеже

Центр, радиус и расстояние до прямой

На рисунке центр окружности обычно обозначают буквой O , а радиус — буквой r . Чтобы найти расстояние от центра до прямой, проводят перпендикуляр от O к этой прямой.

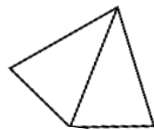
Точки пересечения

Основание перпендикуляра обозначают буквой H : длина отрезка OH и есть расстояние d . Точки пересечения прямой с окружностью, если они существуют, располагаются прямо на самой прямой.

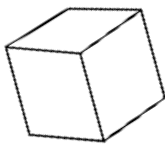


Сравнение расстояния и радиуса

d и r	Число общих точек	Положение	Короткий пример
$d > r$	0	внешняя прямая	Прямая проходит снаружи
$d = r$	1	касательная	Только касание
$d < r$	2	секущая	Пересекает в двух точках



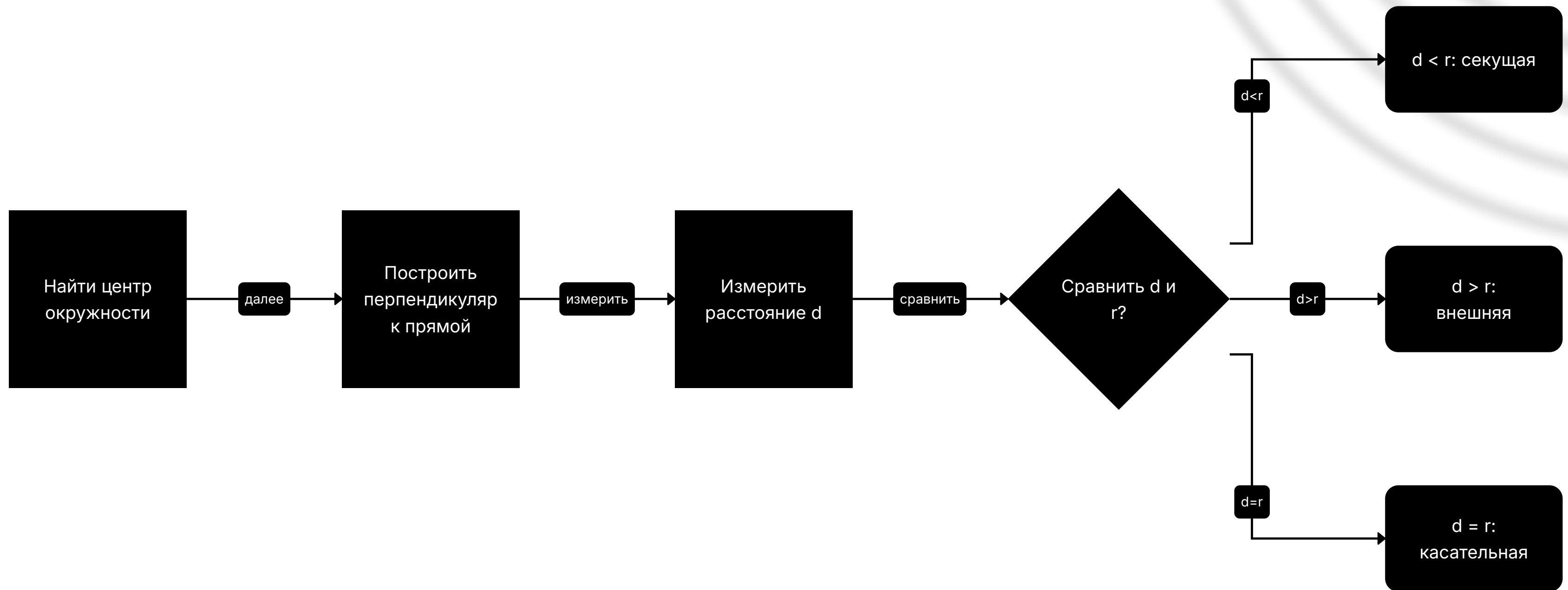
По сравнению d и r определяют число общих точек прямой и окружности и их название.



