

Теорема Ньютона — Лейбница: главная связь производной и интеграла

Как производная и интеграл
соединяют изменение и накопление.



Место теоремы в 11 классе

После производной, первообразной и определённого интеграла эта теорема объединяет уже знакомые идеи в одну рабочую формулу и показывает, как находить площади и другие накопленные величины точно и быстро при решении школьных и экзаменационных задач по математике профиля 11 класса.



Основные понятия: функция, производная, первообразная, определённый интеграл

Производная

Производная показывает скорость изменения функции в данной точке и отвечает на вопрос, насколько быстро меняется величина при малом изменении аргумента.

Первообразная

Первообразная функции $f(x)$ — это функция $F(x)$, у которой производная равна $f(x)$; она позволяет «обратным ходом» восстановить исходную зависимость.

Определённый интеграл

Определённый интеграл на отрезке $[a, b]$ описывает суммарный результат накопления величины и даёт точное значение этого накопления для заданных границ.

Геометрический смысл

Если функция неотрицательна, интеграл можно понимать как площадь области под графиком и над осью Ox , что делает абстрактную формулу наглядной.

Геометрический смысл: площадь под графиком

Область на отрезке

На рисунке обычно показывают график $y=f(x)$, границы $[a, b]$ и заштрихованную область, площадь которой соответствует определённому интегралу при неотрицательной функции.

От суммы к формуле

Вместо сложения множества узких прямоугольников теорема позволяет перейти к вычислению разности значений первообразной, получая точный результат без приближений.

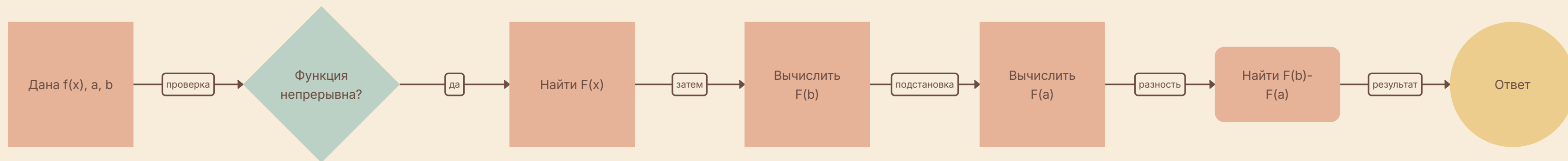
Почему это важно

Такой переход объединяет геометрическую интуицию и аналитический расчёт: мы видим фигуру, но считаем её не по частям, а через функцию $F(x)$.



Как применяется теорема при вычислении интеграла

Последовательность шагов от условия задачи до точного значения интеграла



Формулировка теоремы Ньютона — Лейбница

01

Основная формула

Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, а F является её первообразной, то определённый интеграл равен $F(b) - F(a)$.

02

Что она даёт

Формула заменяет вычисление интеграла поиском значений первообразной на концах отрезка, что делает решение задач короче и надёжнее.

03

Функция накопления

Если задать $S(x) = \int_a^x f(t) dt$, то $S'(x) = f(x)$: производная функции накопления возвращает исходную функцию, показывая обратимость двух операций.

04

Смысл связи

Теорема утверждает, что интегрирование и дифференцирование не просто связаны, а в определённом смысле взаимно дополняют друг друга.

Условия теоремы и её результат

Таблица показывает, какие условия нужны для применения формулы и что именно она позволяет получить.

