

Вписанная окружность

Окружность внутри треугольника: инцентр, биссектрисы и формула радиуса.



Зачем изучать вписанную окружность в 8 классе

Эта тема объединяет треугольники, биссектрисы, площадь и периметр. Она помогает находить радиус, неизвестные отрезки и лучше понимать, как связаны свойства фигур.



Определение вписанной окружности



Касание со сторонами

Вписанная окружность касается всех трёх сторон треугольника. Поэтому она целиком находится внутри фигуры и не выходит за её границы.



Точки касания

Точки касания лежат прямо на сторонах треугольника. В каждой из них окружность имеет только одно общее направление со стороной.



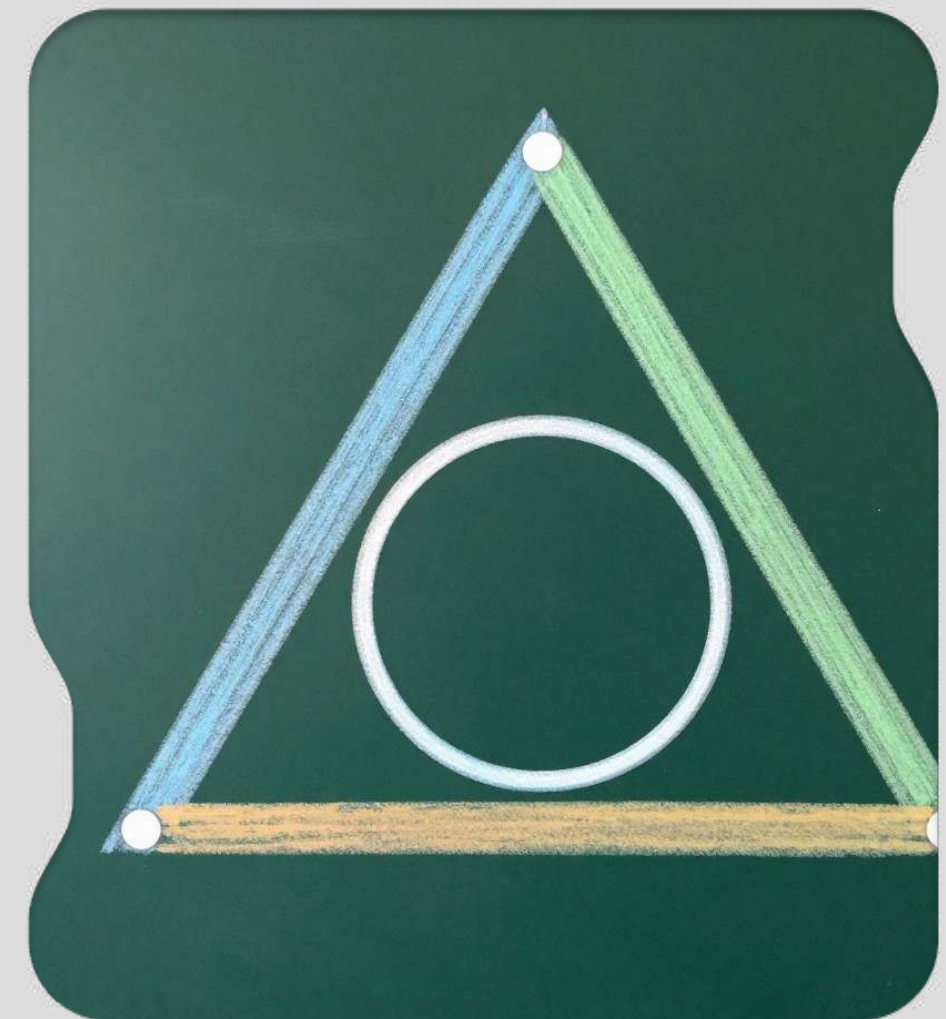
Перпендикуляр к стороне

Радиус, проведённый в точку касания, всегда перпендикулярен соответствующей стороне. Это важное свойство используется при построении и решении задач.



