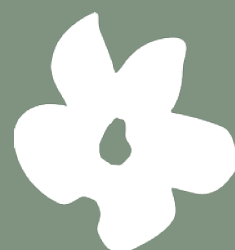
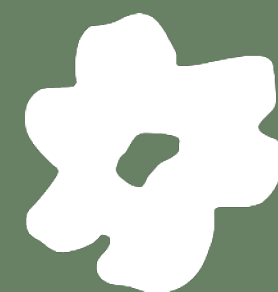


Канонический вид целых рациональных выражений

Алгебра, комбинаторика и разности



Что изучаем и зачем

Рассмотрим выражения, которые при целых аргументах дают целые значения. Наша цель — понять, как распознать это свойство, записать выражение в удобном виде и увидеть, почему разложение получается единственным.



Зачем нужен правильный вид

1. Практическая причина

В задачах на сочетания, суммы и рекуррентные формулы важно заранее знать, что ответ будет целым. Тогда запись должна подчеркивать целостность, а не скрывать ее за дробями.

2. Скрытая целостность

Выражение может выглядеть дробным, но при всех целых значениях оно все равно дает целый результат. Именно поэтому нужна форма, в которой это свойство видно сразу и без вычислений.

3. Показательный пример

Например, $(x^2+x)/2$ целое для любого целого x , хотя деление на 2 сначала кажется препятствием. Правильная запись снимает это впечатление и объясняет структуру выражения.

Термины и определения

Рациональное выражение

Рациональное выражение в этой теме — это отношение многочленов с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Оно может содержать дробные коэффициенты, но не обязательно теряет целочисленную природу значений.

Полином и коэффициенты

Полином не делится на переменную, однако его коэффициенты могут быть дробными. Поэтому важно различать форму записи и поведение функции на целых аргументах.

Целозначность

Целозначность означает, что $f(n)$ принадлежит $\mathbb{Z}$ для каждого целого n , где функция определена. Иными словами, каждый целый вход дает целый результат.

Три быстрых проверки

Сравним несколько выражений и их поведение на целых значениях.

Целозначность зависит не от наличия дроби, а от того, компенсируется ли она структурой выражения.

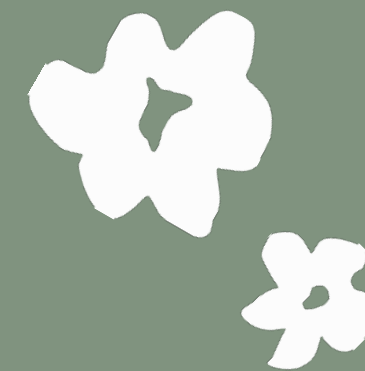
Выражение	Итог
$(x^2+x)/2$	всегда целое
$x/2$	не всегда
$(x^2+1)/2$	не всегда

Проверка подстановкой целых значений и элементарным анализом делимости





Базис: биномиальные многочлены



Первые элементы

Биномиальный многочлен $C(x, 0)$ равен 1, а $C(x, 1)$ равен x . Эти два случая задают начало удобного базиса, который отражает простейшие целозначные функции.

Следующие члены

Для $k=2$ и $k=3$ получаем $x(x-1)/2$ и $x(x-1)(x-2)/6$. Такие формы уже содержат деление, но сохраняют целые значения на целых аргументах.

Общая формула

Вообще $C(x, k) = x(x-1)\dots(x-k+1)/k!$ — это многочлен степени k с рациональными коэффициентами. Он становится строительным блоком для разложения целозначных выражений.



