

Радикальная ось двух окружностей: основная идея

Две окружности — одна точная прямая.



Зачем изучать радикальную ось в 9 классе

Эта тема соединяет знакомые понятия: окружность, расстояние, уравнение и чертёж. Она помогает быстро решать задачи, где важны точные вычисления и удобный способ сравнения двух окружностей.



Это ключевой ориентир: по знаку степени сразу видно положение точки относительно окружности.

0

***означает, что точка
лежит на окружности.***

Как выглядит радикальная ось на чертеже

Две окружности

На рисунке показывают две окружности с центрами и радиусами. Именно их сравнение приводит к появлению радикальной оси как новой линии на чертеже.

Одна прямая

Радикальная ось изображается прямой, проходящей там, где степени точек относительно обеих окружностей совпадают. Она может располагаться между окружностями или в стороне от них.

Полезные подписи

Чтобы чертёж был понятным, отмечают центры, точки пересечения и радиусы. Часто добавляют пометку о равных степенях, чтобы сразу видеть смысл построения.

Не обязательно касание

Важно не путать радикальную ось с касательной: эта прямая не обязана касаться окружностей и может не пересекать их вовсе.

Определение радикальной оси

1

Сравнение степеней

Радикальная ось состоит из всех точек плоскости, у которых степени относительно двух окружностей равны. Это и есть основная идея темы в одном точном утверждении.

2

Обозначения

Если окружности обозначить через ω_1 и ω_2 , то для любой точки M на радикальной оси выполняется равенство $S(M, \omega_1) = S(M, \omega_2)$.

3

Подходит для любых окружностей

Определение работает не только для пересекающихся окружностей, но и для касающихся, а также для тех, у которых нет общих точек.