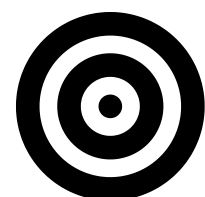
Тип положения определяется только тем, что d больше, равно или меньше r : меняется и число точек пересечения.

Алгоритм определения взаимного расположения

Последовательность действий, применимая и к чертежу, и к координатной плоскости



Касательная к окружности



Одна общая точка

Касательная имеет с окружностью ровно одну общую точку. Прямая не проходит через внутреннюю область окружности и не пересекает её по двум точкам.



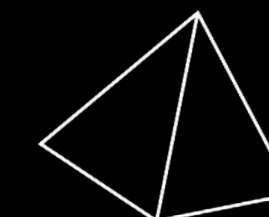
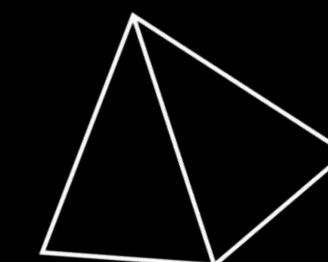
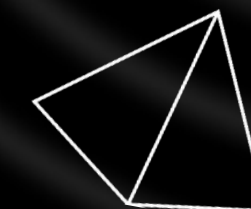
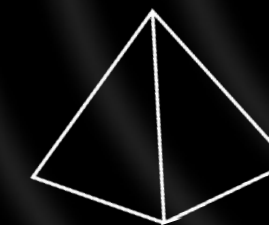
Перпендикуляр к касательной

Радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной. Этот признак помогает отличить касательную от секущей на рисунке и при проверке решения.

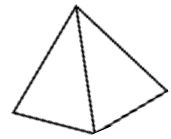


Удобна для построений

В задачах на построение касательная часто используется как «линия касания». Её задача — только коснуться окружности и затем идти дальше, не входя внутрь.



Число общих точек в зависимости от d и r



При увеличении близости прямой к центру число точек постепенно растёт: сначала 0, затем появляется касание, после чего остаются две точки пересечения.

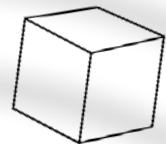
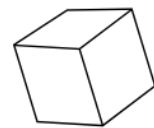
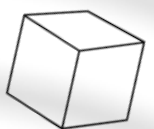


График наглядно подтверждает правило: именно сравнение d и r задаёт геометрический результат без долгих вычислений и догадок.