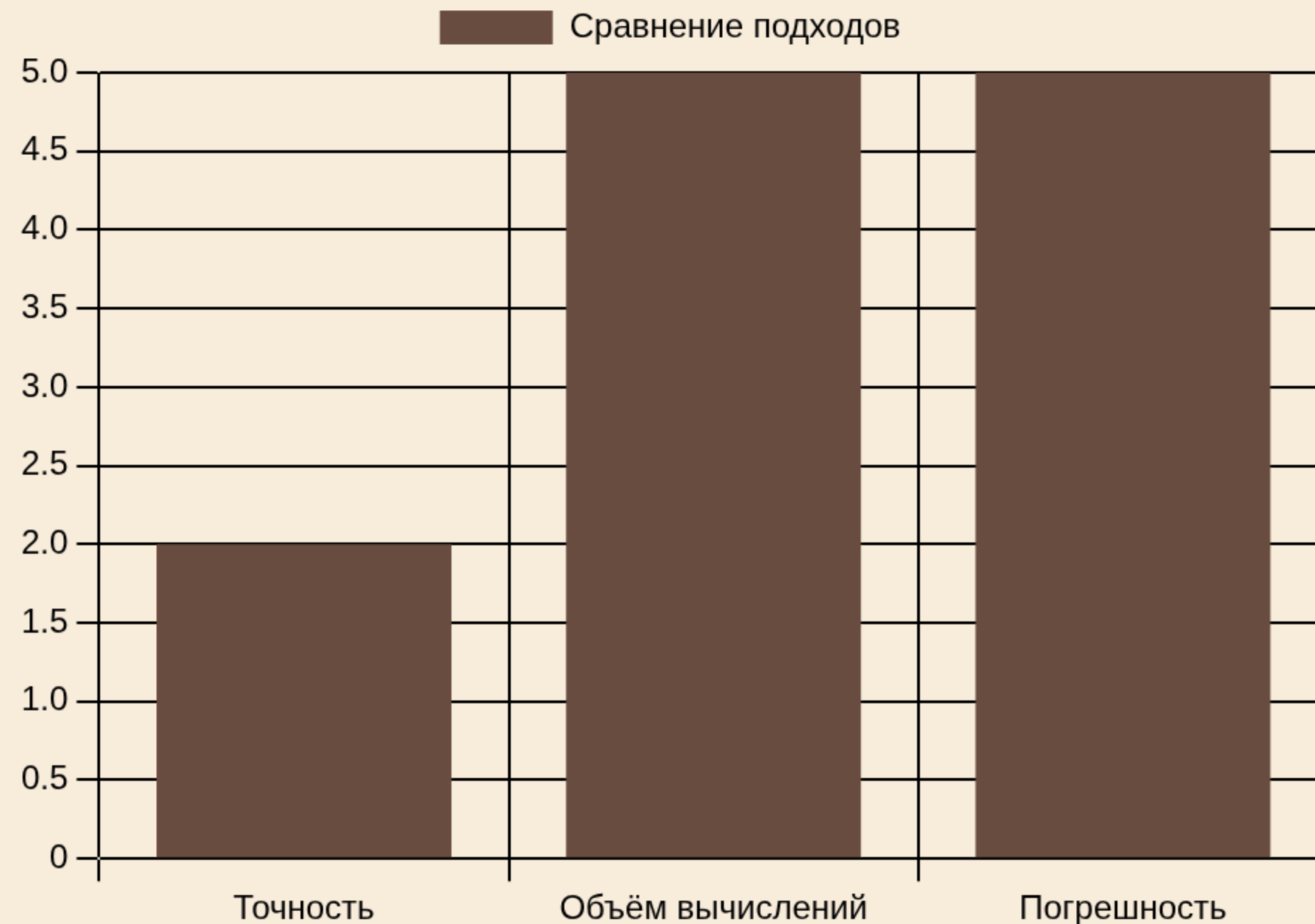
Если функция непрерывна на отрезке, интеграл вычисляется через первообразную, а геометрический смысл помогает понять результат как накопление площади.

Условие	Смысл	Итог
Непрерывность	Без разрывов	Формула применима
Первообразная	$f(x)=F'(x)$	Можно заменить интеграл
$F(b)-F(a)$	Значения на концах	Точный ответ
Площадь	Геометрическая идея	Накопление величины

Почему формула удобнее суммирования площадей

На диаграмме видно, что аналитический способ не требует дробить область на множество прямоугольников и вручную накапливать их площади.

Первообразная даёт точный результат быстрее и без накопления ошибок, поэтому теорема значительно эффективнее приближённого суммирования.



8/3

— именно такое значение принимает этот определённый интеграл.

Вычисление по формуле Ньютона — Лейбница для $\int_0^2 x^2 dx$

Для многочлена x^2 первообразная находится сразу, а подстановка границ даёт точный ответ без дополнительных преобразований.

Пример 2: интеграл от $\sin x$ на отрезке $[0; \pi]$

Первообразная

Для функции $\sin x$ первообразной служит $-\cos x$, поэтому вычисление интеграла сводится к подстановке верхнего и нижнего пределов.

