

Уравнение $\cos x = a$: что определяет его решения

Когда у косинусного уравнения появляются решения?

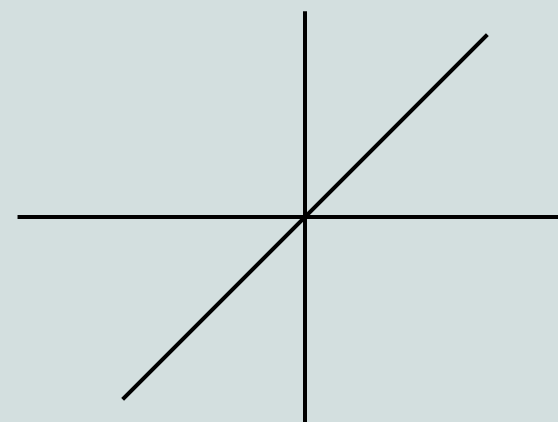


Зачем в 10 классе решают $\cos x = a$



Это уравнение соединяет область значений функции, периодичность и обратную тригонометрическую функцию. Оно формирует основу для более сложных задач, где нужно уверенно работать с тригонометрическими моделями и преобразованиями.

Период косинуса помогает понять, почему решения уравнения не ограничиваются одной точкой, а образуют бесконечные семейства.



2π

— это период, через который значения косинуса повторяются.

Область допустимых значений параметра a

Диаграмма показывает только ту часть оси параметра, где прямая $y = a$ может пересечь график косинуса.

Решения существуют лишь при a из отрезка $[-1; 1]$; вне его пересечений с $y = \cos x$ не бывает.

График $y = \cos x$ и прямая $y = a$

Точки пересечения

Каждое решение уравнения соответствует точке, где горизонтальная прямая $y = a$ пересекает косинусоиду. Поэтому геометрический взгляд сразу показывает, сколько корней ожидать.



Внутри отрезка

Если $-1 < a < 1$, прямая обычно проходит через график дважды на каждом периоде: один раз на убывающем участке и один раз на возрастающем.