4

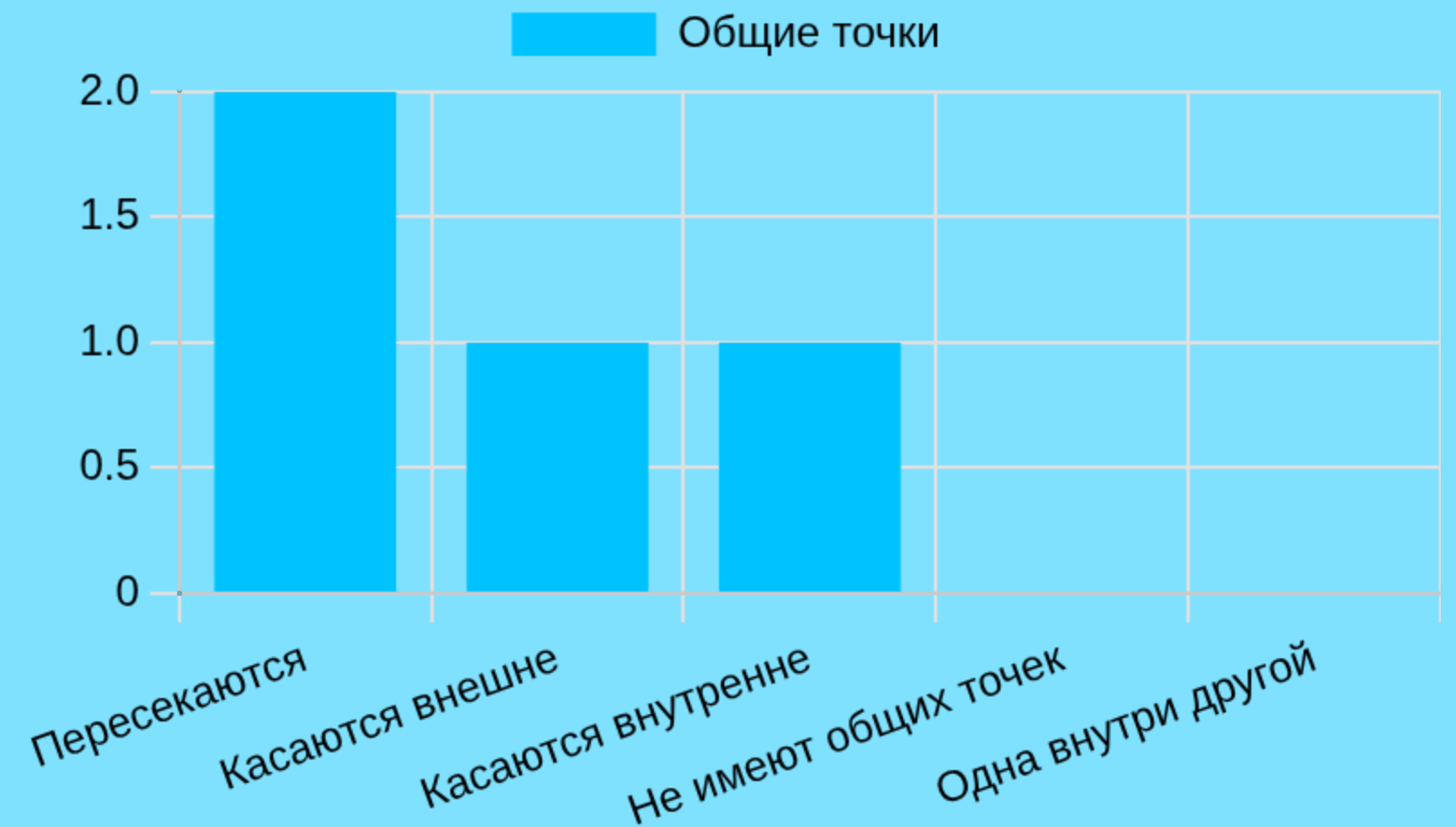
Геометрический смысл

Из равенства степеней возникает одна прямая, которая помогает заменить сложный рисунок удобным алгебраическим соотношением.

Положение радикальной оси при разных случаях

Число общих точек помогает быстро ориентироваться, но не заменяет проверку степеней точек. Именно это равенство определяет радикальную ось в каждом случае.

Во всех ситуациях радикальная ось существует как прямая; при пересечении она совпадает с общей хордой.



Главное свойство точек радикальной оси

1

Равенство степеней

Если точка M лежит на радикальной оси, то её степень относительно первой окружности равна степени относительно второй. Это главный признак принадлежности точки к оси.

2

Запись через центры

На практике это означает равенство выражений $MO_1^2 - r_1^2$ и $MO_2^2 - r_2^2$. Так удобнее переводить геометрическую задачу в алгебраическое уравнение.

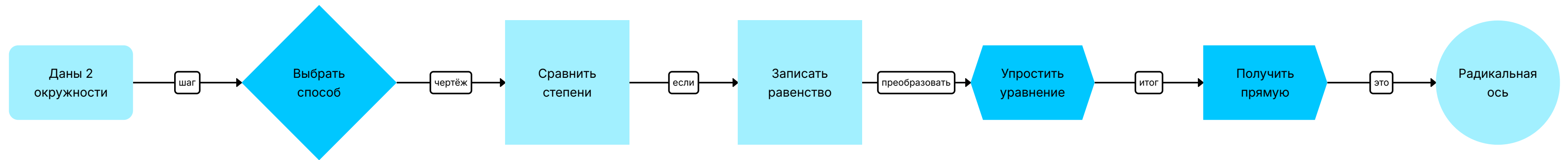
3

Применение в задачах

С помощью этого свойства находят расстояния, проверяют построения и выясняют, лежит ли точка на радикальной оси без лишних измерений на чертеже.