Подстановка границ

При $x=\pi$ и $x=0$ получаем значения косинуса на концах отрезка, после чего остаётся аккуратно выполнить вычитание по формуле.



Точный результат

Несмотря на волнообразный график, определённый интеграл вычисляется точно и равен площади под положительной дугой синусоиды на промежутке.

Почему пример важен

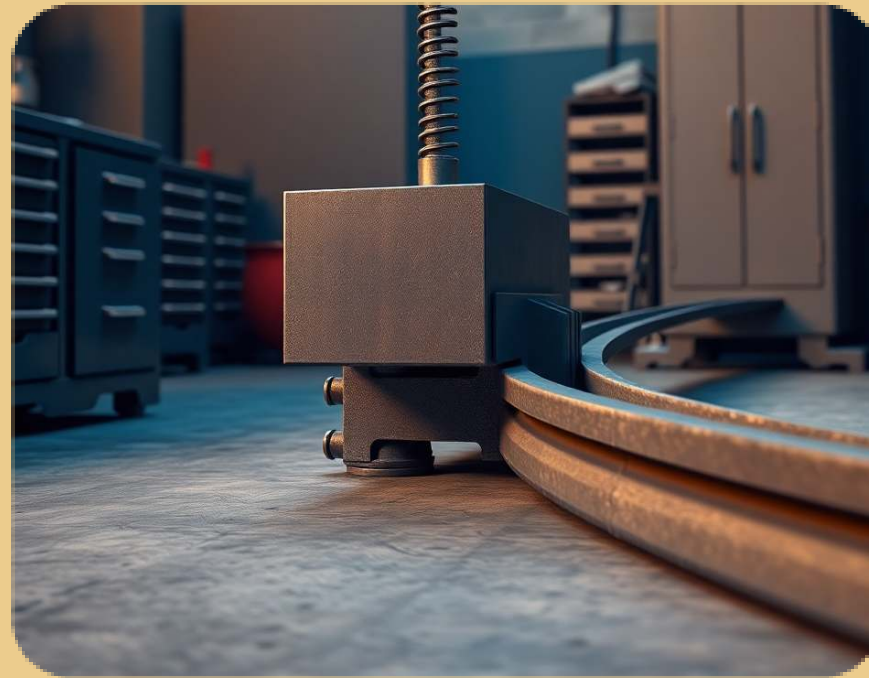
Этот пример хорошо запоминается, потому что показывает работу теоремы с тригонометрической функцией и закрепляет общий алгоритм решения.

Истории из физики: как интеграл считает движение и работу



Путь по скорости

Если на графике отложена скорость тела по времени, то площадь под кривой показывает пройденный путь. Теорема Ньютона — Лейбница заменяет громоздкое суммирование маленьких участков времени точным вычислением через первообразную.



Работа силы

Когда известна сила, зависящая от перемещения, интеграл на отрезке пути даёт работу. На иллюстрации это можно показать как заштрихованную область под графиком, где каждый участок вносит свой вклад в общий результат.



Единая идея накопления

И в механике, и в других разделах физики интеграл описывает накопленный эффект: путь, работу, заряд или массу. Теорема Ньютона — Лейбница позволяет получить итог без прямого подсчёта бесконечно многих малых приращений.

Почему непрерывность нельзя пропускать

1

Без разрывов

Непрерывность на отрезке $[a, b]$ означает, что график функции не имеет скачков и «провалов». Для школьной формулы это важно: только тогда разность $F(b) - F(a)$ действительно выражает значение интеграла.

2

Корректная первообразная

Если функция непрерывна, у неё на отрезке можно использовать первообразную без оговорок. Это делает вычисление устойчивым: одна найденная функция $F(x)$ позволяет точно определить накопленный результат на всём промежутке.

3

Что делать с разрывами

При разрывной функции стандартную формулу не применяют вслепую. Отрезок сначала разбивают на части, где функция ведёт себя непрерывно, и уже для каждого участка считают интеграл отдельно.

