

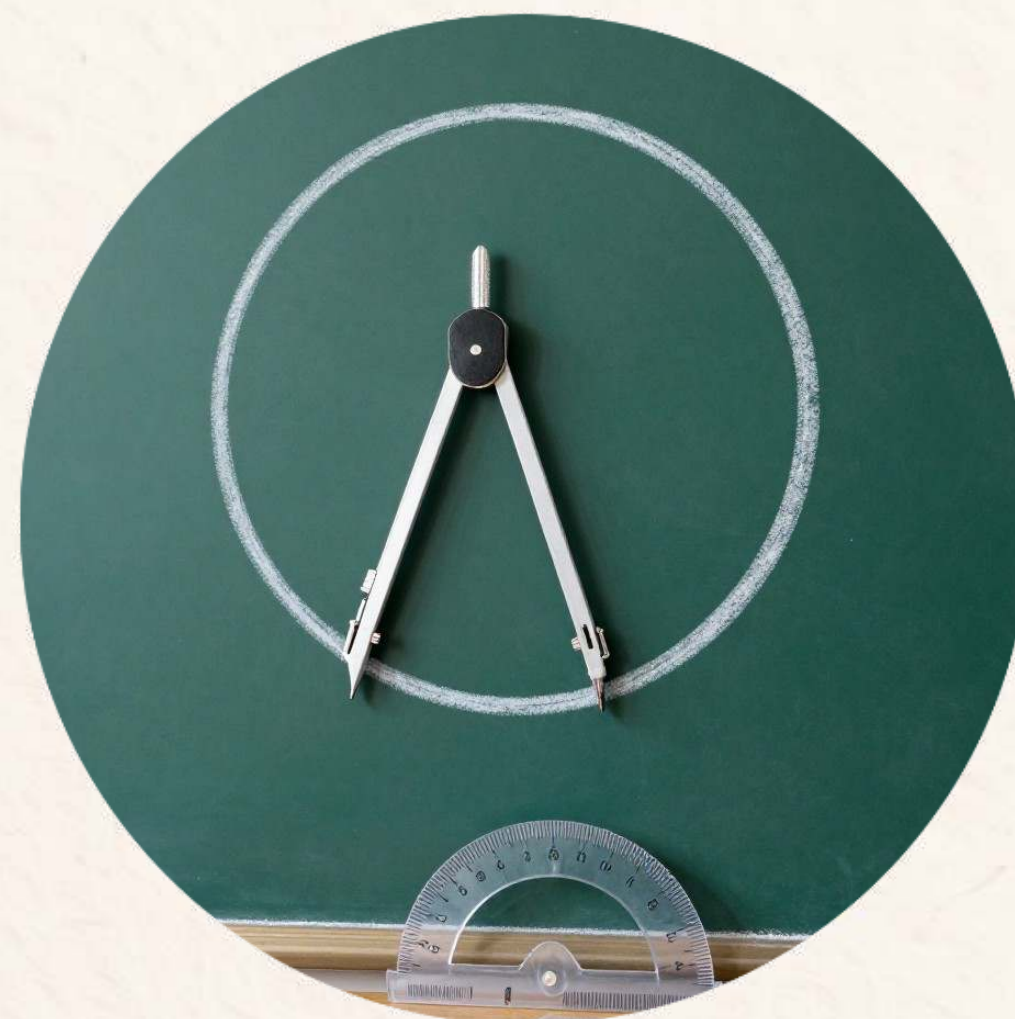
Уравнение окружности: связь геометрии и координат

Описывает круг формулой: центр $(a; b)$, радиус r и любая точка $(x; y)$.



Почему уравнение окружности важно в 8 классе

- В координатной плоскости окружность задают не чертежом, а формулой. Используются координаты, расстояние и радиус. Так решают задачи: находят центр и радиус и проверяют, лежит ли точка на окружности.



Что такое окружность



Окружность — это множество точек плоскости, которые находятся на одном и том же расстоянии от заданной точки. Это расстояние одинаково для всех точек окружности.