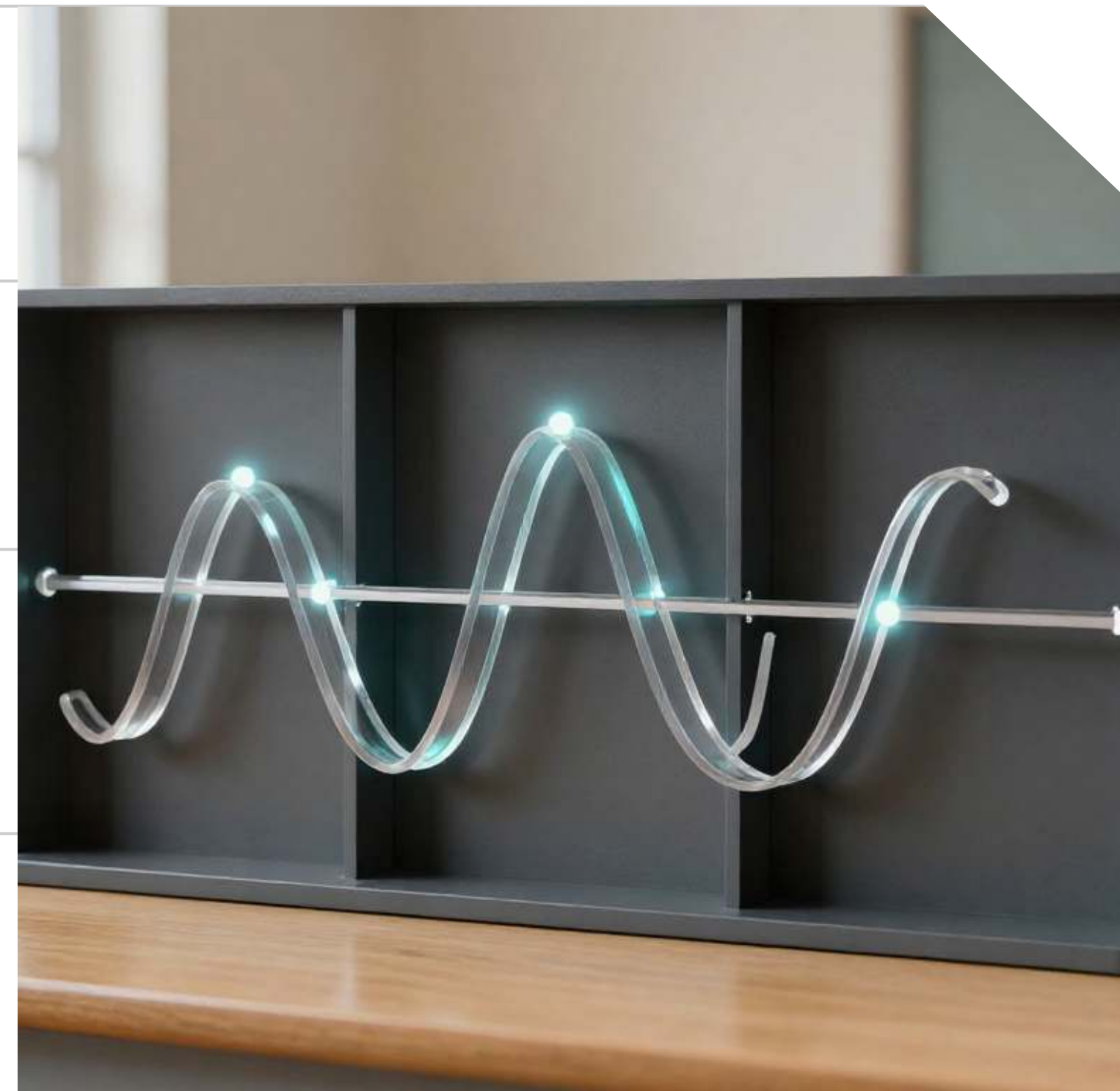
Граничные случаи

При $a = 1$ и $a = -1$ прямая касается графика в вершинах. В каждом периоде остаётся только одна точка пересечения, а значит, один корень.



