



Множество действительных чисел: основные идеи и примеры

Рациональные и иррациональные числа на одной числовой прямой.



Почему действительные числа важны ВОСЬМИКЛАССНИКУ

Они встречаются в счёте, измерениях и формулах. Без них нельзя точно записать длину, время, температуру или результаты вычислений, а также работать с приближёнными значениями в реальных задачах.

Что такое множество действительных чисел

Обозначение $\mathbb{R}$

Множество действительных чисел обозначают буквой $\mathbb{R}$. Это общий набор чисел, которые можно расположить на числовой прямой без пропусков и исключений.

Два класса чисел

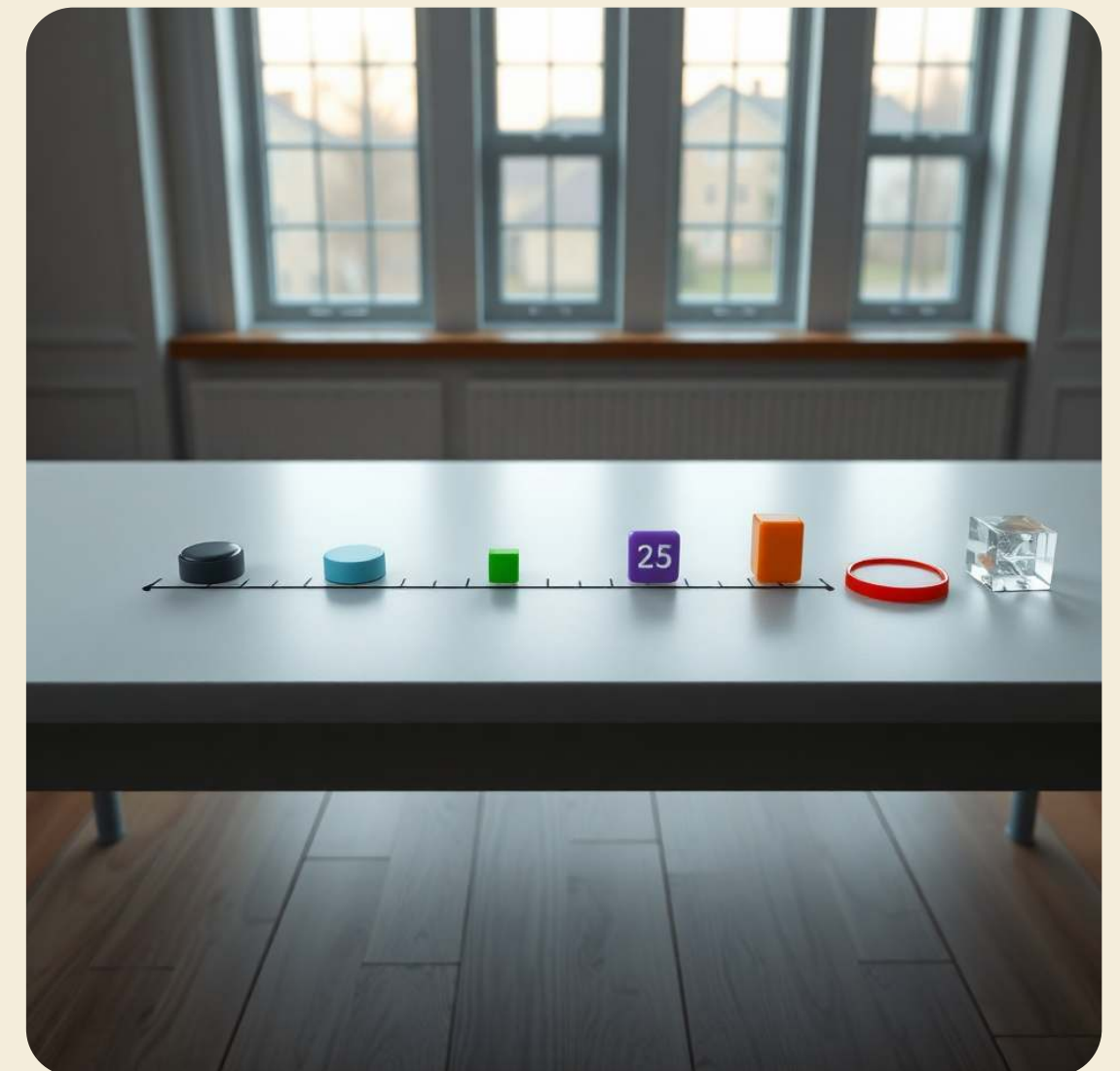
В него входят рациональные и иррациональные числа. Они отличаются способом записи, но вместе образуют одно целое множество, используемое в алгебре и геометрии.