Точку, от которой отсчитывают одинаковое расстояние, называют центром окружности. Обычно её обозначают буквой O и задают координатами.



Постоянное расстояние от центра до любой точки окружности называют радиусом. Например, при радиусе 5 см каждая точка окружности удалена от центра ровно на 5 см.

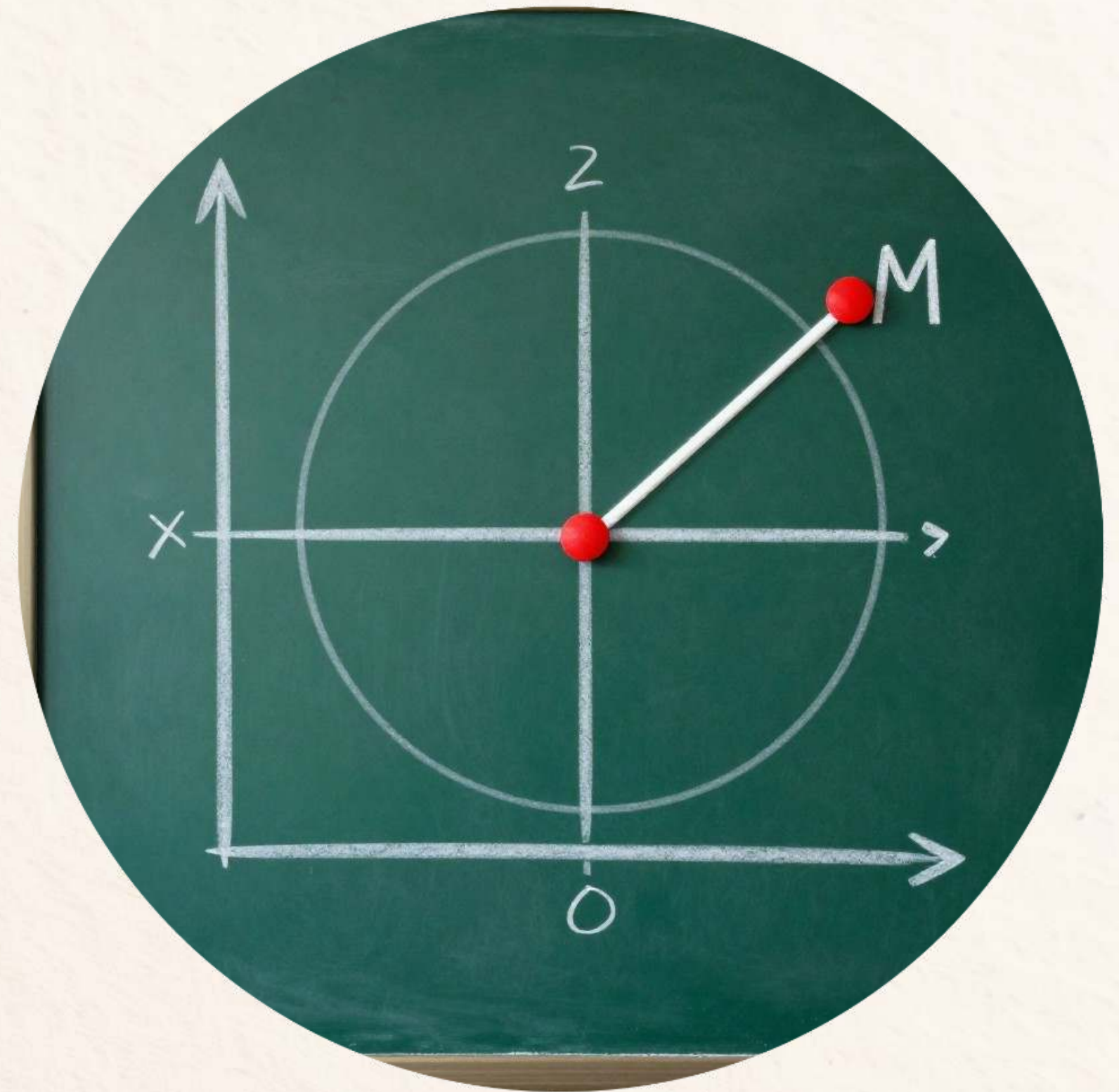
Центр, радиус и точка на координатной плоскости

Обозначения на плоскости

Центр окружности обозначают $O(a; b)$, а произвольную точку на окружности — $M(x; y)$. Отрезок OM является радиусом, то есть его длина равна r .

