

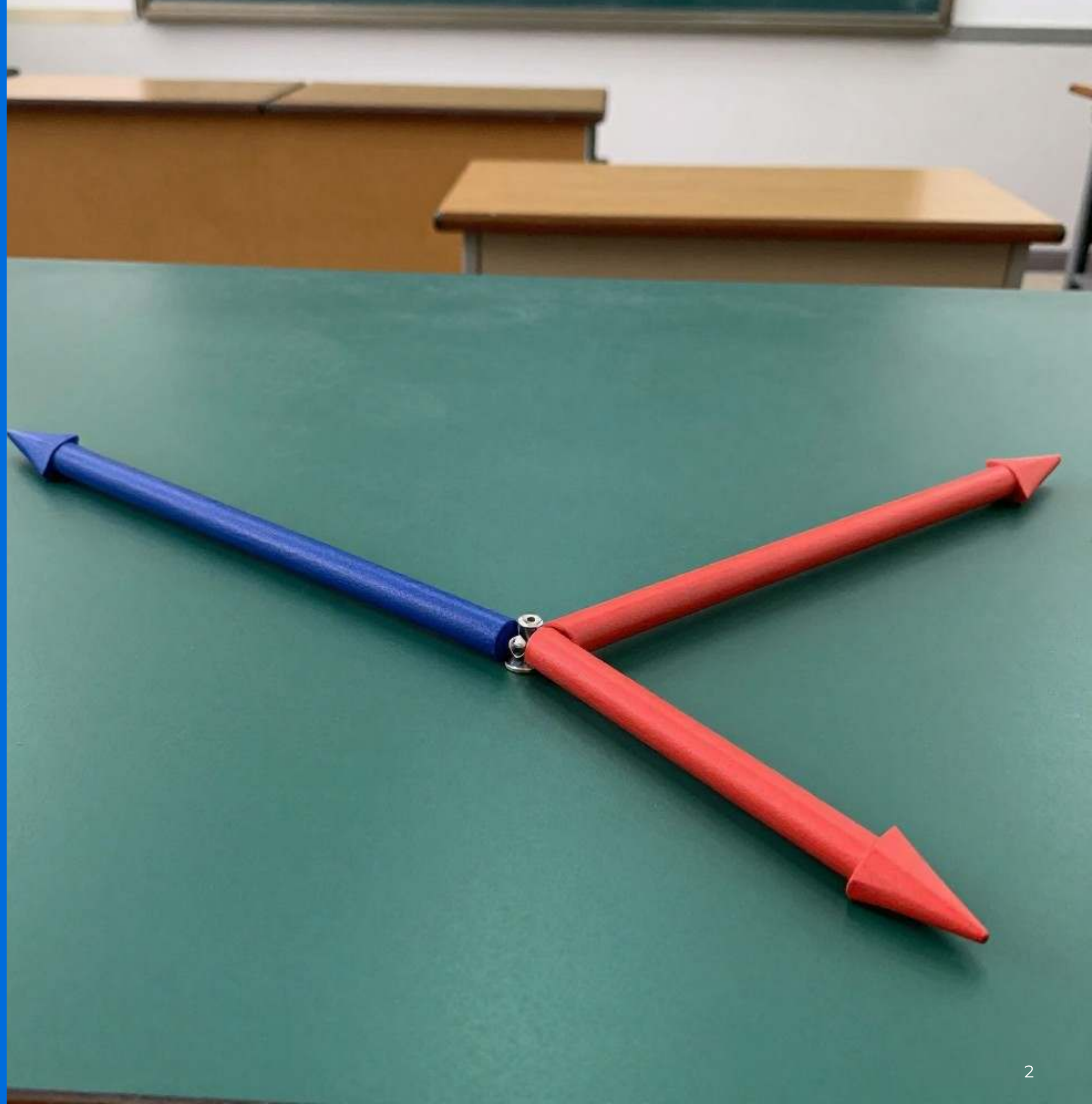
Векторное произведение: определение и геометрический смысл

Операция для двух векторов в пространстве, создающая новый вектор с особым направлением и модулем.