4

Граница применения

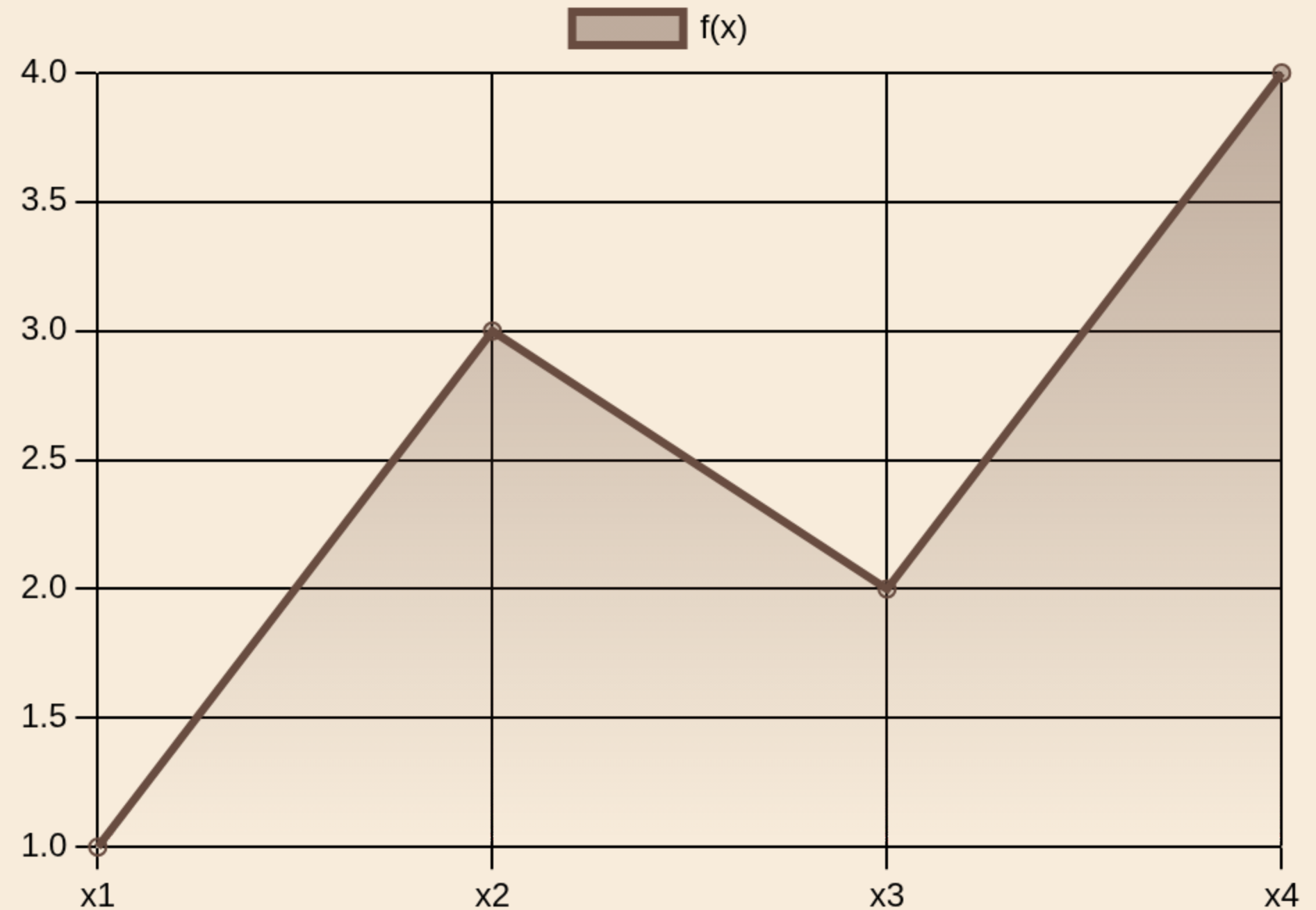
Это условие помогает не только получить верный ответ, но и понять смысл теоремы. Она работает там, где накопление происходит плавно, а не через резкие изменения, которые требуют отдельного анализа.



Как производная и интеграл переходят друг в друга

График показывает исходную функцию как непрерывное изменение величины. Из неё можно получить первообразную, а затем снова вернуться к исходному закону через производную.