Как построить радикальную ось

Последовательность шагов при работе с двумя окружностями



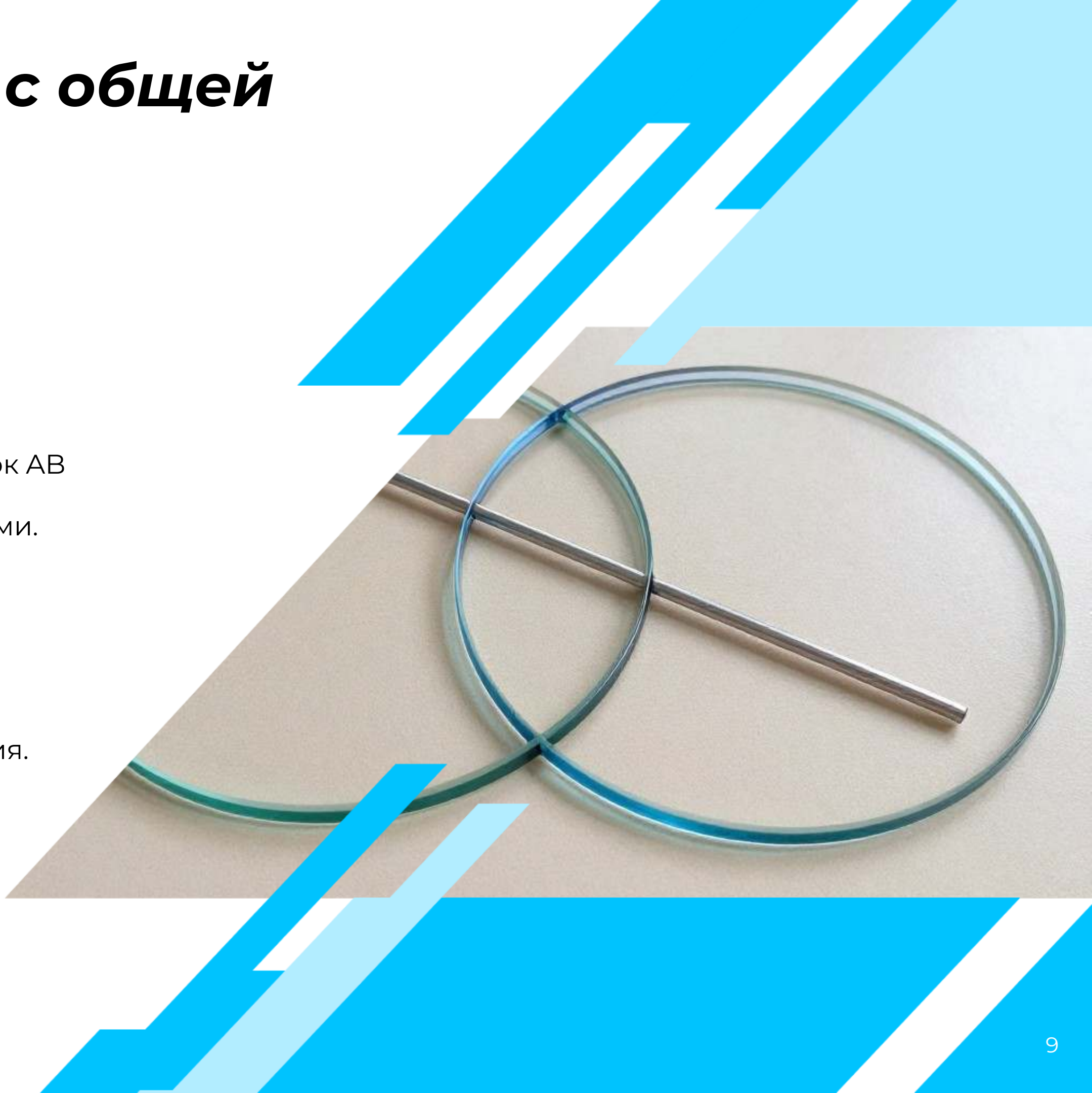
Связь радикальной оси с общей хордой

Две точки пересечения

Если окружности пересекаются в точках А и В, то отрезок АВ соединяет обе общие точки. Через них проходит единственная прямая, связанная с обеими окружностями.

Совпадение с осью

Для пересекающихся окружностей эта прямая и есть радикальная ось. Поэтому её можно определить сразу по двум точкам пересечения, без отдельного построения.



Сравнение взаимного положения двух окружностей

Таблица показывает, как меняется радикальная ось в зависимости от числа общих точек и расположения окружностей.

Радикальная ось определяется не числом пересечений, а равенством степеней точек; при пересечении она совпадает с общей хордой.

Случай	Общих точек	Положение оси
Пересекаются	2	Общая хорда
Касаются	1	Через касание
Без общих точек	0	Отдельная прямая
Одна внутри другой	0	Не пересекает

Почему радикальная ось всегда прямая

1. Уравнение окружности

Окружность в координатах записывается через квадраты x и y . Поэтому при сравнении двух окружностей в выражениях сразу появляются одинаковые квадратичные части.