Где в курсе 11 класса изучают векторное произведение

После скалярного произведения и темы про координаты векторов появляется векторное произведение в $\mathbb{R}^3$. Оно связывает длины, угол и ориентацию: помогает находить нормаль, вычислять площади и проверять перпендикулярность.



Вектор как направленный отрезок в пространстве

Вектор описывает не только длину, но и направление в пространстве. Его можно представить как направленный отрезок: одна точка — начало, другая — конец, а длина соответствует его масштабу.

Нулевой вектор имеет нулевую длину и не задает направления. Параллельные векторы лежат на одной или на параллельных прямых, а непараллельные задают целую плоскость.

Векторное произведение определено для пары векторов именно в пространстве. Оно зависит от их взаимного расположения: при изменении угла и ориентации меняются и модуль, и направление результата.

Геометрический образ результата

Перпендикулярность к исходным векторам

Результат векторного произведения — вектор, перпендикулярный обоим исходным векторам. Он выходит из плоскости, в которой лежат эти два вектора, и тем самым «задает» новую пространственную ось.

Ориентация по правилу правой руки

Направление полученного вектора связывают с правилом правой руки: оно фиксирует, какой именно из двух возможных нормалей получается. Для наглядности рассматривают два вектора и нормаль к плоскости их расположения.