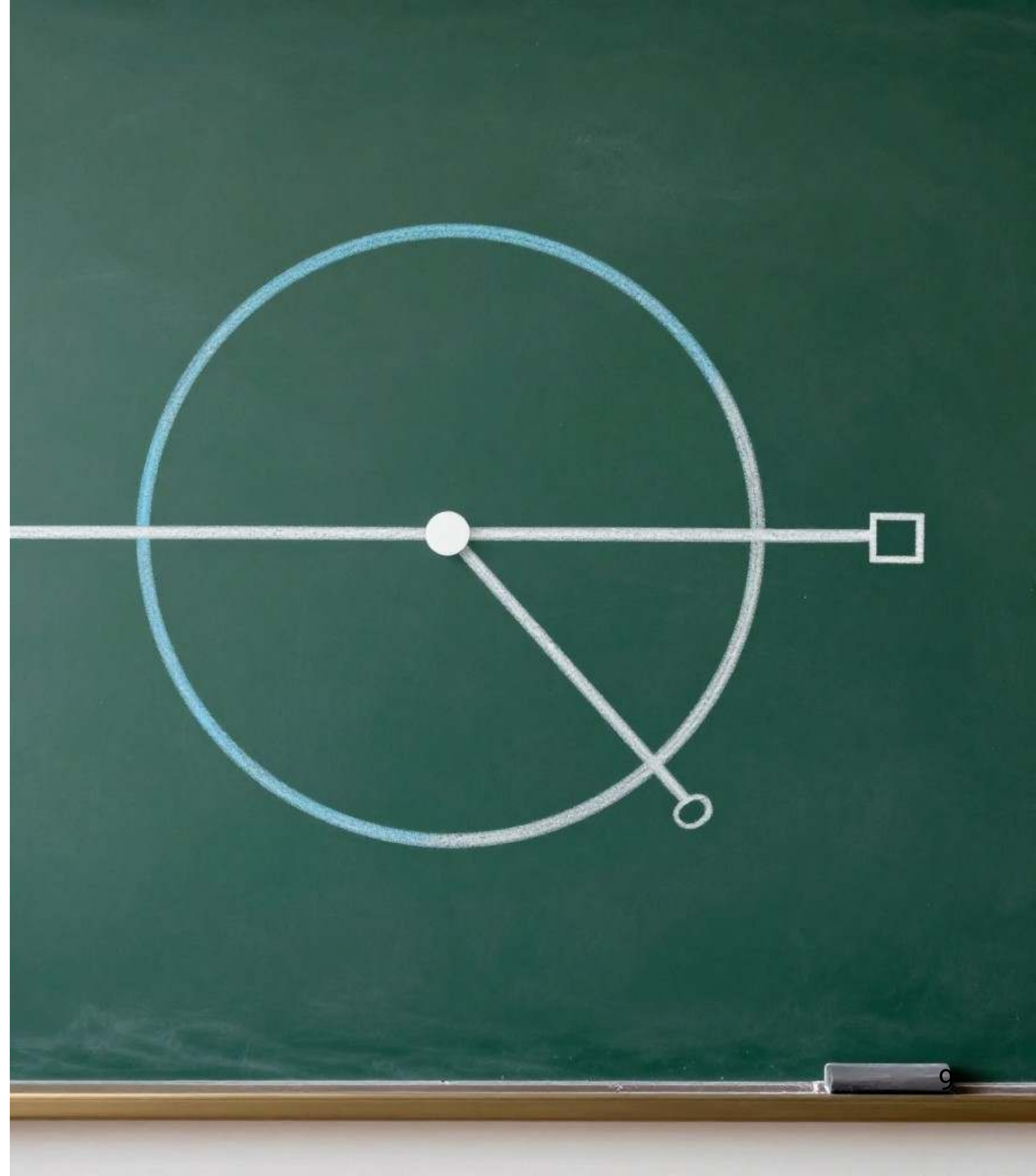
Почему именно перпендикуляр задаёт расстояние



Перпендикуляр от точки к прямой — самый короткий отрезок, который соединяет эту точку с прямой. Длина такого отрезка и считается расстоянием от точки до прямой.

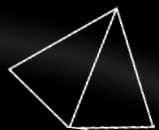


Поэтому расстоянием от центра окружности до прямой берут длину перпендикуляра $ОН$. На чертеже это помогает быстро понять, внешняя ли прямая, касательная или секущая.

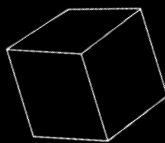


Формулы для задач в координатной плоскости

Объект	Формула/условие	Что нужно	Обозначения
Окружность	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$	задать окружность	центр (x_0,y_0)
Прямая	$Ax+By+C=0$	задать прямую	A,B,C
Расстояние	$ Ax_0+By_0+C /\sqrt{(A^2+B^2)}$	найти d	от (x_0,y_0)
Касание	$d=r$	проверить 1 точку	условие касания

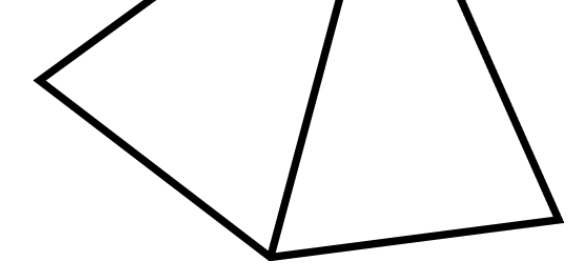


Координатный метод позволяет решать те же вопросы (внешняя, касательная, секущая) без «ручных» построений на рисунке.



Уравнения дают возможность вычислить d и сравнить с r ; дальше число пересечений определяется без построения.