2. Вычитание уравнений

Если одно уравнение вычесть из другого, члены x^2 и y^2 сокращаются. Остаётся равенство без квадратов, которое описывает не кривую, а прямую.

3. Итог

Эта прямая и есть радикальная ось. Она существует даже тогда, когда окружности не пересекаются, потому что определяется равенством степеней точек, а не общими точками.

Уравнения окружностей на координатной плоскости

1

Центр и радиус

Окружность с центром (a, b) и радиусом r задаётся уравнением $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. В нём сразу видны координаты центра и длина радиуса.

2

Вторая окружность

Для второй окружности записывают такое же уравнение, но с другими координатами центра и другим радиусом. Так можно сравнивать две окружности в одной системе координат.

3

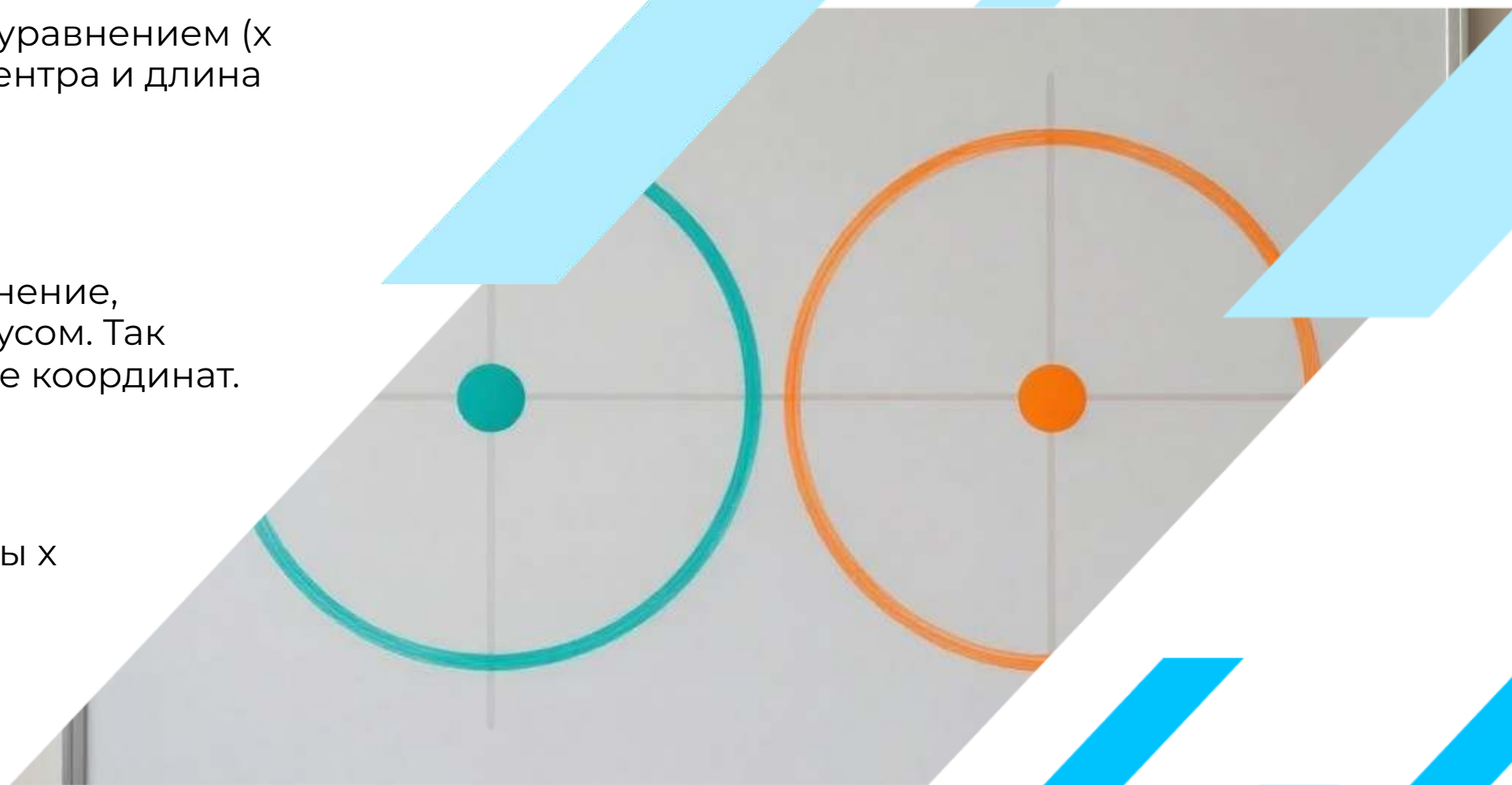
Вычитание записей

Если вычесть одно уравнение из другого, квадраты x и y сокращаются. Остаётся линейное равенство, которое уже не описывает окружность, а задаёт прямую.

4

Графический смысл

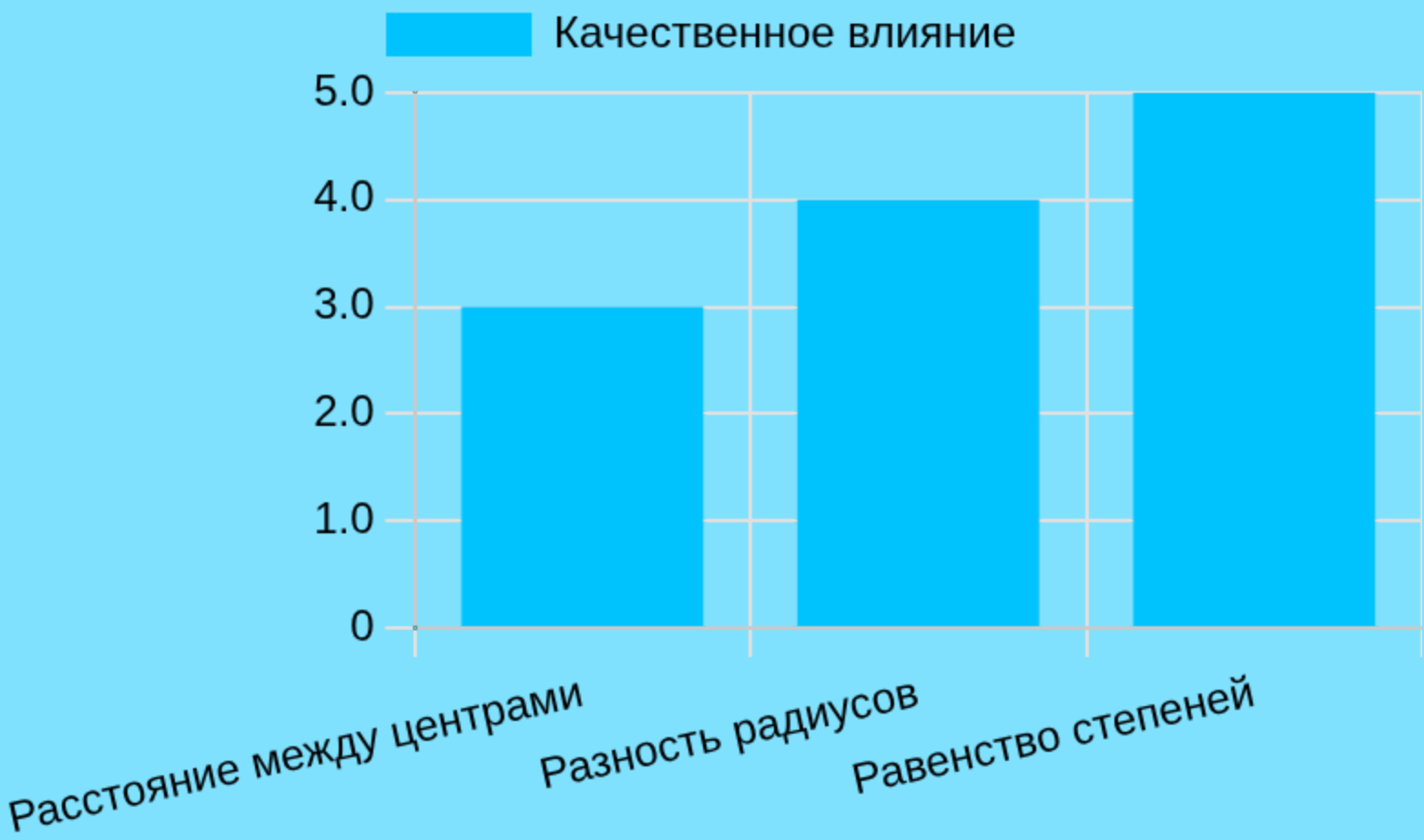
На рисунке удобно показать обе окружности, их центры и получившуюся прямую. Так видно, что радикальная ось появляется как результат точного алгебраического сравнения.