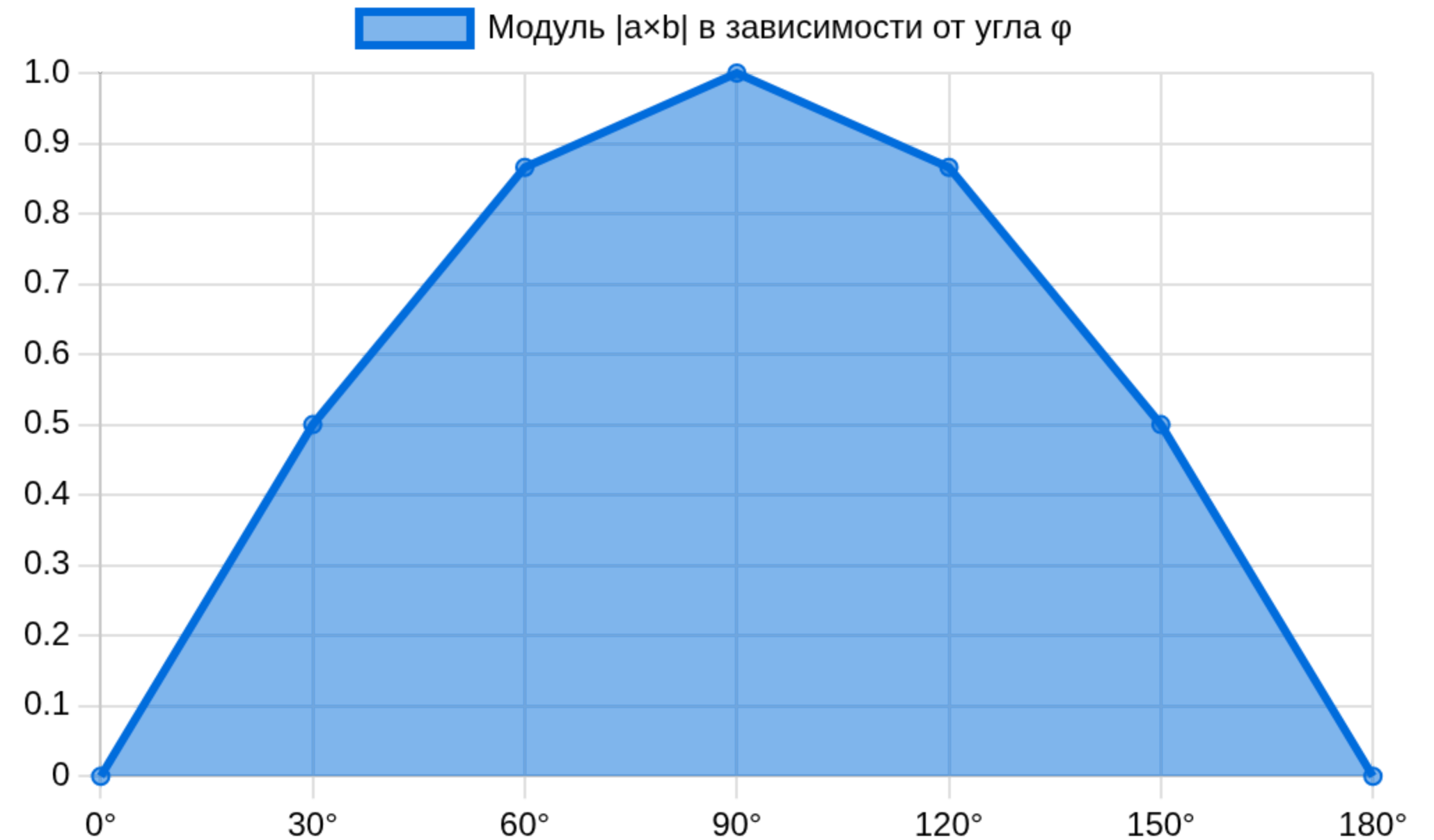


Как меняется модуль векторного произведения при изменении угла

При равных длинах $|a|$ и $|b|$ величина $|a \times b|$ растет вместе с $\sin\varphi$: чем ближе векторы к перпендикулярному положению, тем сильнее «эффект поворота».

Максимум достигается при $\varphi = 90^\circ$, потому что $\sin\varphi$ максимален, а значит, площадь «раскрытия» параллелограмма становится наибольшей.

Формула модуля $|a \times b| = |a| \cdot |b| \cdot \sin\varphi$ (школьный курс стереометрии).



Векторное произведение $a \times b$ — это вектор: его модуль равен $|a| \cdot |b| \cdot \sin \varphi$. Направление перпендикулярно плоскости, содержащей a и b .

$|a| \cdot |b| \cdot \sin \varphi$
Значит, величина
результата определяется
длинами и углом между
векторами.

Основные свойства векторного произведения

Свойство	Формула
Смена порядка	$a \times b = -(b \times a)$
Линейность по сумме	$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
Умножение на число	$(k a) \times b = k(a \times b)$

Ключевые равенства показывают, что операция зависит от порядка, а также как она ведет себя при смене векторов, добавлении и умножении на число.

Из таблицы следует, что операция некоммукативна: меняется знак при перестановке множителей, а значит, направление результата принципиально важно.

Алгоритм нахождения векторного произведения

Логика вычисления по модулю, перпендикулярности и правилу правой руки.

Частные случаи и следствия

Если векторы параллельны, то их взаимное «развертывание» относительно перпендикуляра отсутствует, и потому $a \times b = 0$. Нулевой результат означает, что нормаль не задается.

При угле 90° модулирующий множитель $\sin \varphi$ достигает максимума, поэтому $|a \times b|$ становится наибольшим. В этом случае площадь связанной фигуры наибольшая при фиксированных длинах.

Если один из векторов равен нулевому, то произведение также дает нулевой вектор. По формуле это видно сразу: $|a|$ или $|b|$ равно нулю, значит весь модуль обращается в ноль.

Равенство $a \times b = 0$ — не просто арифметический случай: оно означает параллельность векторов либо наличие нулевого вектора. Поэтому знак и направление здесь не играют роли — результата по сути нет.