Если функция известна, интегрирование собирает её накопленный эффект, а дифференцирование восстанавливает локальное поведение. Эти операции взаимно дополняют друг друга.



Что чаще всего мешает получить верный ответ

Ошибка в первообразной

Часто неверно вспоминают таблицу формул: теряют коэффициент, знак минус или степень. Из-за этого даже правильно записанный интеграл приводит к неправильному значению после подстановки пределов.

Неправильный порядок вычитания

В формуле Ньютона — Лейбница важно писать именно $F(b) - F(a)$. Если перепутать порядок, ответ изменит знак, и итог окажется неверным даже при безошибочно найденной первообразной.

Игнорирование непрерывности

Некоторые решают задачу, не проверив, можно ли вообще применять стандартную формулу на всём отрезке. Для функции с разрывом это приводит к ошибке в самой постановке вычисления.

Смешение площади и интеграла

Геометрическая площадь не бывает отрицательной, а определённый интеграл — бывает. Если график расположен ниже оси Ox , интеграл учитывает знак, поэтому нужно различать площадь и алгебраическую сумму.

Алгоритм вычисления определённого интеграла

Шаг	Действие	Результат
1	Записать интеграл	Пределы видны
2	Найти $F(x)$	Первообразная
3	Подставить b	$F(b)$
4	Подставить a	$F(a)$
5	Вычесть	$F(b)-F(a)$
6	Проверить ответ	Знак и смысл

Таблица показывает стандартную последовательность действий: от записи интеграла до проверки ответа. Она помогает не пропустить ни один шаг и применять формулу Ньютона — Лейбница без лишних вычислений.

Последовательность шагов сводит задачу к одному вычислению разности значений первообразной. Это делает метод быстрым, точным и удобным для школьных задач.

Как возникла главная формула анализа

XVII век

01

Ньютон и Лейбниц независимо развивали идеи, из которых позже вырос математический анализ. Их работы дали единый язык для описания движения, изменения и накопления величин.

Общая теория

02

До этого площади, касательные и скорости изучались как разрозненные задачи. Новый подход объединил их в одну систему, где производная и интеграл стали взаимосвязанными операциями.

Центральный результат

03

Теорема Ньютона — Лейбница стала ключевой именно потому, что связала геометрический смысл площади с алгебраическим вычислением через первообразную. Это сделало интеграл практическим инструментом.

04

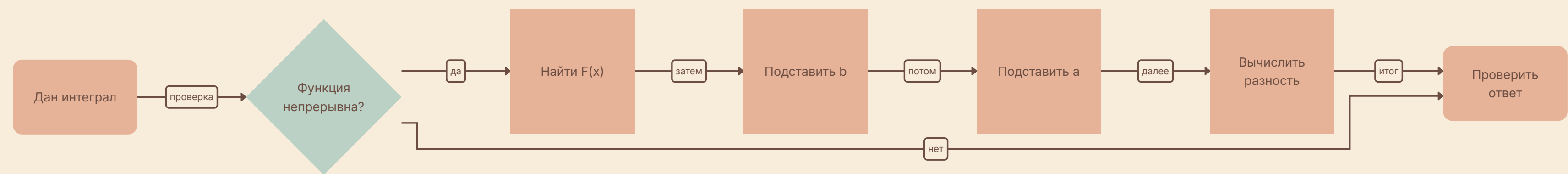
Влияние на науку

Благодаря этой связи интеграл вошёл в математику, физику и естественные науки. Он позволил точно описывать процессы, где важен не только момент изменения, но и его накопление во времени.



Пошаговая схема решения интеграла

Последовательность соответствует школьному алгоритму применения теоремы Ньютона — Лейбница



Где теорема помогает в школьной математике



Производная

Теорема показывает обратную связь с производной: интеграл накапливает изменения, а производная возвращает мгновенный темп изменения функции на каждом участке.



Первообразная

Именно первообразная превращает определённый интеграл в разность значений на концах отрезка. Без неё формула Ньютона — Лейбница не работает в полной мере.