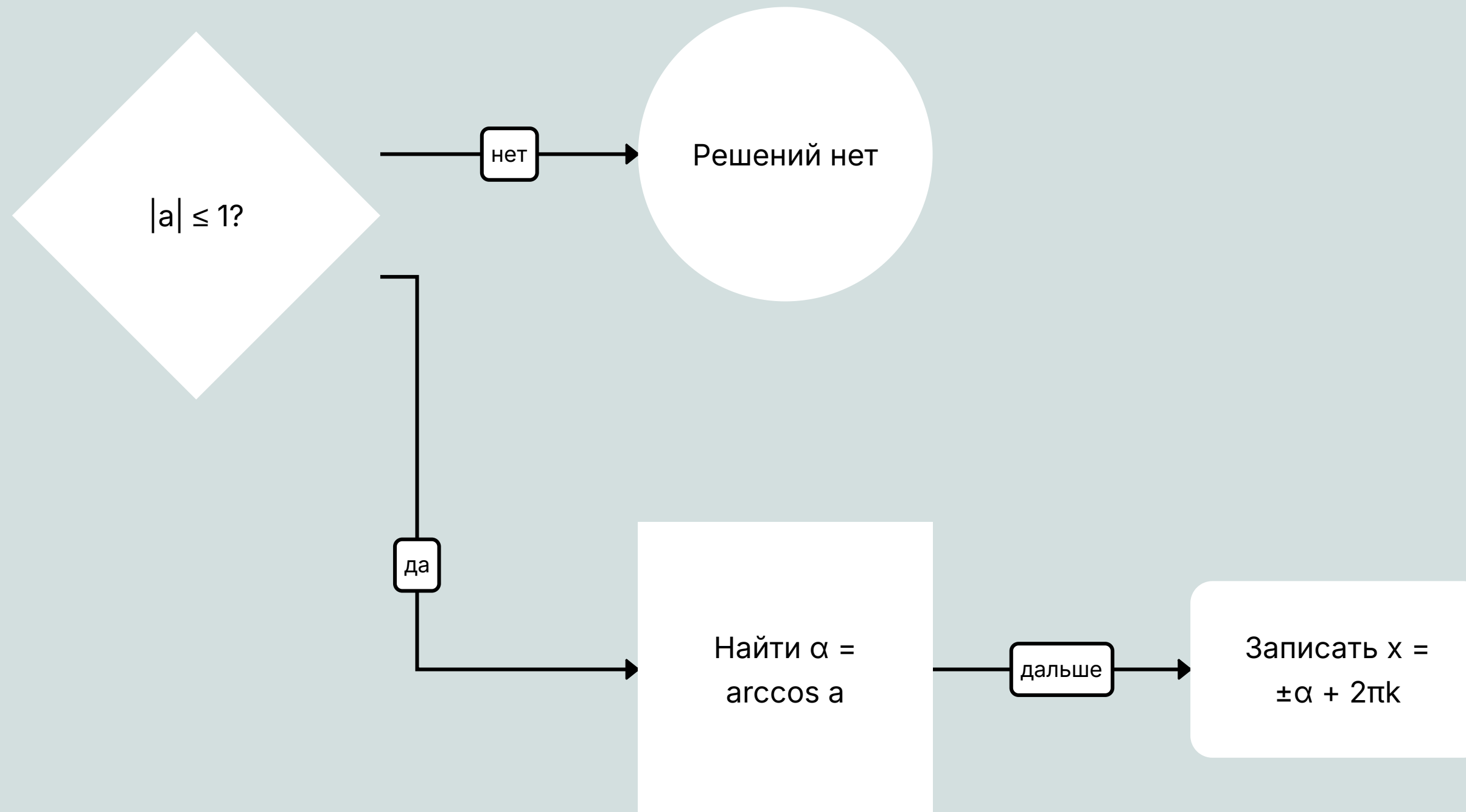
Вне диапазона

Если $|a| > 1$, горизонтальная прямая лежит выше максимума или ниже минимума косинуса. Пересечений нет, поэтому уравнение не имеет решений.

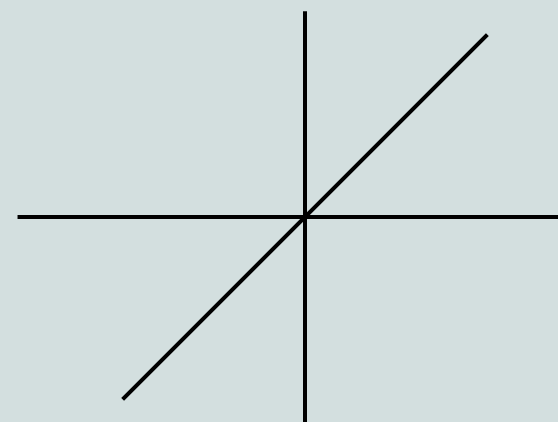


Алгоритм решения уравнения $\cos x = a$

Последовательность действий основана на области значений косинуса, определении $\arccos$ и периоде 2π .



Если параметр выходит за допустимые границы, уравнение сразу теряет смысл как поиск пересечения графика и прямой.



1

является пределом значений косинуса по модулю.

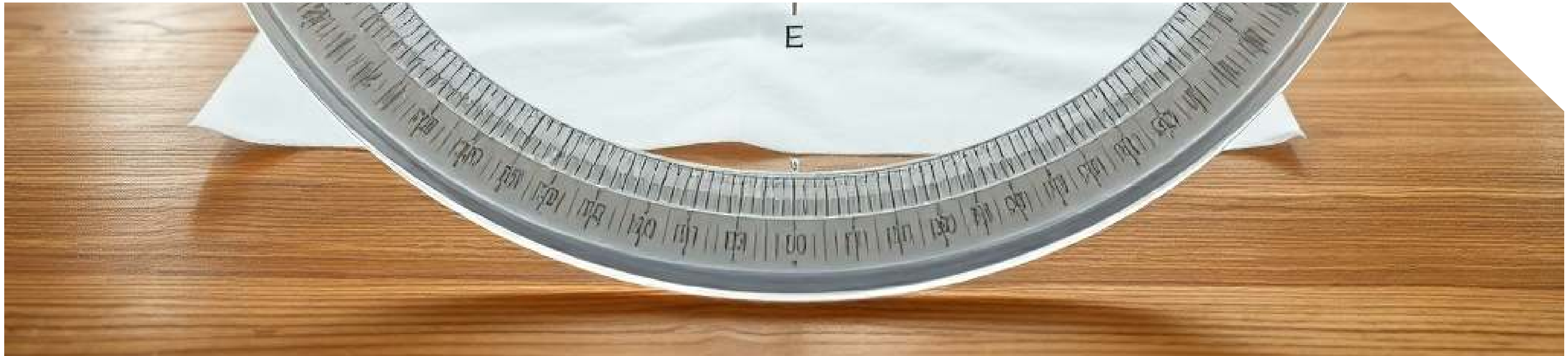
Основные случаи и число решений на отрезке $[0; 2\pi]$

Сводная таблица помогает быстро определить тип ответа по значению параметра a .