Числовая прямая

Любое число, которое можно отметить на числовой прямой, считается действительным. Поэтому сюда относятся как знакомые целые и дробные числа, так и корни и число π .

Примеры

К действительным числам относятся -4 , 0 , $7/3$, $2,5$, $\sqrt{2}$ и π . Эти записи показывают, что множество $\mathbb{R}$ охватывает очень разные по виду числа.



Рациональные числа: дроби, целые и десятичные записи

01

Запись дробью

Рациональное число можно представить в виде m/n , где m и n — целые числа, а n не равно нулю. Такая форма удобна для точной записи и преобразований.

02

Целые числа внутри множества

Все целые числа тоже рациональны, потому что любое из них можно записать как дробь со знаменателем 1. Например, $-5 = -5/1$, а $0 = 0/1$.

03

Конечные и периодические дроби

К рациональным относятся не только обыкновенные дроби, но и конечные либо периодические десятичные дроби. Например, 2,4 и 0,333... — рациональные числа.

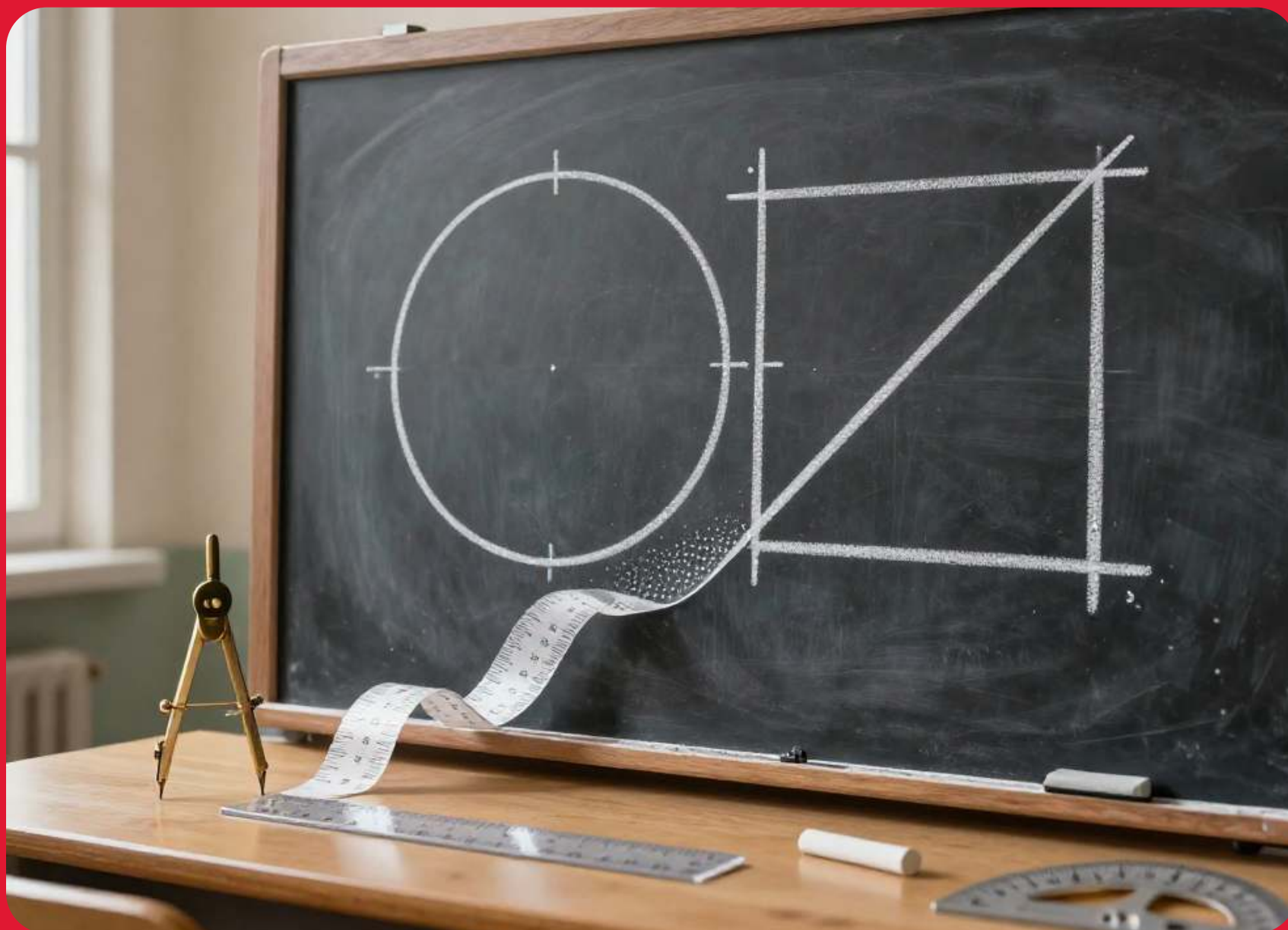
04

Практическое применение

Такие числа часто встречаются в вычислениях и измерениях, где важно получить точный результат или удобную для записи форму ответа.



Иррациональные числа: бесконечная непериодическая запись



Нельзя записать дробью

Иррациональное число нельзя представить в виде m/n , где m и n — целые числа. Это главное отличие от рациональных чисел.



Особая десятичная запись

Их десятичная запись бесконечна и не повторяется периодом. Поэтому такие числа нельзя записать точно конечной дробью или обычной периодической записью.



Примеры из математики

К известным иррациональным числам относятся $\sqrt{2} \approx 1,414...$, $\sqrt{5} \approx 2,236...$ и $\pi \approx 3,14159...$. Они часто появляются в вычислениях.



Связь с геометрией

Иррациональные числа возникают при работе с окружностью, квадратом и диагоналями фигур. Именно поэтому они важны для точных математических моделей.