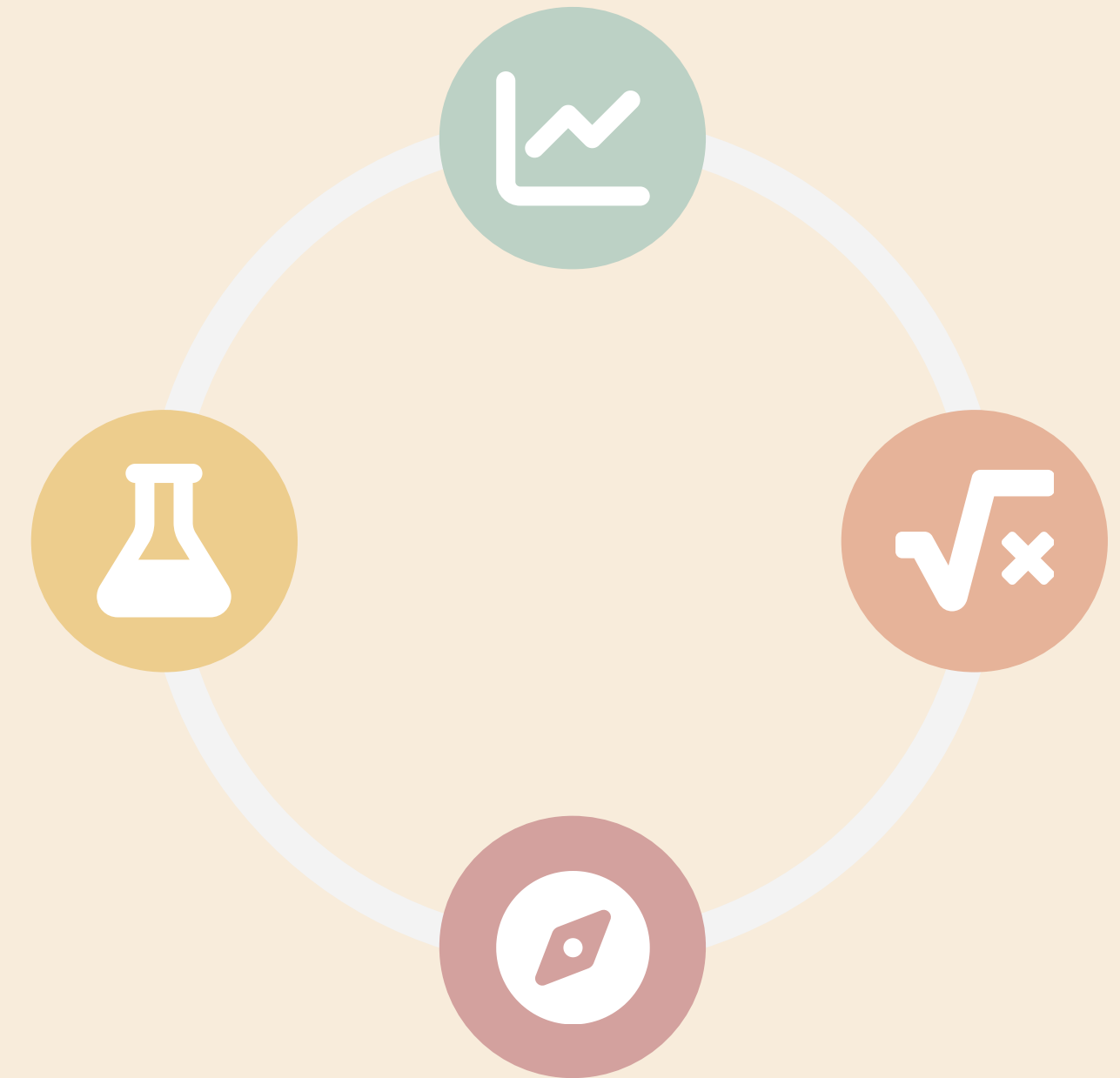
Геометрия

Через интеграл находят площади фигур и областей под графиками. Это связывает аналитическую запись с наглядным геометрическим смыслом и делает вычисления точными.