Правило правой руки и ориентация в пространстве

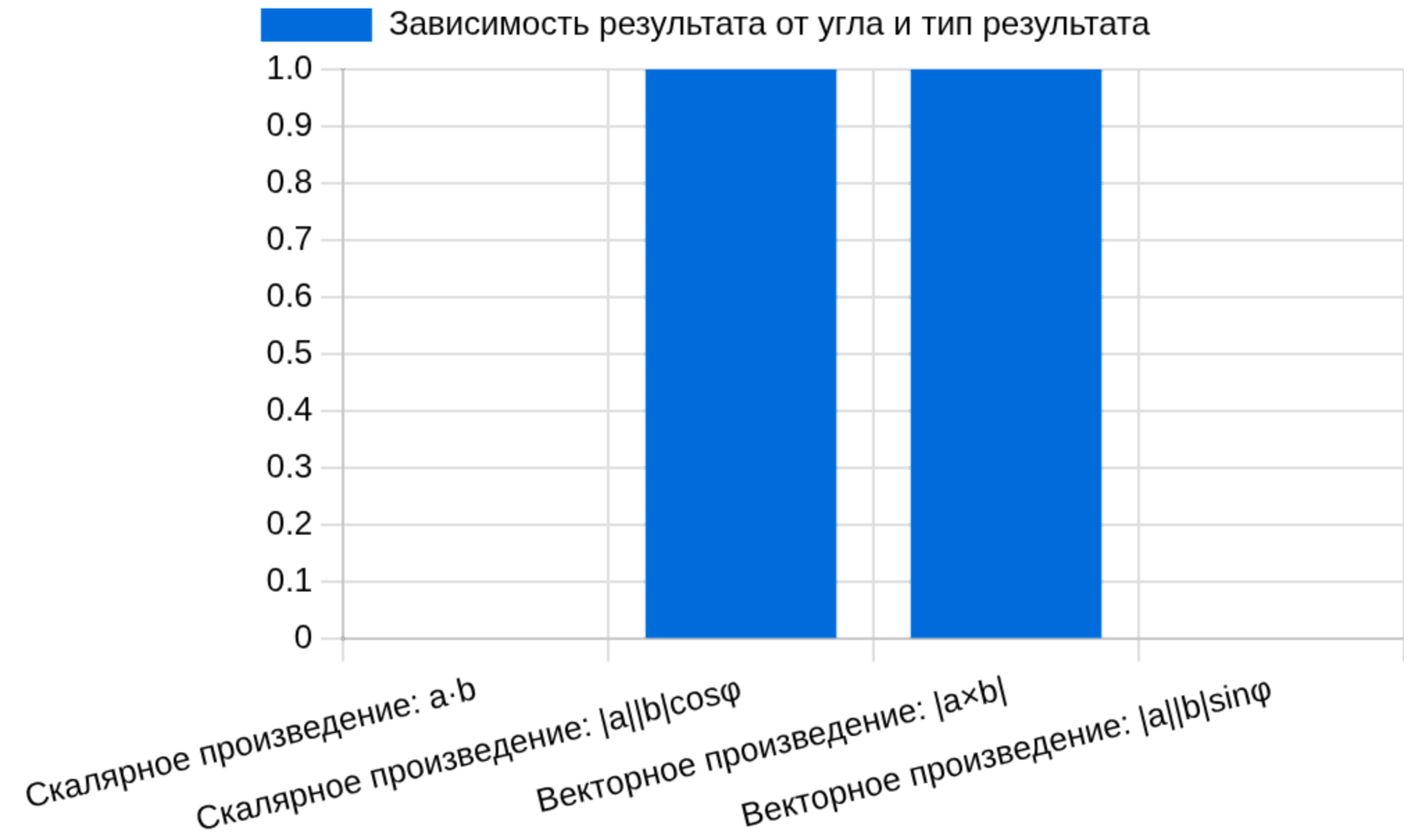
- Правило правой руки связывает порядок векторов с направлением результата: если пальцы правой руки поворачиваются от первого вектора к второму, большой палец указывает направление $a \times b$. Так различают две возможные нормали.
- В школьных задачах это правило помогает контролировать знак и не путать противоположные направления перпендикуляра. На схемах обычно используют изображение правой кисти, два вектора и ориентированные оси координат.



Сравнение скалярного и векторного произведения

Скалярное произведение возвращает число и помогает проверять перпендикулярность. Векторное произведение возвращает вектор: он задаёт нормаль к плоскости двух исходных векторов и связан с площадями.

Обе операции зависят от угла, но используют разные тригонометрические функции. Поэтому по смыслу их применяют в разных задачах: проверка угла или построение нормали.