Как находят точки пересечения



1

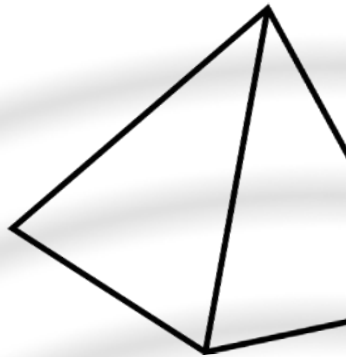


Если прямая пересекает окружность, их уравнения решают вместе: подставляют координаты точек прямой в уравнение окружности. Получается квадратное уравнение, описывающее возможные точки на обеих фигурах.

2



Число общих точек определяется числом действительных корней квадратного уравнения. Два различных действительных корня соответствуют двум точкам пересечения, которые лежат и на прямой, и на окружности.



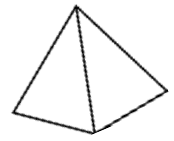
3



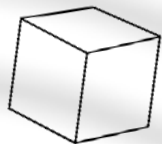
Если квадратное уравнение имеет один действительный корень, это значит, что прямая касается окружности: общая точка одна. При отсутствии действительных корней общих точек нет и прямая расположена внешним образом.



Связь дискриминанта и числа пересечений



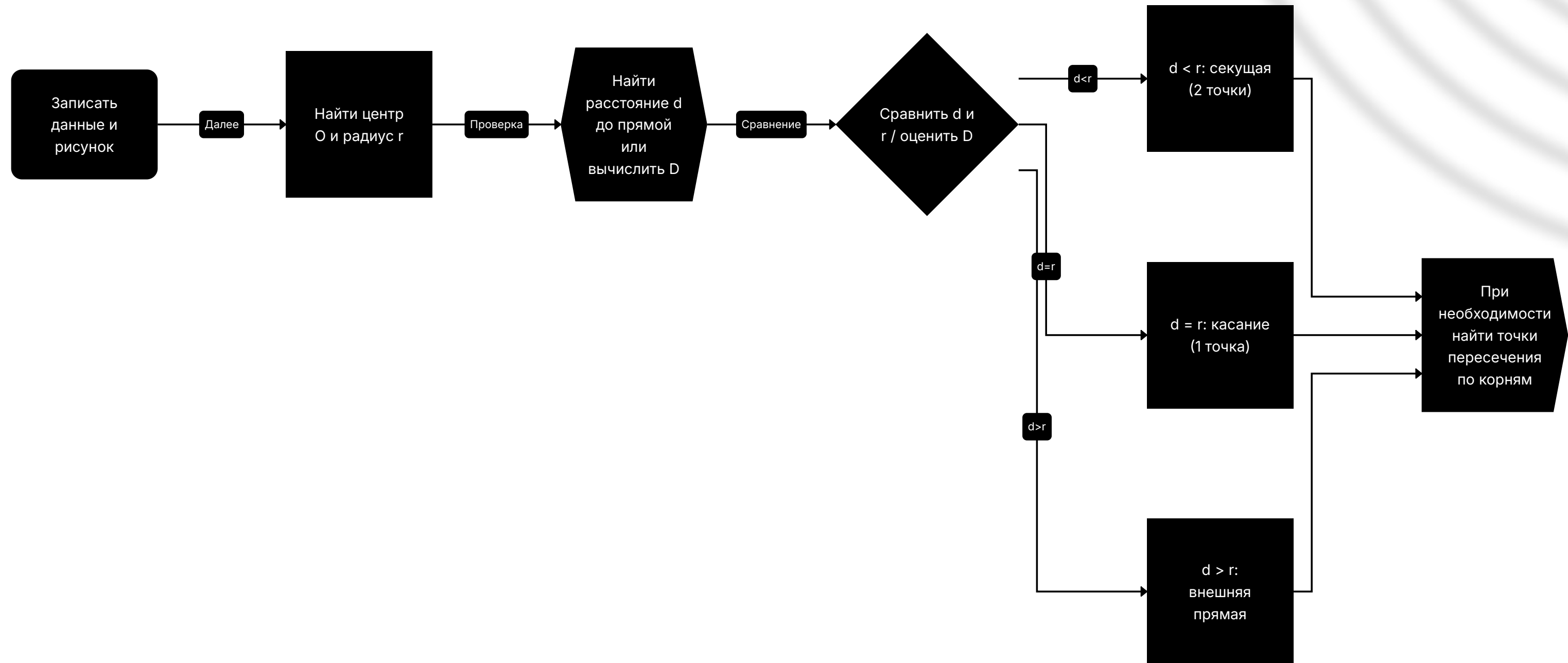
Дискриминант D квадратного уравнения появляется после совместного решения уравнений прямой и окружности и напрямую показывает, будут ли действительные координаты точек пересечения.