Почему $C(x, k)$ дает целые значения



1. Случай сочетаний

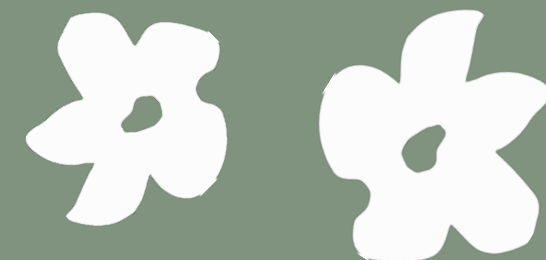
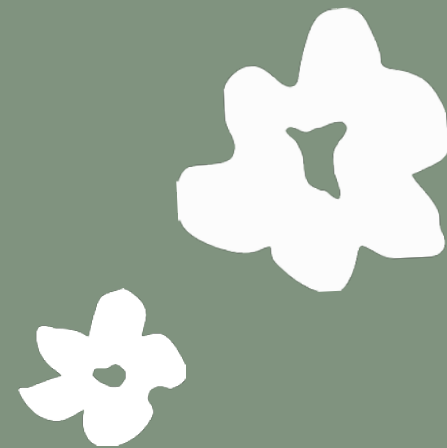
Если $x \geq k$, то $C(x, k)$ совпадает с обычным числом сочетаний: это количество способов выбрать k объектов из x . Значит, при неотрицательных значениях целостность очевидна.

2. Продолжение по многочлену

Для отрицательных и малых целых x значение сохраняет целость уже как свойство самого многочлена. Формула не меняется, а значит сохраняется и целочисленный результат.

3. Почему это удобно

Именно эта устойчивость делает $C(x, k)$ удобным базисом: он работает одинаково для всех целых аргументов и не требует отдельного разбора каждого случая.



Формулировка канонического вида

1. Сама теорема

Любой целозначный рациональный многочлен можно разложить по биномиальным многочленам. В этом разложении все коэффициенты оказываются целыми числами, а не произвольными рациональными дробями.

2. Форма записи

Запись имеет вид $f(x) = a_0C(x, 0) + a_1C(x, 1) + \dots + a_nC(x, n)$. Она показывает не только значение функции, но и ее внутреннюю дискретную структуру.

3. Каноничность

Такое представление называют каноническим, потому что оно существует для каждого целозначного многочлена и определяется единственным набором целых коэффициентов a_k .

Почему разложение единственно

Ступенчатый анализ

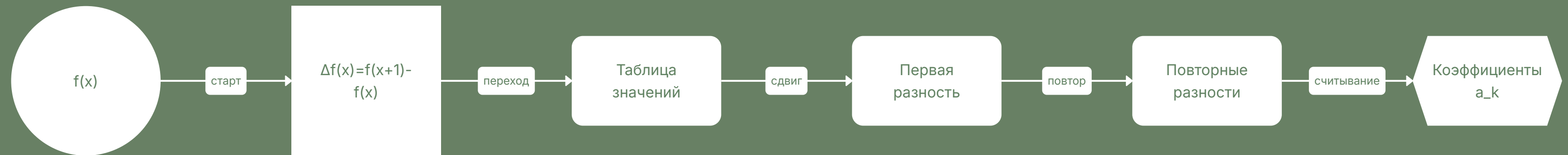
У каждого $C(x, k)$ степень ровно k , поэтому при сравнении разложения сначала выделяется старший член. Если сумма дает ноль, то старшие коэффициенты обязаны исчезать по очереди.

Разделение по степеням

Ведущий коэффициент $C(x, k)$ равен $1/k!$, поэтому разные члены базиса не смешиваются при последовательном рассмотрении степеней. Это исключает неоднозначность разложения.

Как разности раскрывают канонический вид

Переход от значений функции к таблице разностей и коэффициентам базиса



Пошаговое извлечение коэффициентов

Алгоритм строится от значений функции к её канонической записи: сначала выписывают таблицу значений, затем последовательно считают конечные разности и считывают первые элементы диагоналей.

Коэффициенты канонического вида удобно получать прямо из таблицы разностей: каждый следующий уровень раскрывает новый a_k .

Шаг	Что делают
Значения	$f(0), f(1), f(2)$
Разности	$\Delta f, \Delta^2 f, \dots$
Коэффициенты	Первые элементы

Таблица для простого примера

Для функции $(x^2+x)/2$ таблица значений и разностей сразу показывает постоянную вторую разность. Это означает, что выражение раскладывается только по базисам до степени 2.