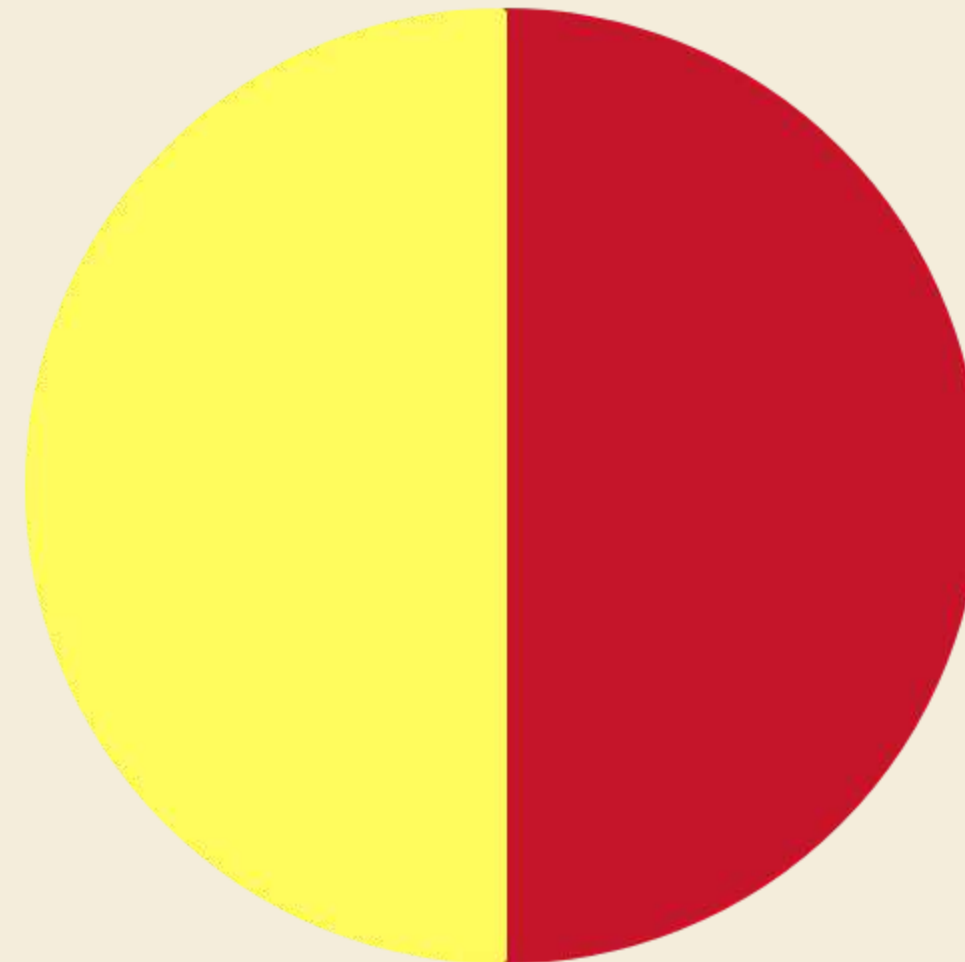
Состав множества действительных чисел

Диаграмма показывает два непересекающихся класса чисел. Их удобно рассматривать вместе, потому что каждый из них является частью общего множества $\mathbb{R}$.

Рациональные и иррациональные числа различаются по записи, но вместе полностью описывают множество действительных чисел.

Учебный материал по теме «Множество действительных чисел»

■ Рациональные числа ■ Иррациональные числа



Числовая прямая как модель множества $\mathbb{R}$

01

Общая линия чисел

Числовая прямая помогает увидеть, где находится каждое действительное число. На ней можно отметить и целые, и дробные, и иррациональные значения.

02

Отрицательные и положительные

Слева от нуля расположены отрицательные числа, справа — положительные. Ноль служит границей между двумя частями прямой и имеет особое положение.

03

Дроби на прямой

Даже дробные числа, например $-\frac{1}{2}$, занимают точное место на прямой. Это показывает, что между целыми числами тоже есть множество других значений.

04

Корни и π

На прямой можно отметить и такие числа, как $\sqrt{2}$ и π . Хотя их нельзя записать конечной дробью, у них есть точное положение.

05

Наглядность модели

Изображение числовой прямой удобно для объяснения сравнения, порядка и расстояний. Оно связывает абстрактные записи чисел с их реальным расположением.



Основные способы сравнения



Положение на прямой

Чем правее число находится на числовой прямой, тем оно больше. Поэтому сравнение часто сводится к определению порядка чисел на одной линии.



Знаки сравнения

Для записи результата используют знаки $<$, $>$ и $=$. Они показывают, какое число больше, меньше или равно другому, без длинного словесного объяснения.



Примеры из задач

Сравнивают числа в уравнениях, неравенствах и измерениях. Например, верно, что $-2 < -1$, $0,7 < 0,8$, а $\sqrt{2} > 1$.

Виды действительных чисел и их записи

Таблица показывает, как отличаются основные группы действительных чисел по записи и поведению десятичной дроби.

Все перечисленные числа принадлежат $\mathbb{R}$, но различаются формой записи и свойствами десятичного представления.