Если D положителен — корней два, значит прямая пересекает окружность в двух точках. При D равном нулю корень один (касание), при D меньше нуля действительных решений нет.

Алгоритм решения задач с прямой и окружностью

Логика решения: сравнение расстояния d с радиусом r или анализ корней квадратного уравнения.



Примеры из жизни и техники



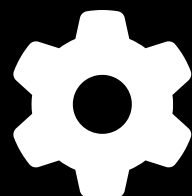
Колёса и шины

Касательная к окружности похожа на линию, которая касается края колеса и не проходит через его внутреннюю часть. В задачах это соответствует случаю с одной общей точкой.



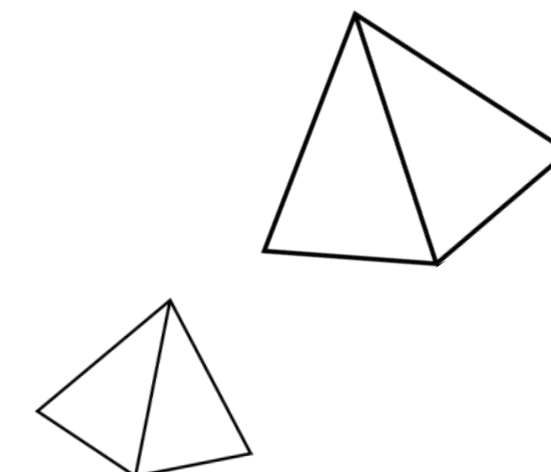
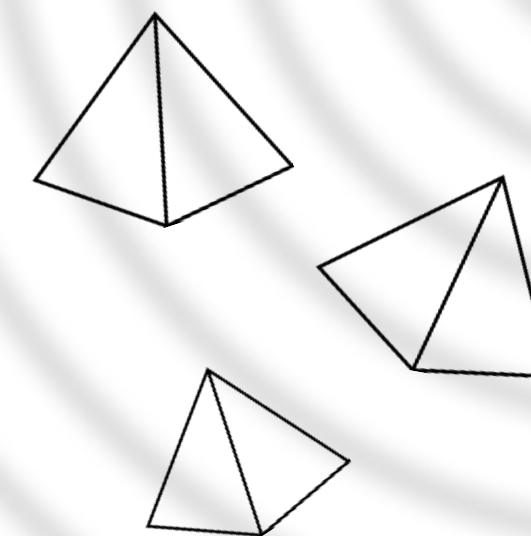
Дорожные схемы и разметка

Секущая напоминает линию, которая входит в круглый объект и выходит из него в двух точках. Это удобно представлять как движение прямой через «внутреннюю область» окружности.