От чего зависит положение радикальной оси

Схема показывает не измерения, а логические факторы, которые определяют положение прямой. На практике они учитываются одновременно, а не по отдельности.

Чем заметнее различаются радиусы и взаимное положение центров, тем сильнее смещается радикальная ось. Главный критерий остаётся одним: равенство степеней точек.



Учебная схема по теме «Радикальная ось двух окружностей»; значения на диаграмме — условная качественная оценка

Радикальный центр трех окружностей

1

Три попарные оси

Для трёх окружностей строят три радикальные оси: для первой и второй, второй и третьей, первой и третьей. Каждая из них сравнивает степени точек только двух окружностей.

2

Одна общая точка

Если две радикальные оси пересекаются, их точка пересечения имеет одинаковую степень сразу относительно всех трёх окружностей. Это и есть радикальный центр.

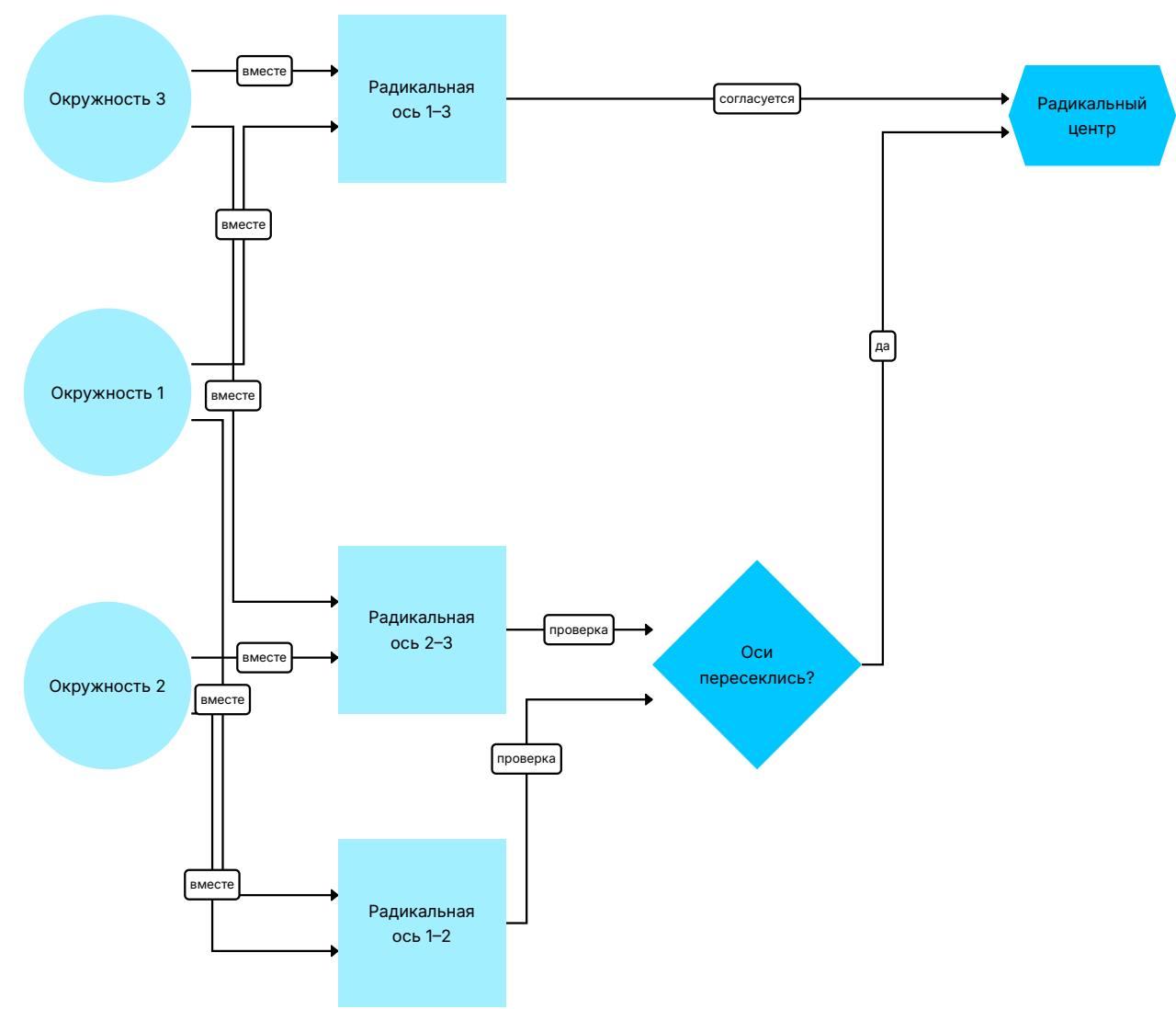
3

Полезное свойство

Радикальный центр помогает решать задачи, где окружностей больше двух. Вместо долгих вычислений достаточно найти общую точку двух осей и проверить третью связь.

Как связаны три радикальные оси

Построение попарных радикальных осей и поиск общей точки для трёх окружностей



Задачи, где радикальная ось помогает в вычислениях



Уравнения прямых

В координатной геометрии радикальную ось часто находят через вычитание двух уравнений окружностей. Это быстро даёт уравнение прямой без дополнительных построений.



Поиск расстояний

Если известны центры и радиусы, через степень точки можно выразить нужные отрезки. Так удобнее находить расстояния в задаче, не рисуя много вспомогательных линий.



Координаты точек

Радикальная ось помогает определить координаты точки, которая равноудалена по степени от двух окружностей. После этого задачу можно продолжить обычными алгебраическими способами.



Проверка чертежа

На рисунках радикальная ось служит ориентиром для проверки: правильно ли расположены окружности, есть ли общая хорда и не допущена ли ошибка в построении.