Равное расстояние

Центр окружности одинаково удалён от всех сторон треугольника. Именно это расстояние и является радиусом вписанной окружности.





3

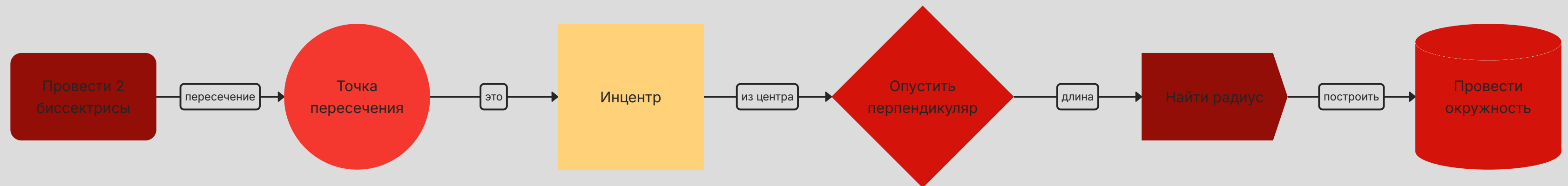
**биссектрисы
треугольника
пересекаются
в одной точке —
инцентре**

Эта точка находится внутри
треугольника и одинаково удалена
от всех его сторон, поэтому её легко
связать с радиусом окружности.

Теорема о пересечении биссектрис
треугольника

Построение вписанной окружности

Алгоритм основан на пересечении биссектрис и перпендикуляре к стороне.



Биссектрисы треугольника и их свойства



Деление угла

Биссектриса делит угол треугольника на две равные части. Поэтому она помогает точно определить направление внутри фигуры и служит основой для построения инцентра.