Число решений полностью определяется положением прямой $y = a$ относительно косинусоиды.

a	Корни	Ответ
1	1	$2\pi k$
-1	1	$\pi + 2\pi k$
$-1 < a < 1$	2	$\pm \arccos a + 2\pi k$
$ a > 1$	0	нет

Общий вид решений при $-1 < a < 1$



01

Ввести угол

Сначала находят $\alpha = \arccos a$. Это главное значение угла из промежутка от 0 до π , при котором косинус равен заданному числу.

02

Учесть симметрию

Косинус одинаков для углов α и $-\alpha$, поэтому решение распадается на два семейства: $x = \alpha + 2\pi k$ и $x = -\alpha + 2\pi k$.

03

Записать полный ответ

Эквивалентно можно писать $x = \alpha + 2\pi k$ и $x = 2\pi - \alpha + 2\pi k$. Так явно видно, что все корни повторяются с периодом 2π .

Особые случаи $a = 1$ и $a = -1$



Когда $a = 1$

Косинус достигает значения 1 в точке 0 и далее повторяет его через каждый полный оборот. Поэтому решения записываются как $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Когда $a = -1$

Значение -1 достигается в точке π и повторяется с тем же периодом. Отсюда общий вид корней: $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

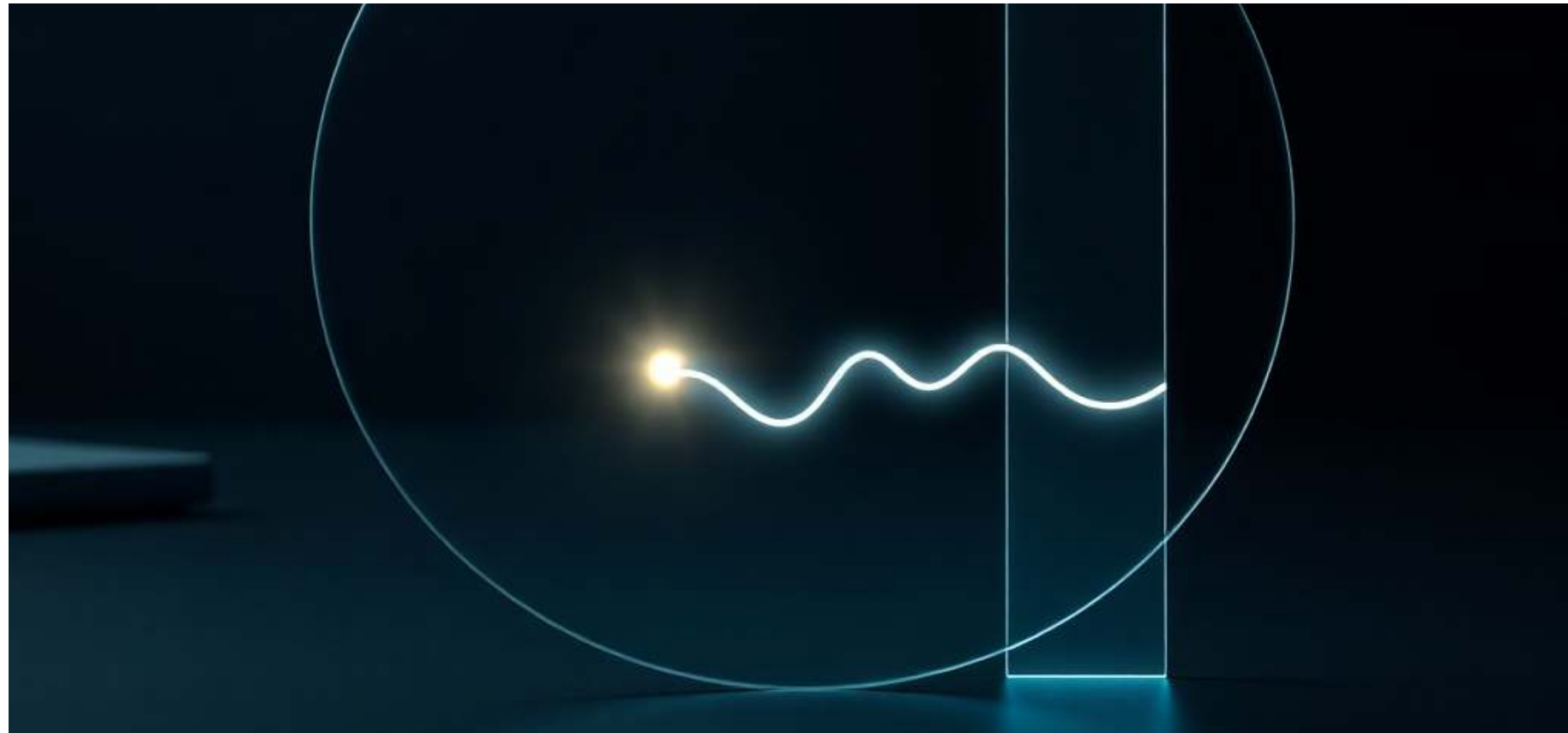
Сколько решений бывает на одном периоде

Число корней полностью определяется положением прямой $y = a$ относительно графика косинуса на отрезке $[0; 2\pi]$.

Максимум на одном периоде — два решения; ноль получается вне отрезка $[-1; 1]$.

По свойствам функции $y = \cos x$ на одном периоде $[0; 2\pi]$.