Учебный материал по теме «Множество действительных чисел»

Вид	Запись	Пример	Особенность
Целые	n	-5	Без дробной части
Дробные рациональные	m/n	3/8	Точная дробь
Периодические десятичные	$0, (3)$	0,333...	Повторяется
Иррациональные	—	$\sqrt{2}$	Бесконечная непериодическая

Десятичная запись и округление чисел

01

Две формы записи

Рациональные числа могут иметь конечную или периодическую десятичную запись. Иррациональные числа записываются бесконечно и без повторяющегося периода.

02

Зачем округляют

Вычисления часто проводят приближённо, чтобы получить удобный ответ. Например, число 3,14159 можно округлить до 3,14, если высокая точность не требуется.

03

Точность зависит от задачи

В одних ситуациях важна каждая цифра, а в других достаточно приблизительного значения. Это зависит от единиц измерения и допустимой погрешности.

04

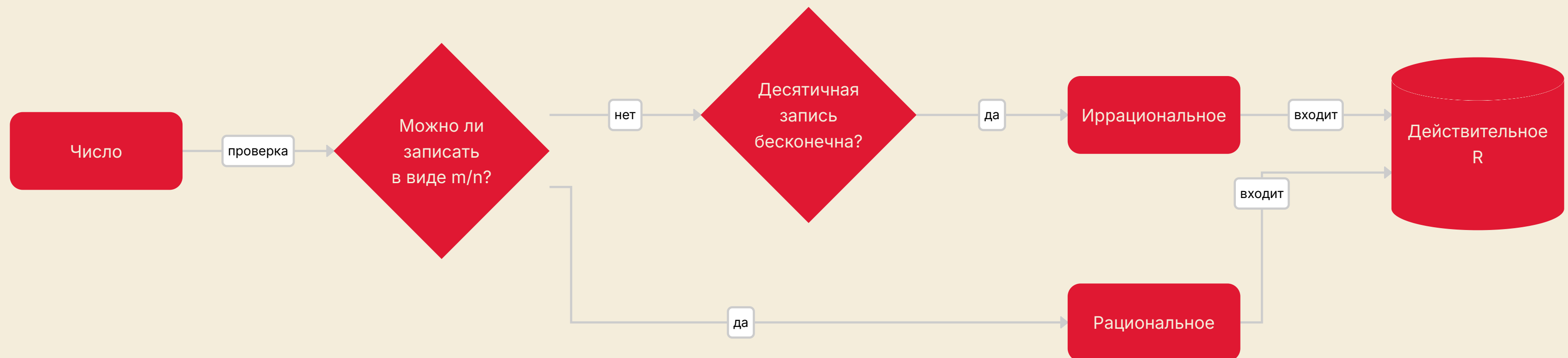
Правильная запись ответа

После округления нужно сохранять нужное число знаков и не смешивать точную и приближённую форму. Это помогает избегать ошибок в решениях и измерениях.



Как определить, к какому виду относится число

Схема помогает по записи числа определить, является ли оно рациональным, иррациональным или, в любом случае, действительным.



Действия с действительными числами

Сложение и вычитание

Действительные числа можно складывать и вычитать так же, как целые и дробные числа. Эти операции помогают находить общий результат измерений, изменений и промежуточных значений в задачах.

Умножение и деление

При умножении и делении сохраняется привычный смысл вычислений: находят часть величины, несколько одинаковых частей или масштабируют результат. Делить на ноль нельзя, потому что такое действие не определено.

Степени и корни

Возведение в степень и извлечение корня расширяют возможности вычислений. Они нужны, когда по условию требуется найти площадь, сторону фигуры, скорость или другое неизвестное значение.