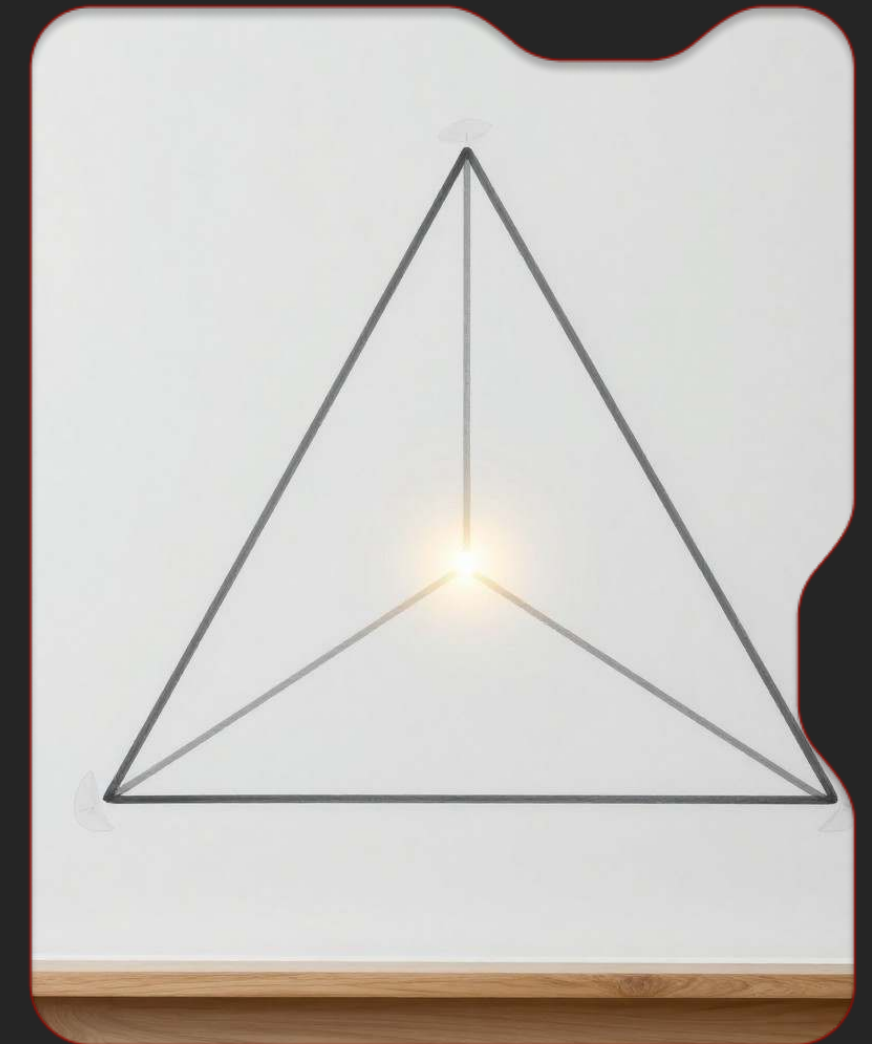
Общая точка

Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка называется инцентром и всегда находится внутри треугольника, даже если он остроугольный.



Связь со сторонами

Биссектриса делит противоположную сторону в отношении прилежащих сторон. Это свойство часто используют, чтобы находить неизвестные длины и проверять построения.