Как координаты описывают окружность

На координатной сетке удобно показать оси x и y , точку O , одну точку M и отрезок OM . Видно, что положение окружности определяется числами центра и радиусом.



5

Для окружности расстояние от центра до точки на круге всегда равно радиусу

Расстояние между $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ вычисляют по $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Эта идея напрямую приводит к условию $OM = r$.

Материалы школьного курса геометрии (теорема Пифагора и формула расстояния в координатной плоскости)

Как получают уравнение окружности

Последовательность переходов от геометрического условия к стандартной формуле



Стандартный вид уравнения окружности



Окружность обычно записывают в виде $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Здесь a и b — координаты центра, а r — радиус.



Если центр находится в начале координат, то $a = 0$ и $b = 0$. Тогда уравнение упрощается до $x^2 + y^2 = r^2$.



В этом случае окружность симметрична относительно обеих осей координат, потому что расстояние от центра до точки зависит только от x и y по квадратам.

Что означает каждый элемент формулы

Элемент	Значение	Пример
x, y	Координаты точки	$(x; y)$
a, b	Координаты центра	$O(a; b)$
r	Радиус	r
r^2	Квадрат радиуса	25
$(x-a)^2$	Часть по x	$(x-a)^2$
$(y-b)^2$	Часть по y	$(y-b)^2$

— Формула раскладывает условие «расстояние до центра равно радиусу» на координатные выражения.

Фактически формула сравнивает сумму двух квадратов отклонений точки от центра с квадратом радиуса.

— *Стандартный вид уравнения окружности*

Как растёт квадрат радиуса

Поскольку r^2 — это квадрат, то изменение радиуса сильнее влияет на правую часть уравнения, чем кажется по линейной шкале r .

Чем больше r , тем заметнее становится разница в r^2 : круг «быстрее» меняет положение точек на координатной плоскости.

Вычисления по формуле r^2 для $r = 1, 2, 3, 4$



Пример окружности с центром не в начале координат

- Пусть центр окружности $O(2; -1)$, а радиус равен 3. Тогда $r^2 = 9$, и в уравнении нужно подставить эти значения.
- Записываем: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$. В скобке для y появляется «+ 1», потому что вычитается величина $(y - (-1))$.
- Такие знаки в координатах центра — частая причина ошибок: нужно внимательно следить, как знак в центре переносится в скобку.
- В итоге уравнение показывает окружность, сдвинутую относительно начала координат: центр в точке $(2; -1)$, а все точки на расстоянии 3 от него.

Как проверить, принадлежит ли точка окружности

Подставьте координаты точки $M(x; y)$ в уравнение $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Сравните значение левой части с r^2 .

Если после подстановки получается равенство, то расстояние от точки до центра равно радиусу, и значит, точка лежит на окружности.