Координатная формула для вычислений



Готовая формула

Если $a=(a_1, a_2, a_3)$ и $b=(b_1, b_2, b_3)$, то $a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$. Это прямое правило для координат без построений.



Зачем нужна в 11 классе

В задачах требуется найти вектор, перпендикулярный двум заданным. Зная координаты, вы находите $a \times b$ и получаете нормаль к плоскости, не рисуя объёмные чертежи.



Контроль по смыслу

Если вычисления дают $(0,0,0)$, значит векторы параллельны или один из них нулевой. Такой вывод согласуется с геометрическим смыслом модуля $a \times b$.

Пример вычисления по координатам: $a \times b$

Компонента	Расчёт	Значение
x	$2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1)$	7
y	$3 \cdot 4 - 1 \cdot 2$	10
z	$1 \cdot (-1) - 2 \cdot 4$	-9

Вычисления по данным из условия: $a=(1,2,3)$, $b=(4,-1,2)$.

По формуле координатного векторного произведения находят каждую из трёх компонент. Затем собирают итоговый вектор и сверяют результат по смыслу.

Итоговый вектор $a \times b = (7, 10, -9)$. Появление разных знаков показывает изменение ориентации относительно заданного порядка множителей.

Площадь параллелограмма и треугольника

Модуль векторного произведения $|a \times b|$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах a и b . Это связывает тригонометрию и стереометрию: высота определяется углом φ .

Если те же векторы образуют треугольник, то он занимает ровно половину параллелограмма. Поэтому $S_{\text{треугольника}} = \frac{1}{2} \cdot |a \times b|$. Такой переход часто упрощает вычисления в задачах.

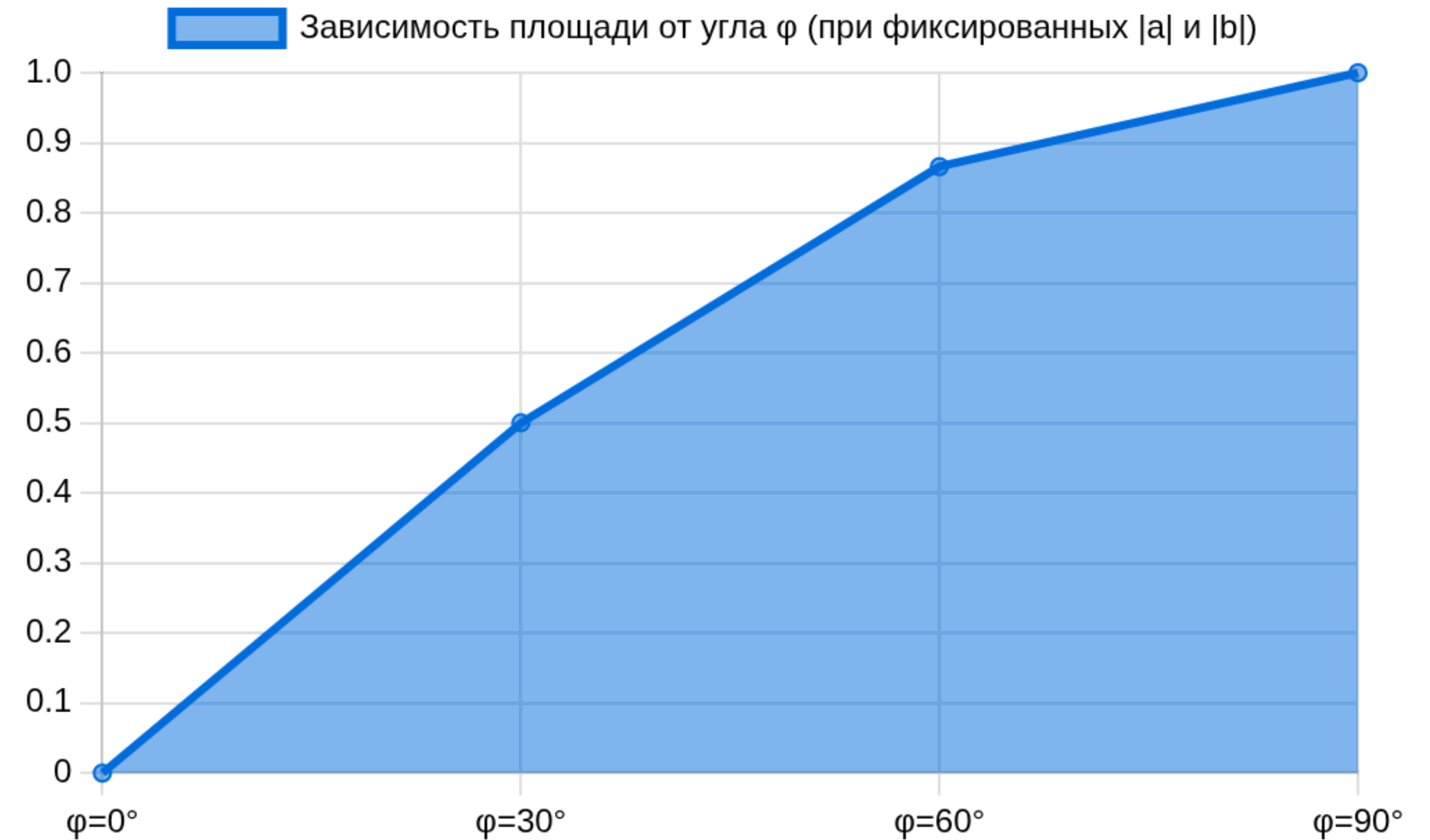
Эти формулы особенно полезны, когда по условию заданы координаты или направленные отрезки. Тогда площадь выражается через $|a \times b|$ и не требует сложных построений в пространстве.