Что одинаково у вписанной окружности

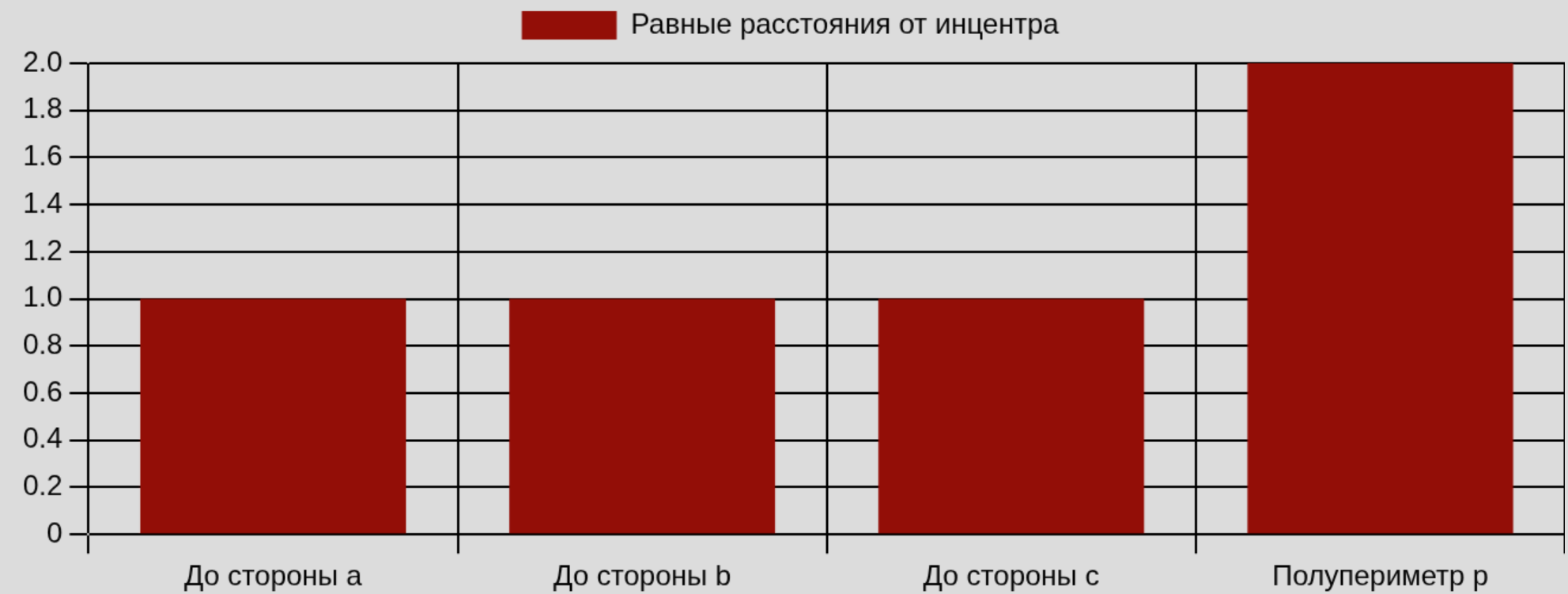


Диаграмма подчёркивает, что все три расстояния от центра до сторон равны между собой.

Равенство трёх отрезков показывает, что радиус задаёт одно и то же расстояние до любой стороны.

Геометрия треугольника: свойство инцентра и определение радиуса

Основная формула радиуса

.01

1. Найти площадь

Сначала определяют площадь треугольника. Без неё радиус по основной формуле найти нельзя, поэтому важно выбрать удобный способ вычисления S .

.02

2. Найти полупериметр

Полупериметр обозначают p и находят по формуле $p = (a + b + c)/2$. Он равен половине периметра треугольника.

.03

3. Подставить в формулу

Радиус вычисляют по формуле $r = S/p$. Она работает для любого треугольника и позволяет находить радиус даже без построения окружности.

.04

4. Проверить ответ

Результат должен быть меньше высоты треугольника и иметь ту же единицу измерения, что и стороны. Это помогает избежать ошибок в вычислениях.

Формулы для разных видов треугольников

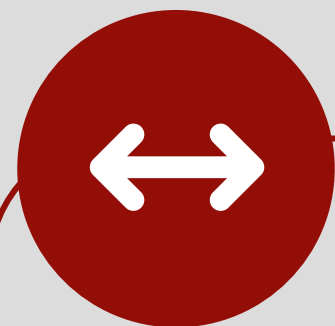
Несколько формул помогают выбрать самый удобный способ вычисления радиуса в зависимости от данных задачи.

Если известны площадь, стороны или тип треугольника, можно выбрать более короткую и удобную формулу.

Случай	Формула	Радиус
Общая	$r = S/p$	для всех
Прямоугольный	$r = (a+b-c)/2$	c — гипотенуза
Равносторонний	$r = a\sqrt{3}/6$	a — сторона
Через Герона	$r = \sqrt{((p-a)(p-b)(p-c)/p)}$	по сторонам

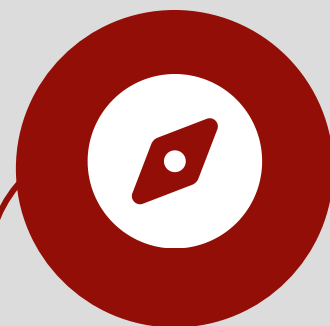
Формулы для вписанной окружности в треугольнике

Равные касательные из одной вершины



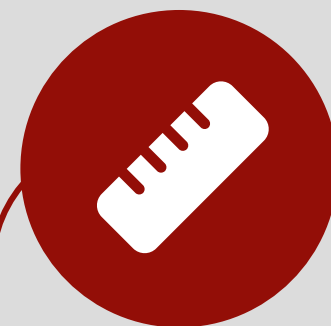
Одинаковая длина

От одной вершины к точкам касания на соседних сторонах получаются равные отрезки. Это свойство помогает сразу заметить, где на чертеже находятся равные части.



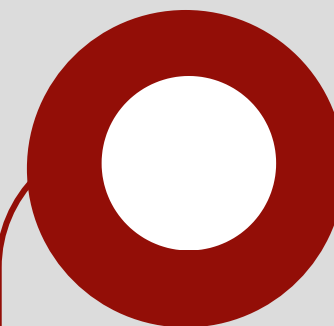
Проверка построения

Если окружность построена верно, касательные от одной вершины будут совпадать по длине. Так удобно проверять аккуратность чертежа без дополнительных вычислений.