Шкивы и ременные передачи

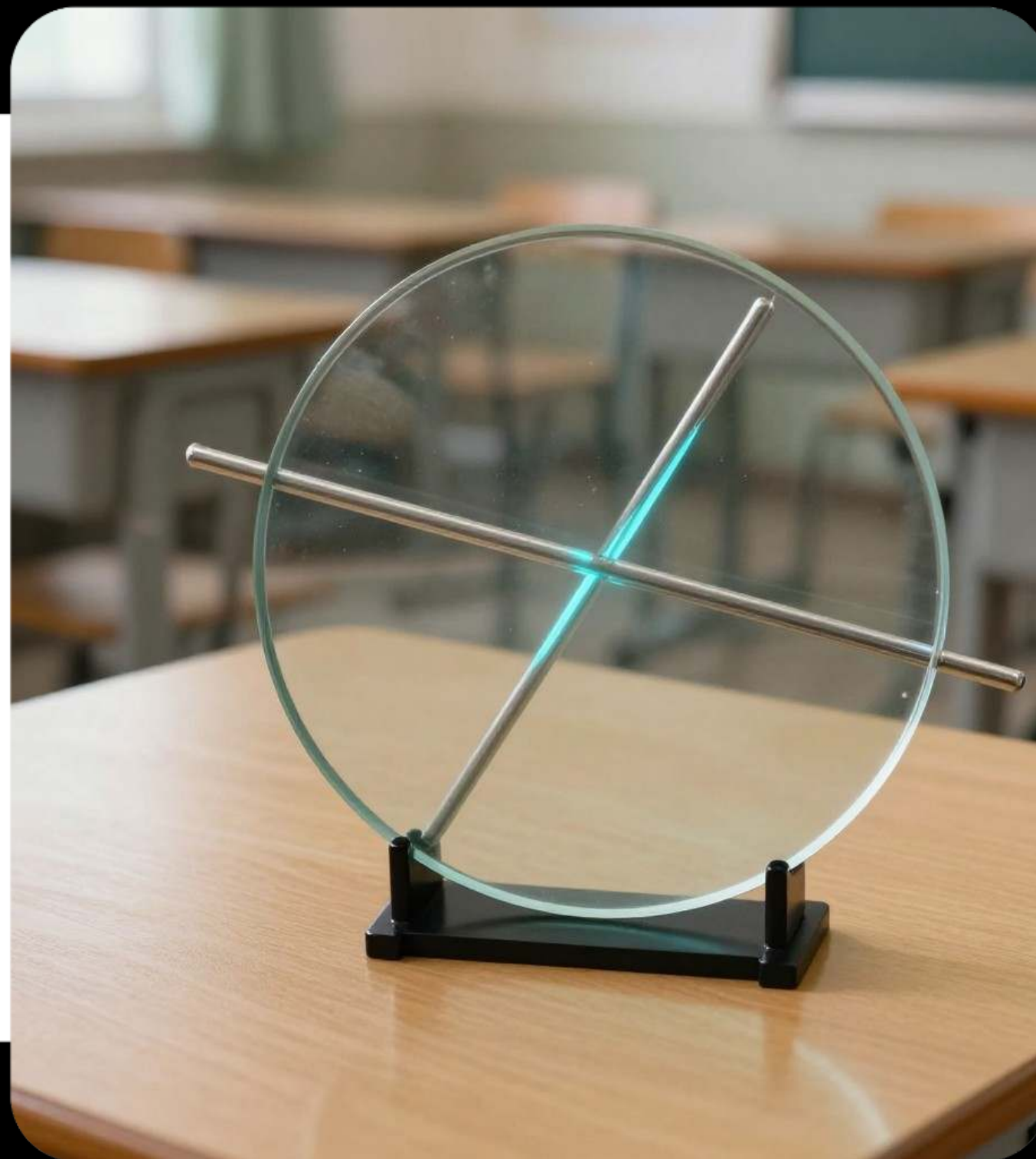
Внешнее расположение встречается, когда ремень или направляющая проходит рядом с окружностью, не касаясь её. Тогда общих точек нет — прямая полностью находится «снаружи» круга.



Секущая и хорда

1

Если прямая пересекает окружность в двух точках, то часть этой прямой, которая лежит внутри круга, образует хорду. Сама секущая — это вся прямая, проходящая через окружность целиком.

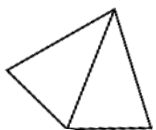


2

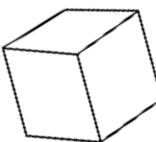
Хорда отличается тем, что это именно отрезок между двумя точками пересечения. Его концы лежат на окружности, а сам отрезок всегда располагается внутри окружности.