Как угол влияет на площадь фигуры

Поскольку S параллелограмма $= |a \times b| = |a||b|\sin\varphi$, максимальная площадь достигается при $\varphi=90^\circ$. При малых φ высота невелика, поэтому площадь уменьшается.

График подчёркивает: рост площади идёт по закону $\sin\varphi$. Нулевой угол даёт вырожденную фигуру, а перпендикулярность — «самую широкую» проекцию.

Тригонометрическая зависимость из формулы модуля векторного произведения; значения синуса для стандартных углов (актуально на 2026-05).



Применения в физике и технике

В моменте силы используется $M=r \times F$: r — радиус-вектор точки приложения силы, F — сила. Векторное произведение сразу задаёт направление вращения и модуль момента через геометрию плеча.

При изучении вращения важна ориентация осей. Поскольку результат зависит от порядка множителей, направление M меняется при смене ориентации r и F — это соответствует физическому «повороту по/против часовой стрелки».

В инженерных задачах векторное произведение помогает находить нормали к поверхностям и описывать пространственную ориентацию объектов. Благодаря этому удобно формулировать условия перпендикулярности и рассчитывать силы в моделях.

Проверка результата через перпендикулярность

Логика проверки строится на двух свойствах: модуль определяет перпендикулярность результата плоскости, а скалярное произведение помогает проверить ортогональность.

Типичные ошибки при изучении темы

Частая ошибка — перепутать $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ и $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$: направление векторного произведения меняется на противоположное. В результате ученик считает модуль правильно, но получает неверную ориентацию нормали.

Ещё одна ловушка — заменить $\sin \varphi$ на $\cos \varphi$. Это ломает связь с площадями и приводит к несогласованным ответам: при $\varphi = 0$ векторное произведение должно давать ноль, а $\cos \varphi$ этого не гарантирует.

Нередко неверно выбирают нормаль: забывают, что направление определяется правилом правой руки или правого винта. Тогда векторы оказываются «перпендикулярными», но итог направлен не так, как требует условие.

Также путают площади параллелограмма и треугольника: треугольник всегда вдвое меньше. И, наконец, забывают: при нулевом или параллельных векторах $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$, даже если вычисления идут «по формуле».

Обобщающая схема: как связаны геометрия, алгебра и ориентация

Нормаль из геометрии

Представьте два направленных отрезка на одной плоскости. Их векторное произведение даёт перпендикулярный им вектор — нормаль. По модулю оно измеряет «ширину» основания через площадь параллелограмма, поэтому геометрический смысл всегда рядом.