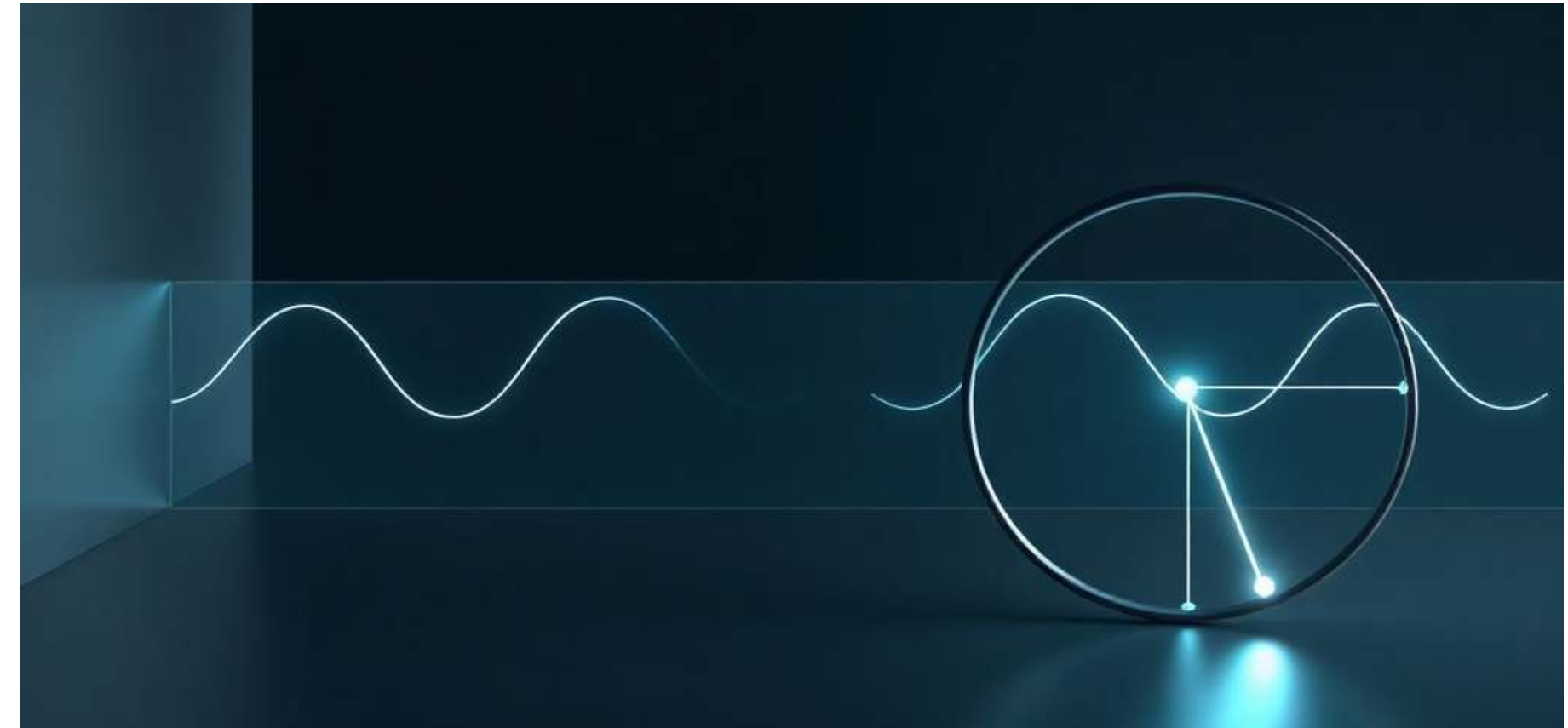
Пример: пересечения для $\cos x = 1/2$



01

Первая точка пересечения

При $a = 1/2$ горизонтальная прямая $y = 1/2$ пересекает косинусоиду в одной из симметричных точек на каждом периоде. Угол α равен $\pi/3$, поэтому первый корень удобно читать прямо с единичной окружности и графика.



02

Вторая симметричная точка

Вторая точка появляется из отражения относительно оси Oy : к углу $\pi/3$ добавляется решение $2\pi - \pi/3$. На графике это подтверждает общую формулу $x = \pm\pi/3 + 2\pi k$, где k — целое число.

Как меняются решения при $\cos x = 0$

Шаг 1. Находим нули косинуса

01