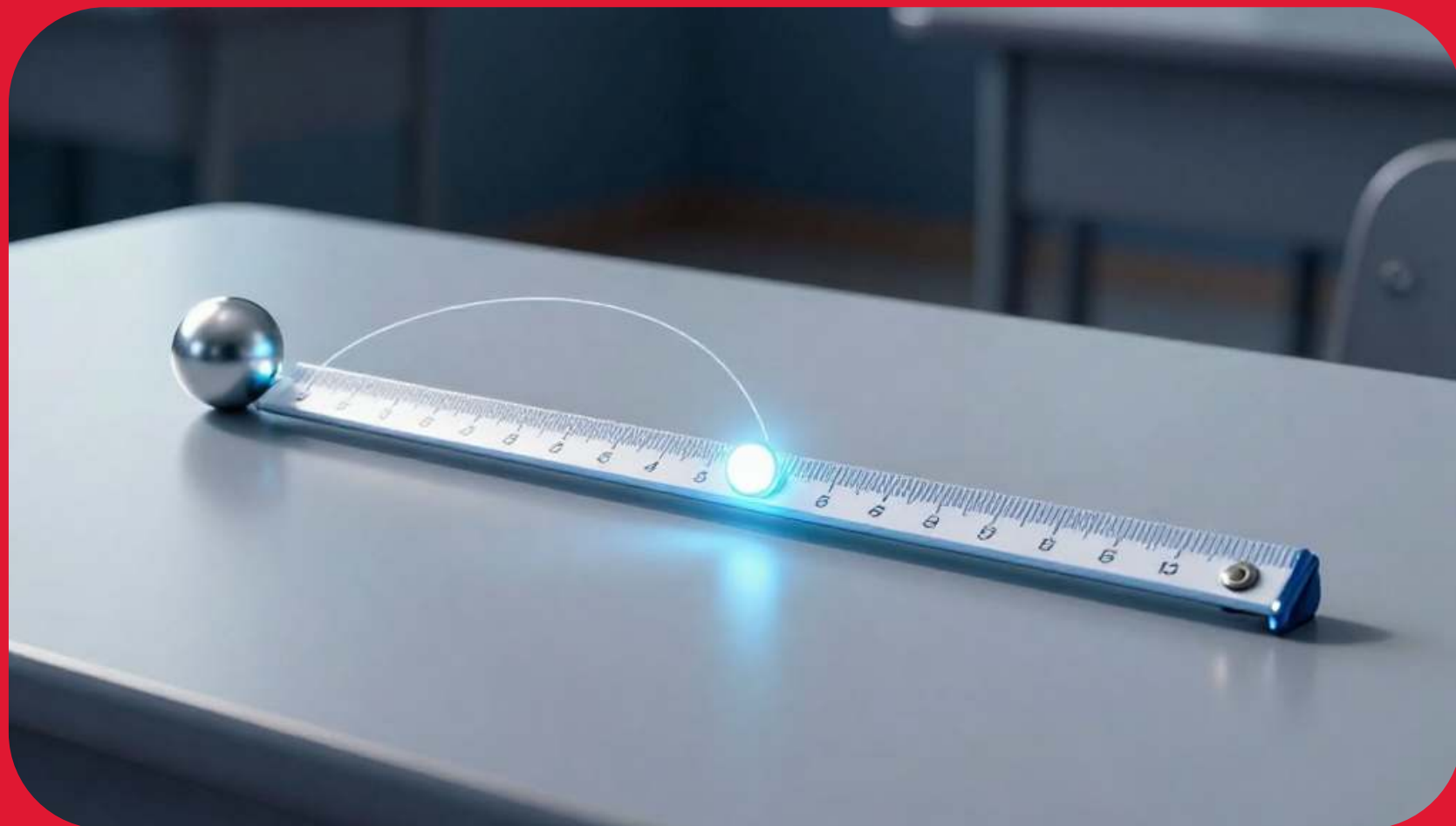
Проверка результата

После вычислений важно убедиться, что ответ остаётся действительным числом. Это особенно полезно в алгебре и геометрии, где многие формулы дают именно такие значения.