Основные термины темы



Термин	Смысл
Степень точки	Сравнение с окружностью
Радикальная ось	Равные степени
Общая хорда	Хорда двух окружностей
Радикальный центр	Общая точка трёх осей

Короткие определения помогают не путать геометрические объекты и быстрее решать задачи.

Все термины объединены одной идеей: сначала сравнивают степени точек, а затем по этому признаку находят прямую, хорду или центр.



Типичные ошибки при изучении темы

Путают с касательной

Радикальная ось не обязана касаться окружности. Она может проходить между ними, пересекать плоскость далеко от фигур или совпадать с общей хордой, если точки пересечения есть.

Сбиваются со знаками

При вычитании уравнений легко потерять минус или неправильно раскрыть скобки. Из-за этого получается неверная прямая, хотя идея решения была правильной.

Не учитывают все случаи

Иногда считают, что радикальная ось бывает только у пересекающихся окружностей. На самом деле она существует и тогда, когда общих точек нет.

Смотрят только на чертёж

Внешний вид рисунка может обманывать. Правильный ориентир — равенство степеней точек, а не то, как далеко окружности расположены друг от друга.

Короткий пример применения радикальной оси

1

Записать уравнения

Сначала берут два уравнения окружностей, заданных на координатной плоскости. Это даёт возможность работать не только с рисунком, но и с точными алгебраическими выражениями.

2

Вычесть одно из другого

После вычитания квадратичные части сокращаются, и получается уравнение первой степени. Его график — прямая, которая и является радикальной осью.

3

Использовать результат

Найденная прямая помогает быстрее определить общую хорду, проверить взаимное положение окружностей и сократить вычисления по сравнению с полным геометрическим построением.

Главная идея радикальной оси

Радикальная ось показывает, как две окружности можно связать одной прямой через степень точки. Этот приём упрощает построения, вычисления и поиск радикального центра.