Словарь основных понятий

Понятие	Определение
Радиус	Отрезок от O до точки на окружности
Диаметр	Хорда через центр O
Касательная	Прямая с одной общей точкой
Секущая	Прямая с двумя общими точками
Хорда	Отрезок между точками на окружности
Расстояние до прямой	Длина перпендикуляра от O к прямой

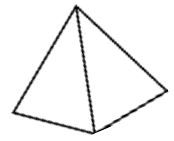


Термины помогут читать условие задачи и правильно выполнять сравнение, а затем находить число общих точек.

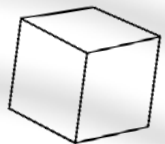


Ключевой опорной величиной для положения прямой служит расстояние от центра до прямой; оно вместе с радиусом определяет касание, пересечение или отсутствие общих точек.

Как меняется число общих точек при движении прямой



При удалении прямой от центра значение d растёт, и прямая становится внешней, поэтому пересечений не остаётся. Вблизи центра меняется режим пересечения.



Переход происходит в момент $d = r$: именно здесь число общих точек падает от двух к одному, а затем к нулю при дальнейшем увеличении расстояния.

Типичные ошибки в решениях

1

Частая ошибка — сравнивать с радиусом не расстояние от центра до прямой, а длину какого-то отрезка с чертежа. Важно, чтобы рассматриваемая величина была именно перпендикуляром к прямой.

2

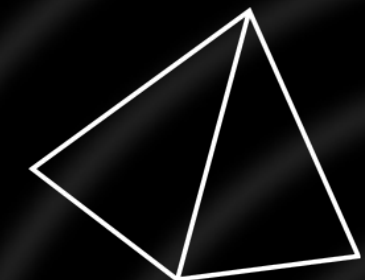
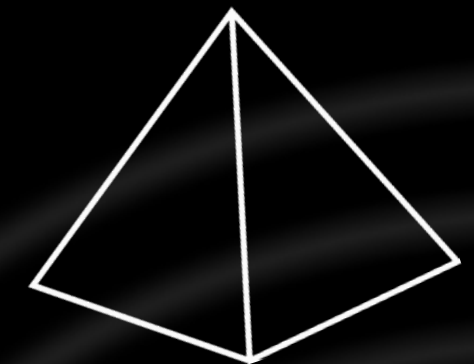
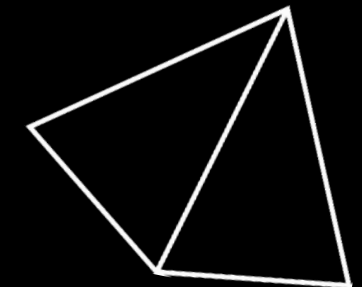
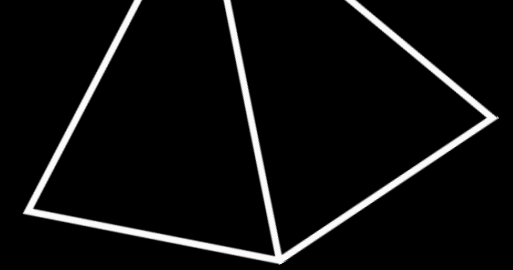
Ещё одна ошибка — путать секущую и хорду: секущая — это прямая целиком, а хорда — лишь отрезок между двумя точками пересечения. Поэтому хорда не может «выходить» за окружность.

3

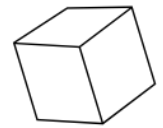
Нередко неверно определяют центр окружности: вместо O берут другую отмеченную точку или путают обозначения. Также встречаются ошибки, когда при вычислении расстояния забывают модуль в формуле.

4

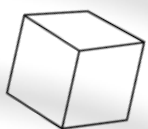
Как правило, проверка через сравнение d и r быстро выявляет неверный вывод. Если полученный ответ не соответствует ожидаемому числу общих точек на рисунке, значит допущена ошибка.