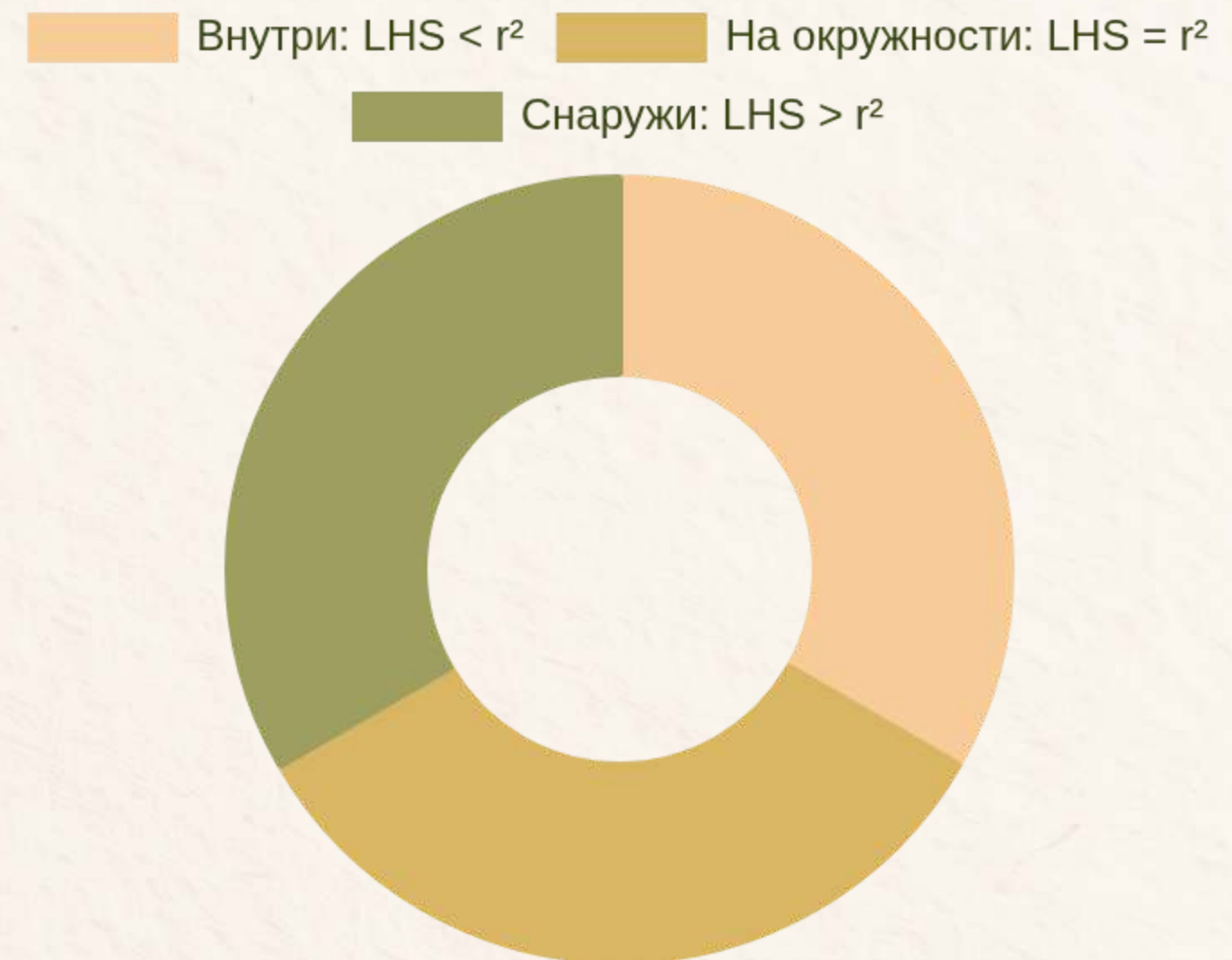
Если левая часть меньше r^2 , точка ближе к центру радиуса, то есть находится внутри. Если больше — точка вне окружности.

Точка внутри, на окружности и вне её

Одинаковая проверка работает для любой точки:
достаточно вычислить $LHS = (x-a)^2 + (y-b)^2$ и сравнить
её с r^2 .

Сравнение переводит геометрию в численное
решение: один признак сразу определяет положение
точки без построения рисунка.

Учебная модель сравнения выражения с r^2 , методика
курса математики (без внешних данных)



25

Поскольку 25 является квадратом радиуса,
радиус равен корню из этой величины.

В уравнении $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$ центр читается как $(-4; 3)$.
Радиус находится как $\sqrt{25}$, а знак у координаты центра меняется
на противоположный.