Поиск неизвестных отрезков

Равенство касательных позволяет находить длины частей сторон, когда на рисунке даны только некоторые отрезки. Из одного равенства часто получают сразу несколько неизвестных.



Точки касания

В задачах точки касания часто обозначают T_1 , T_2 и T_3 . Такие обозначения делают решение понятнее и помогают не перепутать стороны треугольника.

Связь площади и радиуса вписанной окружности

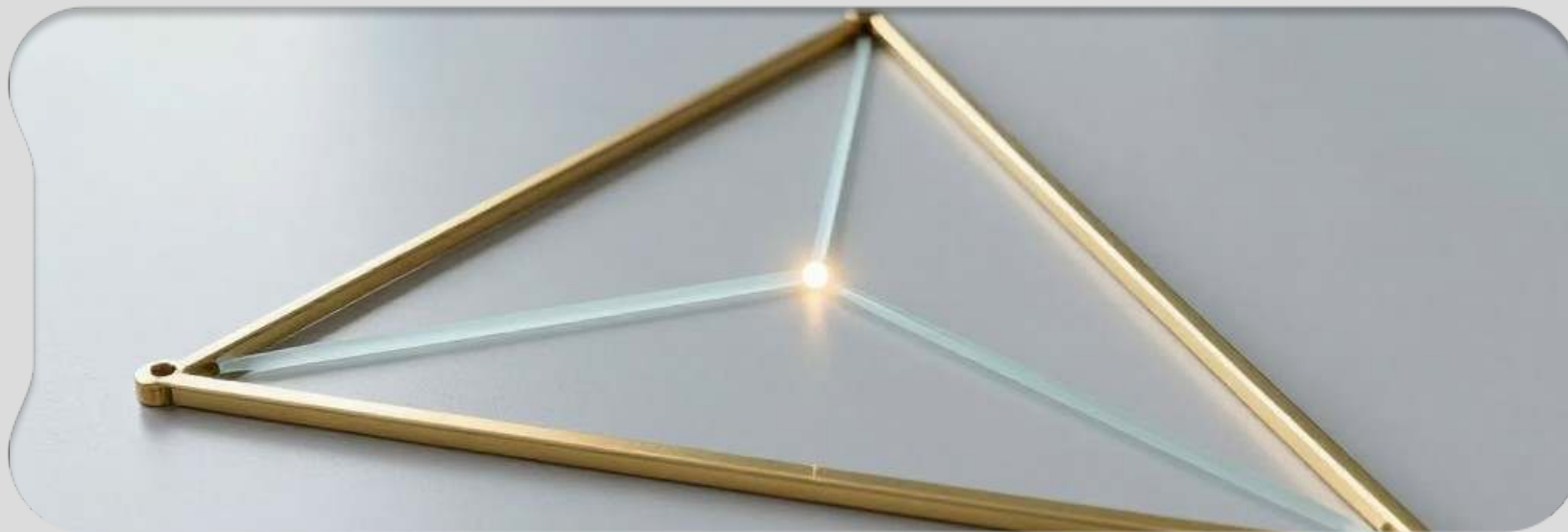


Математическая зависимость $S = pr$; схема построена на основе формулы для вписанной окружности.

При неизменном полупериметре p каждый дополнительный единичный шаг радиуса добавляет такую же долю площади.

График подтверждает прямую пропорциональность S и r : при фиксированном p зависимость линейная и легко проверяется в задачах.

Особый случай: равносторонний треугольник



Когда все высоты сходятся

В равностороннем треугольнике каждая сторона равна, поэтому все углы тоже одинаковые. Из-за полной симметрии биссектрисы, медианы и высоты проходят по одним и тем же линиям, а центр окружности оказывается строго в середине фигуры.