При $a = 0$ нужно найти точки, где $\cos x$ обращается в нуль. На единичной окружности это положения с абсциссой 0, то есть вертикальная ось.

Шаг 2. Записываем первые корни

02

На отрезке $[0; 2\pi]$ получаем два значения: $\pi/2$ и $3\pi/2$. Они лежат по разные стороны окружности и показывают, что решения повторяются через половину периода.

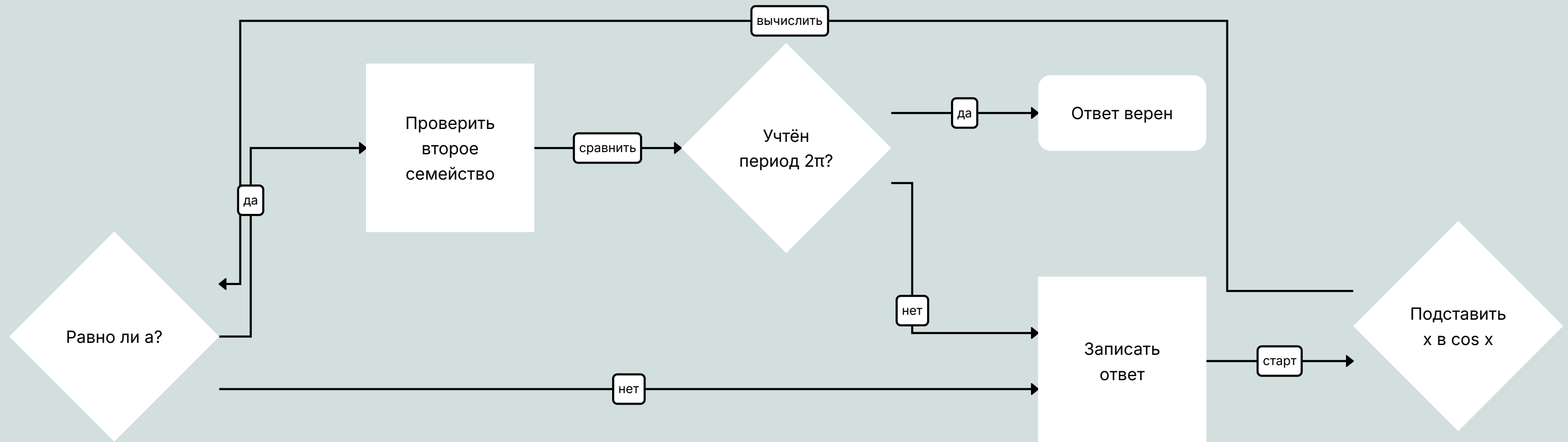
Шаг 3. Получаем общий ответ

03

Из периодичности следует формула $x = \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому корни чередуются через каждые π , а не через 2π .

Как проверить найденный ответ

Проверка строится на подстановке корня в $\cos x$ с учетом периода 2π и симметрии корней при $-1 < a < 1$.