Постоянная вторая разность равна 1, значит $f(x)=C(x, 2)+C(x, 1)$; целозначность становится очевидной.

x	f(x)	Δf	$\Delta^2 f$
0	0		
1	1	1	
2	3	2	1
3	6	3	1

Вычисление для $f(x)=(x^2+x)/2$ по значениям при $x=0,1,2,3$

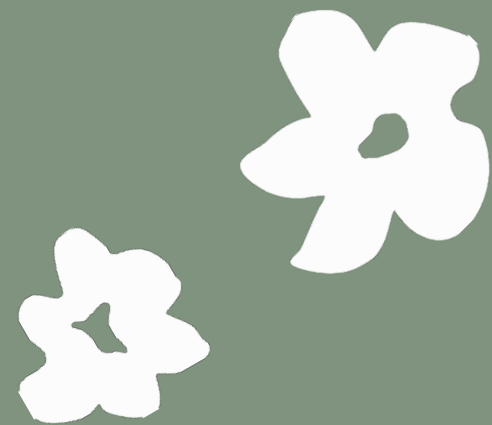


Разложение куба по базису

Для куба таблица разностей даёт полный набор коэффициентов канонического вида. Даже обычный многочлен x^3 естественно выражается через биномиальные многочлены с целыми весами.

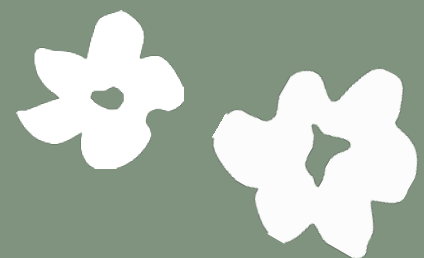
Получается разложение $x^3 = C(x, 1) + 3 \cdot C(x, 2) + C(x, 3)$, поэтому степень 3 тоже имеет целочисленную каноническую запись.

Базис	Коэффициент
$C(x, 0)$	0
$C(x, 1)$	1
$C(x, 2)$	3
$C(x, 3)$	1



2 слагаемых уже имеют стандартный вид:
одно совпадает с $C(x, 3)$, второе —
с удвоенным $C(x, 1)$. Поэтому целозначность
скрыта только в исходной записи,
а не в самой функции.

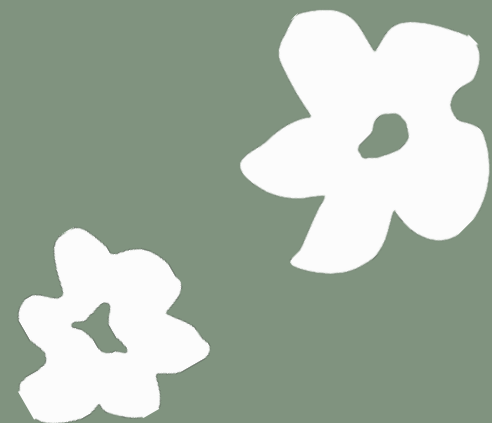
Преобразование $h(x)=x(x-1)(x-2)/6+2x$ к каноническому виду



2

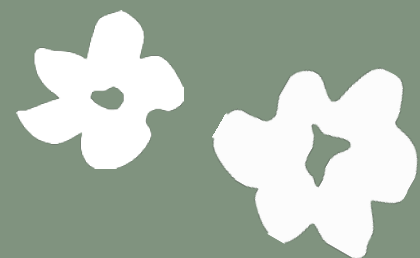
**слагаемых достаточно,
чтобы сразу увидеть
целочисленный характер
выражения после перехода
к базису $C(x, k)$.**





4 проверки достаточно, если запись уже приведена к сумме биномиальных многочленов: нужно лишь убедиться, что все коэффициенты при $C(x, k)$ — целые.

Следствие теоремы о каноническом виде целозначных многочленов



4

**простых шага отделяют
запись от ответа, когда
канонический вид уже
найден.**



Почему именно биномиальные коэффициенты



От счёта к формуле

Биномиальные коэффициенты связывают алгебру с подсчётом. Когда мы пишем $C(n, k)$, мы считаем способы выбрать объекты, а не просто манипулируем символами. Поэтому целые коэффициенты в разложении выглядят не случайно, а как суммы реальных счётных величин.