*Модель чтения параметров из стандартного уравнения
окружности (без внешних статистических данных)*

Типичные ошибки при работе с уравнением окружности

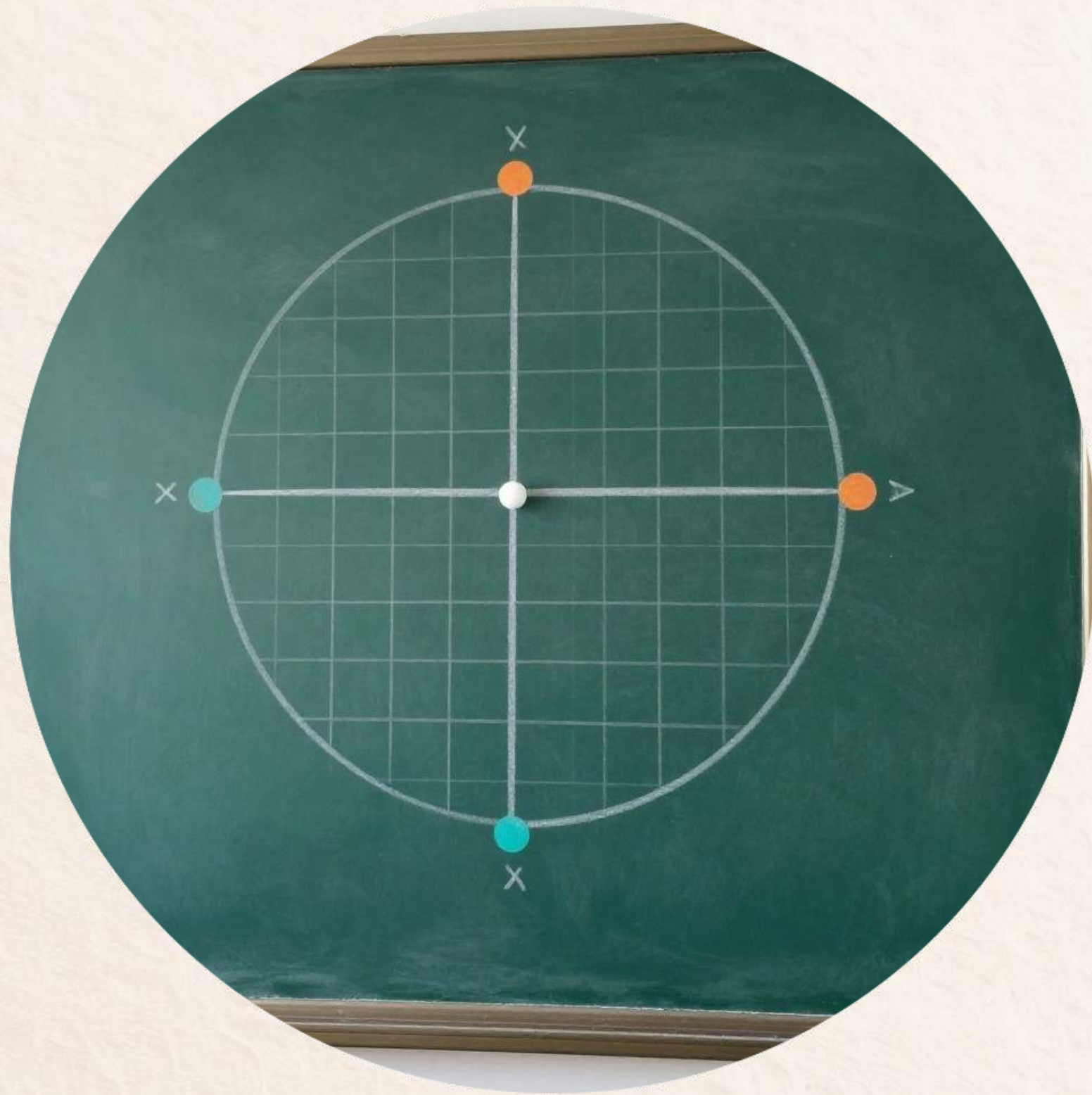
Ошибка	Как проявляется	Как исправить
Знак у центра	$(-a)$ путают с a	Проверяйте знак в скобках: координата центра противоположна знаку в выражении
Радиус и r^2	берут r вместо r^2 или наоборот	Правая часть — это r^2 , радиус находят только при извлечении корня
Забыты квадраты	нет степеней в $(x-a)^2$	Все разности в скобках нужно возводить в квадрат
Неверная точка	подставляют не те координаты $M(x; y)$	Перепроверьте координаты и аккуратно повторите подстановку
Радиус отрицательный	в конце получают $r < 0$	Радиус по смыслу задачи — положительное число (берут положительный корень)