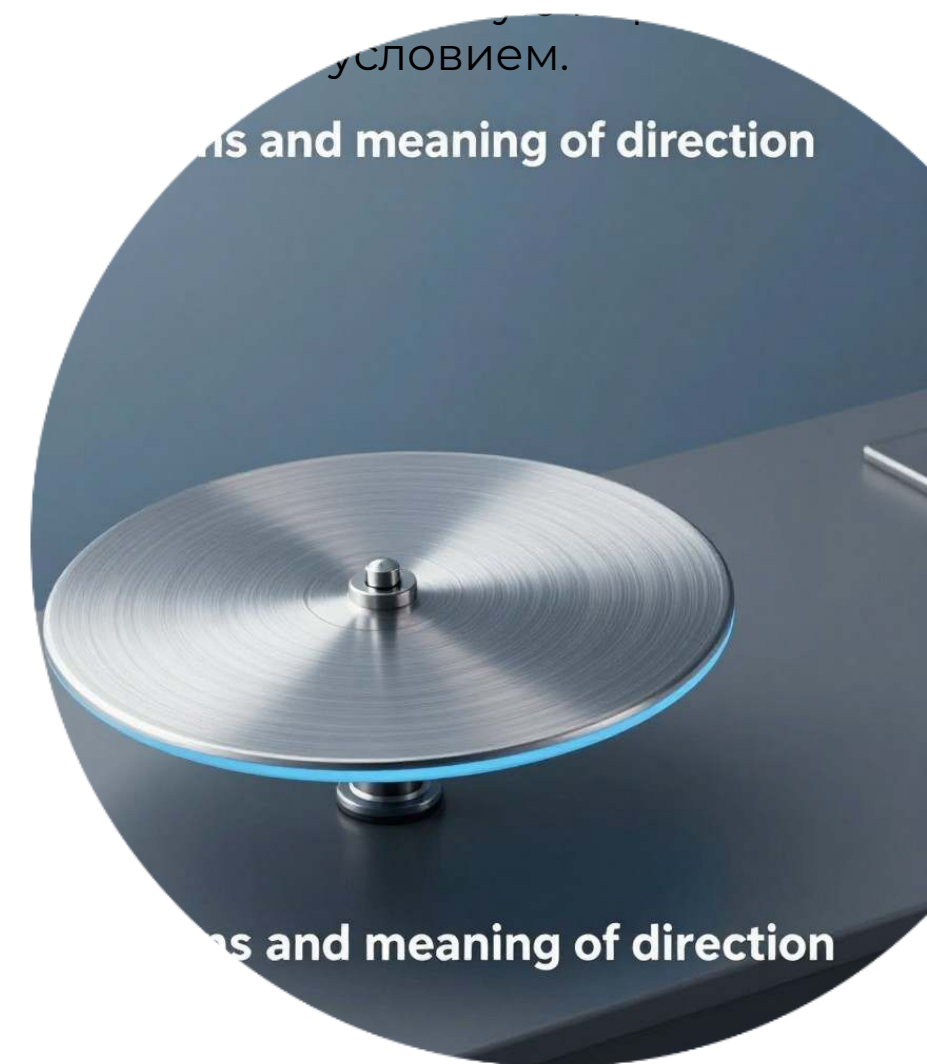
Вычисления без рисунка

Когда известны координаты векторов, чертёж часто не помогает, а усложняет. Координатная формула превращает операцию в набор алгебраических действий: три компоненты считаются по правилам, и итоговый вектор получается сразу. Это особенно удобно для



Применения и смысл направления

Свойства операции делают её инструментом не только для расчёта, но и для ориентации в пространстве. В физике направление момента силы определяет характер вращения. В задачах по стереометрии правильный порядок множителей



Векторное произведение превращает угол в геометрию

Векторное произведение задаёт новый вектор, перпендикулярный двум исходным, с модулем $|a| \cdot |b| \cdot \sin \varphi$. Операция некоммукативна, а значит порядок критичен. Она помогает находить нормали и площади в задачах стереометрии.