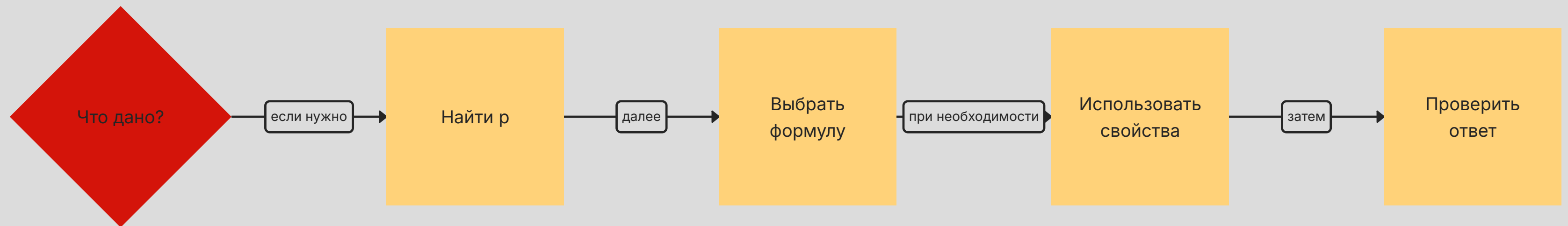


Формула становится короче

Для такой фигуры не нужно каждый раз искать площадь через отдельные построения. Радиус вписанной окружности выражается сразу через сторону: $r = a\sqrt{3}/6$. Это удобно в задачах, где известна только длина стороны и нужно быстро получить ответ.

Алгоритм решения задач на вписанную окружность

Последовательность действий при работе с радиусом, площадью и свойствами биссектрис



Типичные ошибки при решении задач

.01

Путают окружности

Иногда вписанную окружность смешивают с описанной. У них разные центры, разные касания и разные задачи, поэтому перед решением важно сразу определить, какая именно окружность нужна.

.02

Берут периметр вместо полупериметра

В формуле $r = S/p$ нужен именно полупериметр, а не весь периметр. Если подставить неверное значение, ответ получится вдвое меньше правильного и сразу исказит дальнейшие вычисления.

.03

Неверно строят центр

Для построения инцентра нужно проводить биссектрисы, а не медианы или высоты. Только биссектрисы пересекаются в точке, одинаково удаленной от всех сторон треугольника.

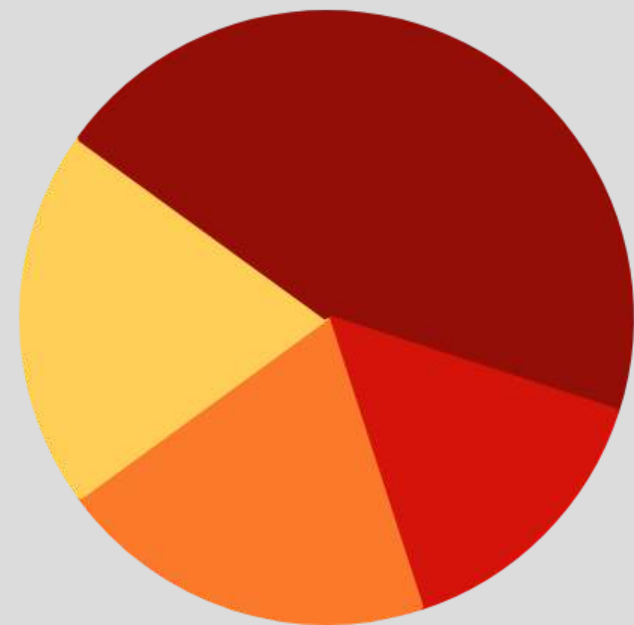
.04

Считают расстояние до вершины

Радиус вписанной окружности измеряется от центра до стороны, а не до вершины. Если помнить это правило, легче проверять рисунок и не перепутать радиус с другим отрезком.