Частые ошибки при решении уравнения $\cos x = a$

Не проверяют параметр

Иногда сразу ищут угол $\arccos a$, не убеждаясь, что $|a| \leq 1$. Из-за этого в ответ попадают несуществующие значения, хотя косинус не выходит за пределы от -1 до 1 .



Теряется второе семейство

При $-1 < a < 1$ часто записывают только одно решение. Но косинус симметричен, поэтому необходимо указать оба семейства корней, иначе ответ оказывается неполным.



Путают α и $\pi - \alpha$

Главный угол $\arccos a$ лежит в $[0; \pi]$, а второе решение связано с $\pi - \alpha$ или $2\pi - \alpha$. Если их смешать, можно получить неправильную пару корней.



Забывают периодичность

Отсутствие слагаемого $2\pi k$ приводит к записи только одного круга решений. Тогда теряются все корни, возникающие при повторении графика через каждый полный период.



Ошибаются в крайних случаях

Для $a = 1$ и $a = -1$ нужны отдельные формулы: $x = 2\pi k$ и $x = \pi + 2\pi k$. Универсальная запись здесь не должна исказить число корней.



Сравнение решений для разных значений a

a	Решения	Вид ответа
1	1	$2\pi k$
0	2	$\pi/2 + \pi k$
$-1/2$	2	$\pm \arccos a + 2\pi k$
2	нет	—

Таблица показывает, как значение параметра влияет на существование и вид корней на отрезке $[0; 2\pi]$.

Параметр a задаёт и наличие корней, и их количество, и форму записи ответа.

Как помогает функция $\arccos$



Главное значение

Функция $\arccos a$ даёт один основной угол из промежутка $[0; \pi]$, для которого $\cos x = a$. Это удобная стартовая точка, если нужно быстро получить первый корень.



Дополнение симметрией

Одного значения $\arccos a$ недостаточно для полного ответа при $-1 < a < 1$. Из симметрии косинуса появляется второе семейство корней, связанное с $2\pi - \arccos a$.



Связь с окружностью

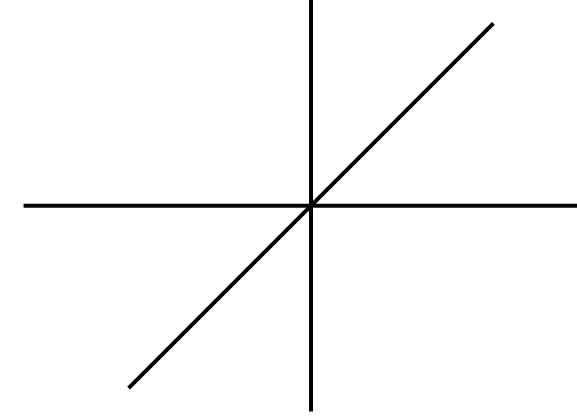
На единичной окружности $\arccos$ помогает перейти от числа a к углу, а затем восстановить все решения с учётом периодичности. Так аналитическая запись становится геометрически понятной.

Симметрия корней относительно оси Oy

Одинаковые значения косинуса у симметричных углов показывают, почему решения появляются парами и повторяются через 2π .

При $-1 < a < 1$ одинаковая абсцисса у α и $-\alpha$ даёт два семейства корней.

Практическое применение уравнений вида $\cos x = a$



01

Гармонические колебания

В физике такие уравнения описывают положения маятника, колебания пружины и другие периодические процессы. Значение a задаёт нужный уровень амплитуды или проекции в конкретный момент времени.

02

Проекции векторов

Косинус связывает длину вектора с его проекцией на ось. Поэтому уравнение $\cos x = a$ помогает находить направления, при которых проекция принимает заданное значение.

03

Геометрические построения

В задачах на окружность и треугольники такие уравнения позволяют вычислять углы по известной координате точки. Это соединяет координатный метод с привычной геометрической интуицией.

04

Проверка модели

Умение решать $\cos x = a$ полезно, когда нужно читать графики, сравнивать периодические зависимости и записывать ответ в общем виде. Это базовый навык для более сложных тригонометрических задач.

Главное о решении $\cos x = a$

Уравнение $\cos x = a$ решается через область значений, симметрию и период 2π . Если помнить про отрезок $[-1; 1]$ и две ветви корней, ответ получается быстро и без потерь.