Удобство для задач

Множество действительных чисел объединяет почти все числовые ответы, встречающиеся в школьных задачах. Поэтому с ним удобно работать при решении уравнений, неравенств и практических измерений.

Как модуль связывает число и расстояние



От нуля до любого числа

Модуль показывает, на каком расстоянии число находится от нуля на числовой прямой. Поэтому $|-4| = 4$, а $|3| = 3$: важна не сторона, а длина отрезка. Это свойство удобно читать как обычное измерение.



Расстояние между двумя точками

Если отметить на прямой числа 2 и 7, между ними получится отрезок длиной 5. Так модуль помогает описывать расстояние не только до нуля, но и между любыми двумя числами. На рисунке это видно особенно наглядно.

Примеры действительных чисел в измерениях

Дробные значения встречаются не только в математике, но и в повседневных измерениях: в длине, массе, температуре, скорости и времени.

Даже обычные бытовые величины часто требуют десятичной записи, потому что целых чисел для точного измерения недостаточно.

Пары чисел из условия задания; учебные примеры для 8 класса.



2

различных действительных числа всегда можно найти
сколько угодно промежуточных значений

Например, между 1 и 2 есть 1,5, 1,25, 1,01
и множество других чисел. Это показывает, что
на числовой прямой нет пустых промежутков.

Свойство плотности множества действительных чисел,
школьный курс алгебры.

Основные свойства порядка в $\mathbb{R}$

01

Прибавление не меняет порядок

Если $a < b$, то после прибавления одного и того же числа c порядок сохраняется: $a + c < b + c$. Это свойство удобно при переносе слагаемых в неравенствах.

02

Умножение на положительное число

Когда обе части неравенства умножают на положительное число c , знак остаётся тем же: $ac < bc$. Такой приём часто используют, чтобы упростить выражения и избавиться от дробей.

03

Умножение на отрицательное число

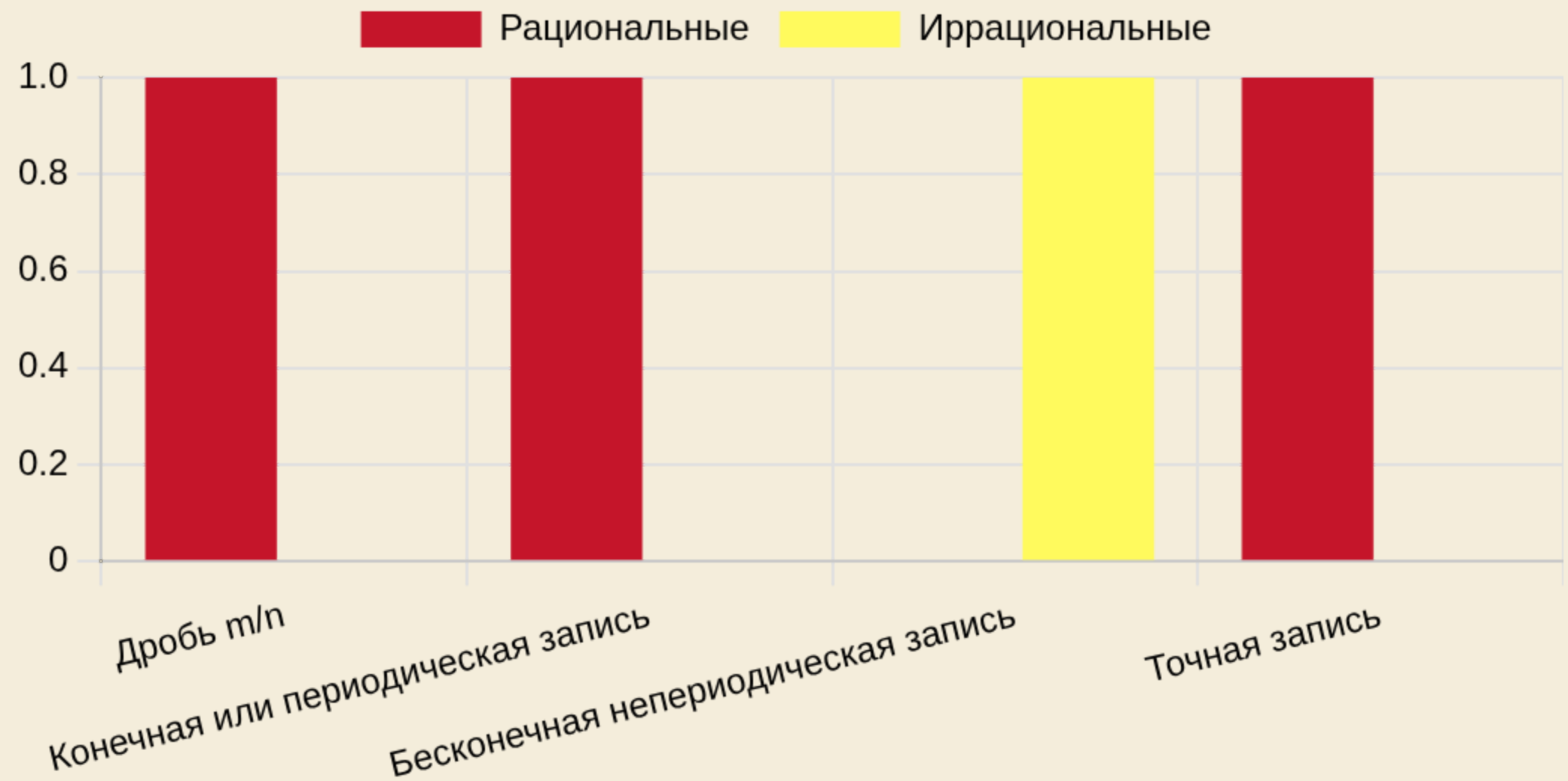
Если $c < 0$, знак неравенства меняется на противоположный. Это правило обязательно нужно помнить, иначе при решении неравенств легко получить неверный ответ.