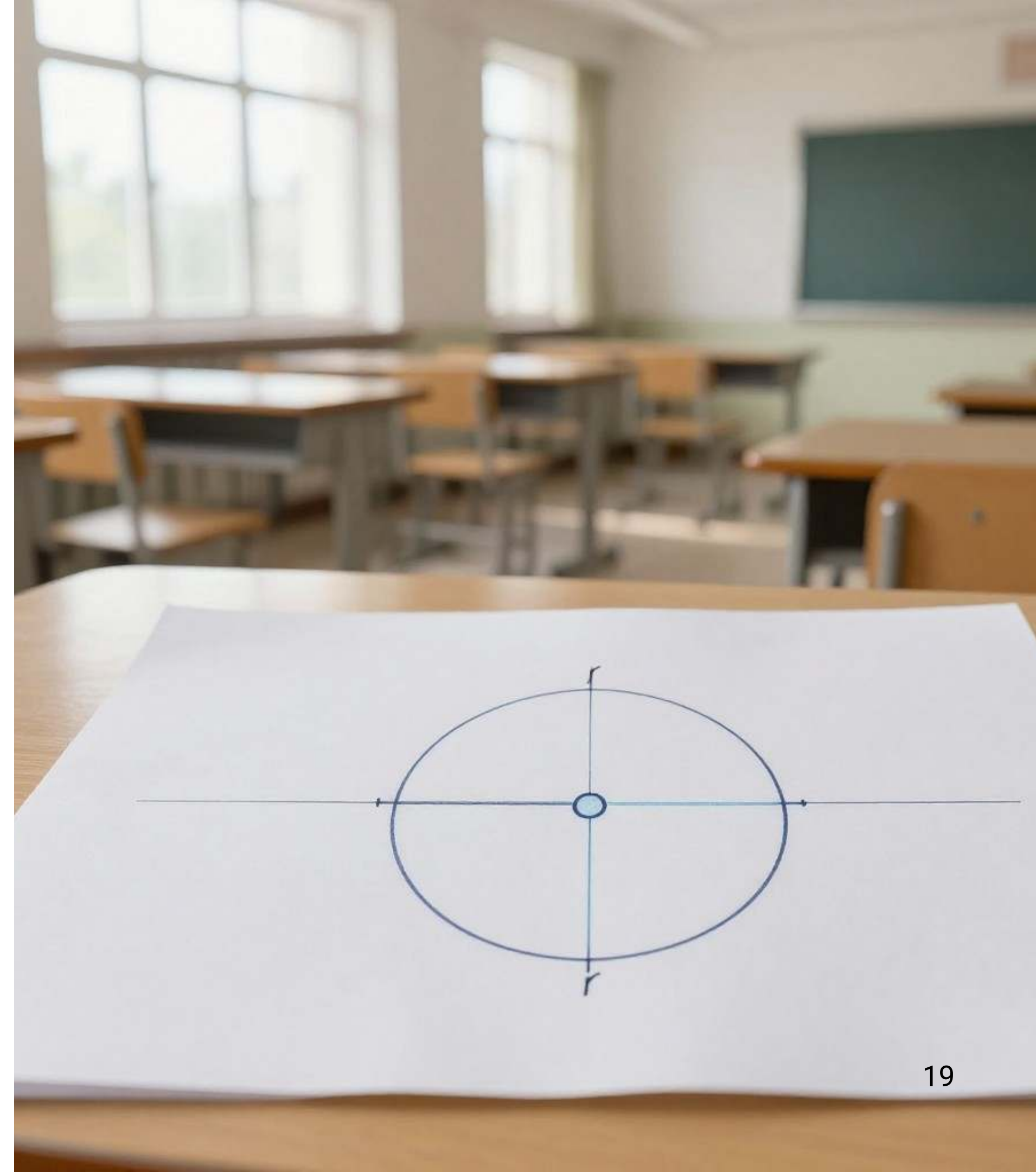
Проверка ответа на чертеже



Правильный вывод согласуется с изображением: при касательной видна ровно одна общая точка у прямой и окружности. При секущей общих точек две, а в внешнем положении их нет.



На чертеже должны быть отмечены центр O , радиус r и перпендикулярное расстояние d от центра до прямой. Если вычисления дают один и тот же вывод, что и рисунок, решение можно считать верным.



Главный вывод темы

Взаимное расположение прямой и окружности определяется сравнением расстояния от центра до прямой с радиусом: $d > r$ — общих точек нет, $d = r$ — касание, $d < r$ — две точки пересечения.