Где встречается вписанная окружность

Школьная геометрия Черчение Архитектура Орнаменты и мозаики
Логотипы



Обобщение учебных и прикладных примеров использования вписанной окружности.

В задачах и проектах она помогает точно разместить центр фигуры и сохранить равные отступы от границ.

Диаграмма показывает, что идея вписанной окружности полезна не только в геометрии, но и в точных декоративных построениях.



4

получается
радиус
вписанной
окружности
в этом
треугольнике.

Этот пример удобен тем, что радиус находится только по сторонам: сначала находят полупериметр, затем площадь, а после — сам радиус.

Пример по формуле $r = S/p$
для треугольника со сторонами 13, 14 и 15.

Проверочные числовые примеры

Треугольник	Формула	r
6,6,6	$a\sqrt{3}/6$	$\sqrt{3}$
3,4,5	$(a+b-c)/2$	1
13,14,15	S/p	4

Короткая таблица помогает быстро сверить вычисления для разных типов треугольников и увидеть, как работают формулы в знакомых случаях.

Разные условия приводят к одному результату через разные формулы, поэтому полезно выбирать самый удобный способ вычисления.

Учебные примеры по теме вписанной окружности.

Замечательные точки треугольника



Инцентр

Это центр вписанной окружности. Он находится внутри треугольника и одинаково удален от всех его сторон, поэтому связан с точным построением окружности.



Центр описанной окружности

Эта точка равноудалена от вершин треугольника. Сравнение двух центров помогает увидеть, что разные окружности связаны с разными наборами равных расстояний.



Центр тяжести

Он получается как точка пересечения медиан. На чертеже он показывает, как распределяется «равновесие» фигуры и чем медианы отличаются от биссектрис.



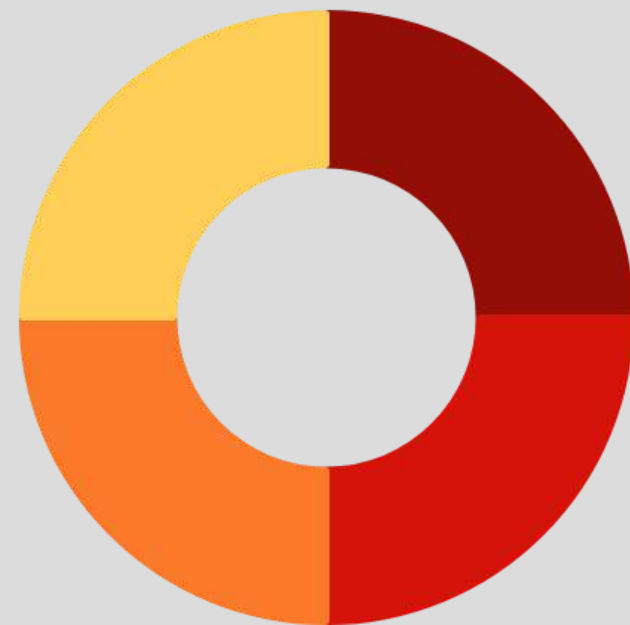
Ортоцентр

Это точка пересечения высот. Вместе с другими замечательными точками она помогает рассматривать треугольник как единую систему линий и центров.



Главные факты о вписанной окружности

- Касается всех сторон
- Инцентр — пересечение биссектрис
- Равные расстояния до сторон
- Формула $r = S/p$



Сводка основных свойств вписанной окружности из школьного курса геометрии.

К этим четырем фактам часто добавляют свойство равных касательных, которое удобно для поиска неизвестных отрезков.

Если помнить касание, инцентр, равные расстояния и формулу радиуса, можно решать большинство базовых задач без лишних построений.

Итоги: что нужно запомнить

Вписанная окружность объединяет построение, измерения и свойства треугольника в одну понятную схему. Если помнить биссектрисы, инцентр и формулу $r = S/p$, задачи становятся заметно проще.