Наглядные кирпичики

Именно поэтому канонический вид так нагляден в учебных задачах. Слагаемые $C(x, k)$ ведут себя как стандартные «кирпичики», из которых складывается любое целозначное выражение. Коэффициенты при них показывают, сколько раз используется каждый уровень подсчёта.

Три способа увидеть делимость



1. Снятие лишних вычислений

Если числитель дроби удаётся переписать через $C(x, k)$ с целыми коэффициентами, делимость уже не нужно доказывать отдельно. Целое значение следует из самого базиса, а не из громоздких преобразований выражения.

2. Короткое доказательство

Такой подход особенно полезен в олимпиадных и школьных задачах. Вместо длинного преобразования достаточно показать, что каждое слагаемое целое на целых x , а значит и вся сумма цела.

3. Скрытая целочисленность

Если исходная формула выглядит дробной, это ещё не означает, что результат нецелый. Канонический вид раскрывает скрытую структуру и превращает доказательство делимости в проверку коэффициентов.

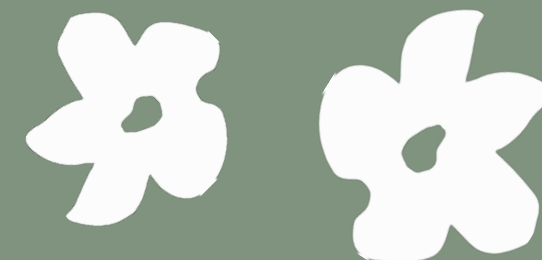
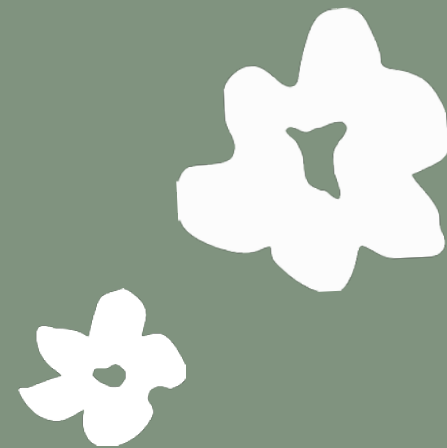
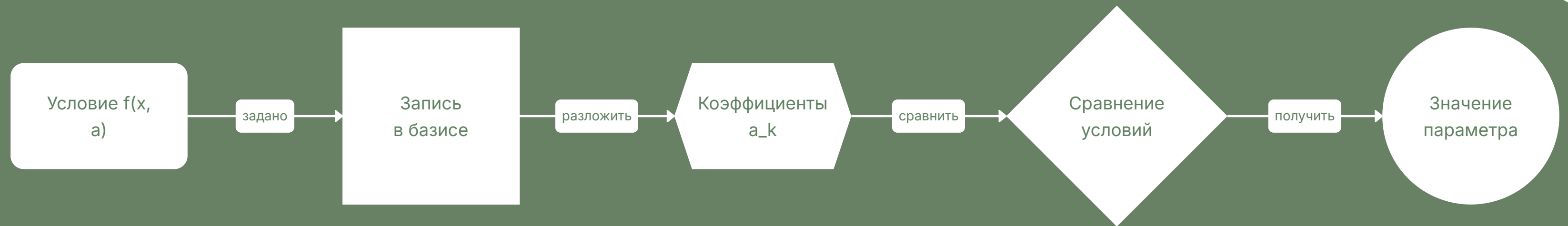