Модели процессов

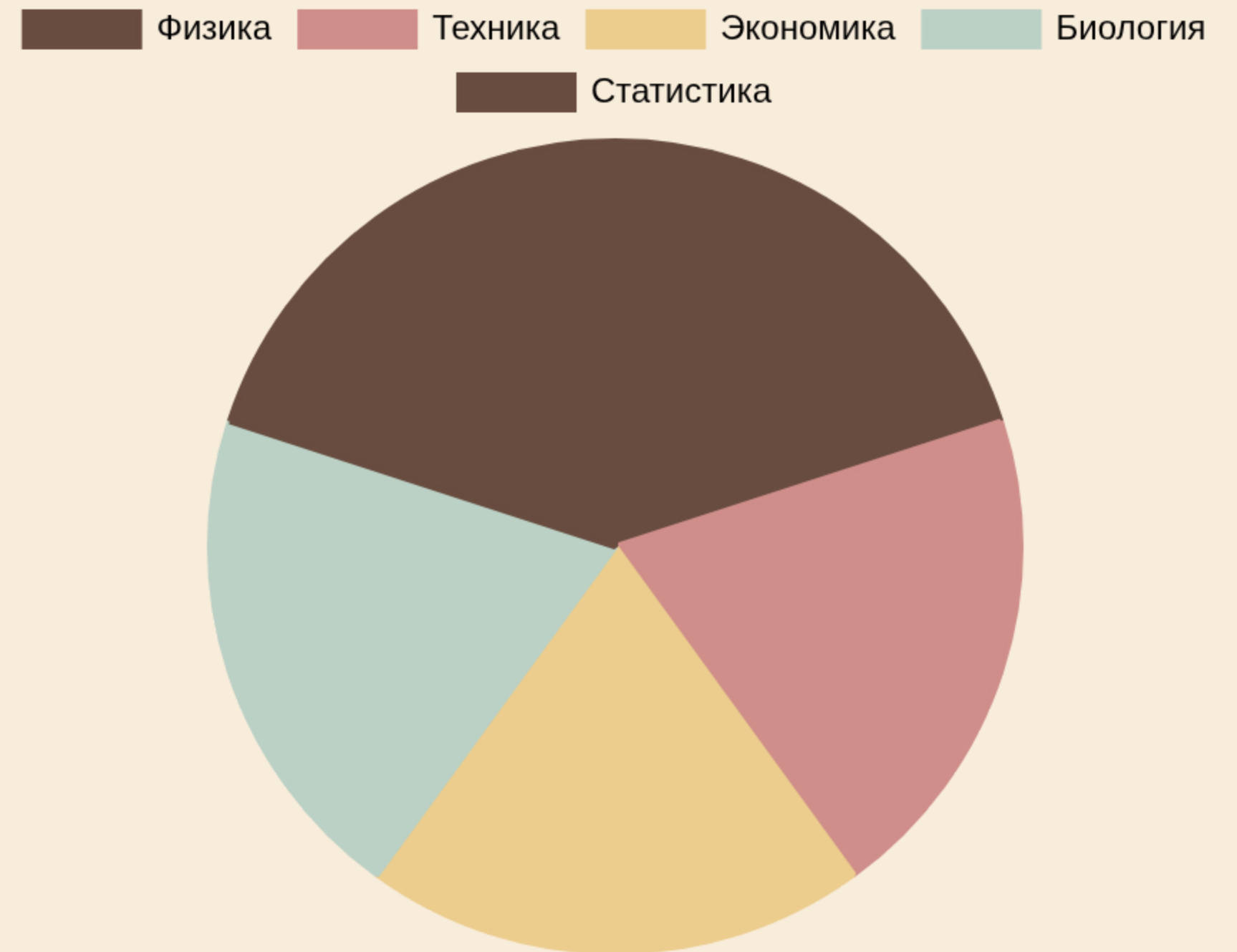
В задачах на движение, рост, накопление вещества и другие модели интеграл описывает итоговый результат процесса, а не только его отдельные мгновения.



Практические области применения теоремы

Равные доли подчёркивают, что теорема Ньютона — Лейбница востребована в разных науках одинаково как универсальный способ нахождения накопленного результата.

Интеграл полезен там, где нужно перейти от локального описания процесса к его общему итоговому эффекту. Поэтому формула работает и в науке, и в прикладных расчётах.



Формула, которая соединяет два взгляда на функцию

Теорема Ньютона — Лейбница показывает, что одна формула связывает локальное изменение и накопленный результат. Именно поэтому интеграл становится не просто темой курса, а универсальным инструментом решения задач.