Рациональные и иррациональные числа: сравнение признаков

Оба вида входят в множество действительных чисел, но отличаются записью и свойствами десятичного представления.

Главное различие связано не с местом на прямой, а с тем, как число записывается и можно ли представить его точно дробью.

Свойства рациональных и иррациональных чисел, школьный курс алгебры.



Типичные ошибки при работе с действительными числами



Период и бесконечность

Не всякая длинная десятичная запись является иррациональной. Если цифры повторяются по определённому правилу, число рациональное, даже когда запись выглядит очень длинной.



Ошибки округления

При округлении важно смотреть на следующую цифру и на требуемую точность. Нельзя просто отбрасывать лишние знаки, если по условию нужно сохранить нужное число десятичных разрядов.



Сравнение отрицательных чисел

На числовой прямой число, расположенное правее, больше. Поэтому $-0,3$ больше, чем $-0,8$, хотя по модулю оно ближе к нулю.



Корни и ответ задачи

При извлечении корня нужно проверять, что полученное число действительно подходит по смыслу задачи. В ответе следует указывать именно ту точность, которая требуется в условии.

Известные числа и их приближённые значения

В таблице показано, какие числа можно записать точно, а какие обычно используют в приближённом виде.

Числа π , $\sqrt{2}$ и e обычно записывают приближённо, а рациональные числа, такие как $0,125 = 1/8$, имеют точную дробную запись.

Стандартные математические обозначения
и школьный курс алгебры.

Число	Запись	Вид
π	3,14159...	приближённая
$\sqrt{2}$	1,41421...	приближённая
e	2,71828...	приближённая
0,125	1/8	точная

Итоги темы: что важно помнить о множестве $\mathbb{R}$

Действительные числа объединяют рациональные и иррациональные, располагаются на числовой прямой и позволяют точно описывать измерения. Их сравнивают, округляют, записывают десятичными дробями и используют в самых разных задачах.