Схема поиска параметра

Переход от целозначности к системе условий на коэффициенты



Три упражнения для тренировки

1. 1. Разложить x^2

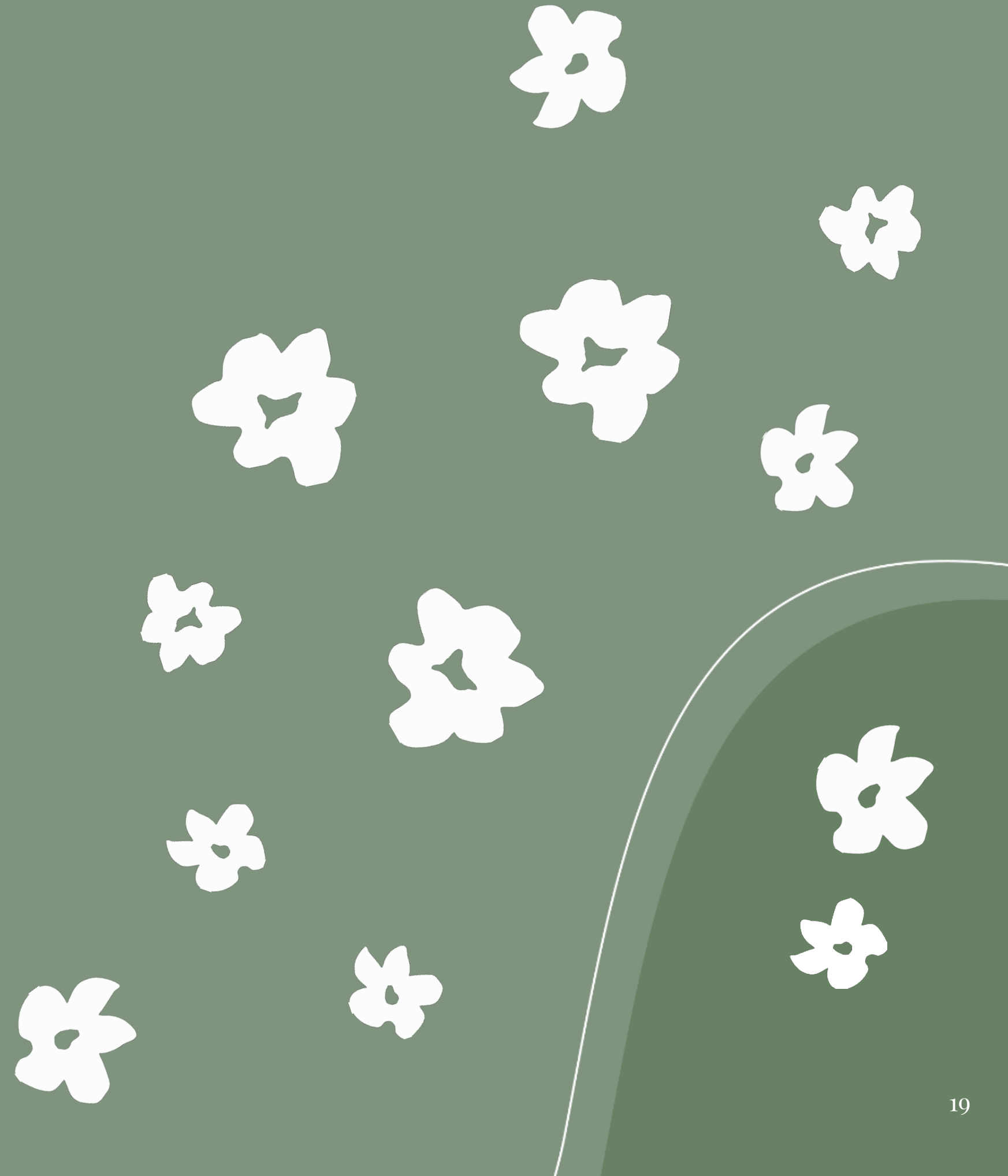
Сначала найдите значения x^2 при $x=0,1,2,3$ и постройте разности. Затем сравните полученную таблицу с базисами $C(x, 1)$ и $C(x, 2)$: именно так раскрывается канонический вид.

2. 2. Проверить дробь

Проверьте значения $(x^3-x)/3$ на нескольких целых x и посмотрите на делимость числителя. Если запись нецелозначна, это станет заметно уже на первых подстановках.

3. 3. Найти x^4

Для x^4 удобно начать с таблицы значений $0,1,16,81,\dots$ и затем перейти к конечным разностям. После этого коэффициенты в базисе $C(x, k)$ читаются почти механически.



Главная идея канонического вида

Канонический вид показывает, что целозначные рациональные выражения можно читать как сумму стандартных биномиальных блоков. Это упрощает проверку целостности, поиск коэффициентов и доказательства делимости, делая структуру выражения прозрачной.