В таблице собраны частые неточности при вычислениях и чтении параметров в формуле $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Это помогает быстрее находить причину неверного ответа.

Большинство ошибок связано с чтением знаков и степеней: стоит контролировать правую часть (это r^2) и всегда сравнивать результаты именно с r^2 .

Типовой перечень ошибок из школьной практики по теме уравнения окружности (обобщение методики обучения)

Окружность на координатной сетке



Почему точки на рисунке “держатся” на одном расстоянии

На координатной плоскости отмечают центр окружности $O(a; b)$ и несколько точек $M(x; y)$ так, чтобы они находились на одинаковом расстоянии от центра. Радиус показывают отрезком OM .

Как чертёж помогает понять формулу

Если для каждой отмеченной точки вычислить $(x - a)^2 + (y - b)^2$, получится одно и то же значение r^2 . Поэтому чертёж не просто “рисунок”, а наглядная проверка уравнения.

Алгоритм решения задач на окружность

Пошаговый процесс для задач на составление уравнения и на проверку точек.



Сравнение трёх окружностей по центру и радиусу

У каждой окружности свой центр и свой радиус, но форма окружности одна: это набор точек на одинаковом расстоянии от выбранного центра.

Сдвиг центра меняет положение окружности на плоскости, а рост радиуса делает её больше. При этом уравнение остаётся одной и той же структуры.

Заданные параметры для сравнения (центр и радиус), без внешних источников



Где встречается уравнение окружности в жизни



Круглые мишени и разметка

Кольца на мишени задают одинаковые расстояния до центра. Если перейти к координатам, окружность можно описать формулой и точнее определять попадания.



Колёса и детали машин

Колёса, шкивы и круглые элементы часто моделируют как окружности и круги. Уравнение помогает согласовывать размеры и положения деталей на чертеже.



Циферблаты часов и таймеры

Точки на ободке часов всегда одинаково удалены от центра. Поэтому положение стрелок и отметок удобно проверять через координатную форму окружности.



Спортивные дорожки и треки

Кривые участки трассы можно описывать окружностями. С помощью уравнения находят расстояния от заданной точки до центра и контролируют геометрию разметки.

Краткая памятка по теме

Что требуется	Действие	Результат
Известны центр и радиус	Записать формулу	$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
Найти центр	Читать координаты из скобок	Центр (a; b) с противоположными знаками
Найти радиус	Взять корень из правой части	$r=\sqrt{r^2}$
Проверить точку	Подставить M(x; y) и сравнить	Если LHS= r^2 — точка на окружности

— Ниже – быстрые правила работы с уравнением окружности в стандартном виде. Они помогают без лишних рассуждений перейти от записи к центру, радиусу или проверке точки.

Формула работает как “мост” между координатами и геометрией: одна подстановка превращает рисунок в вычисление и наоборот.

— Учебный алгоритм извлечения параметров и проверки из стандартного уравнения окружности (без внешних данных)

Уравнение окружности — геометрия в числах

Уравнение окружности показывает, что все точки фигуры находятся на одинаковом расстоянии от центра. Стандартный вид $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ позволяет находить центр, радиус и проверять точки.