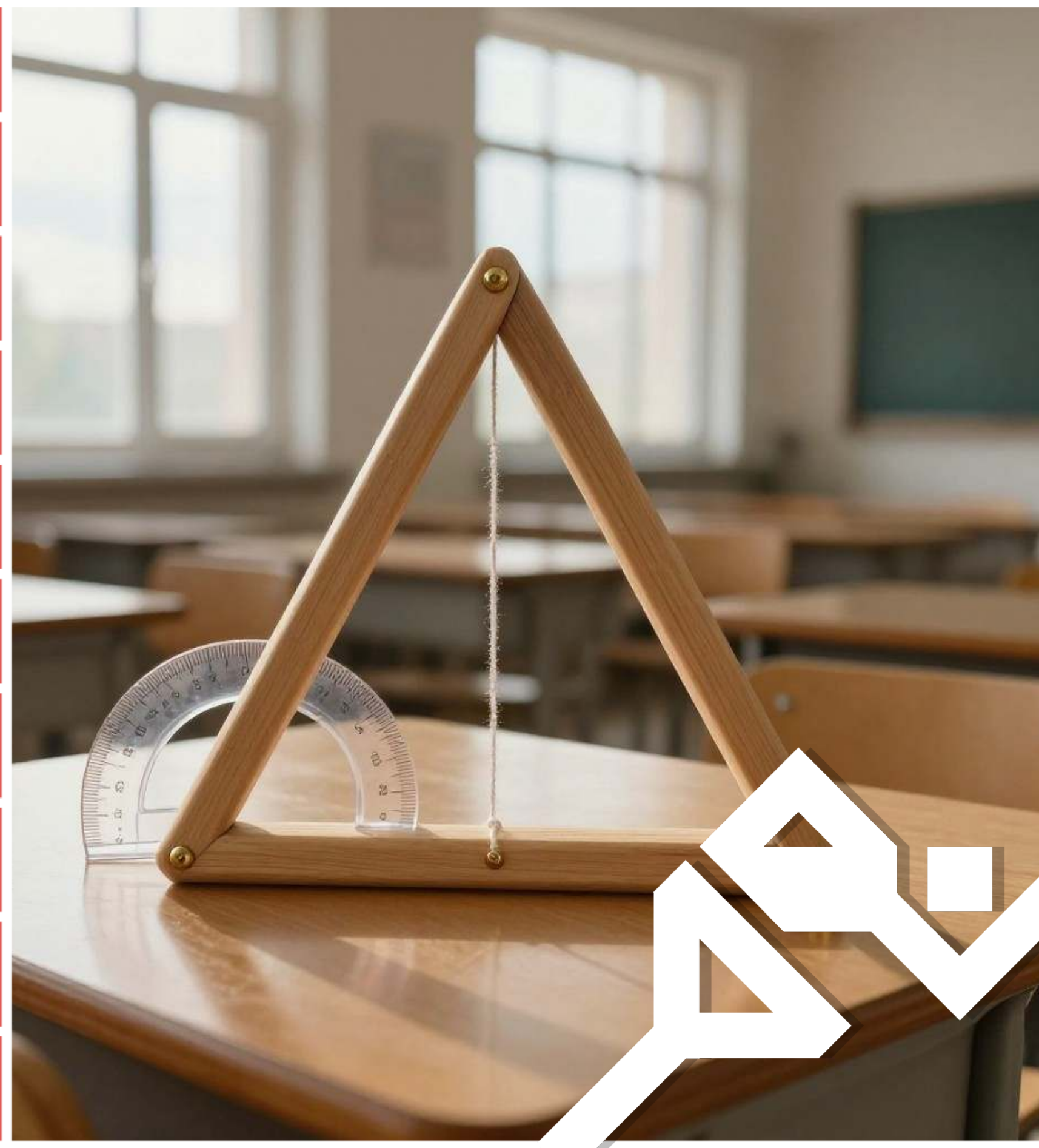


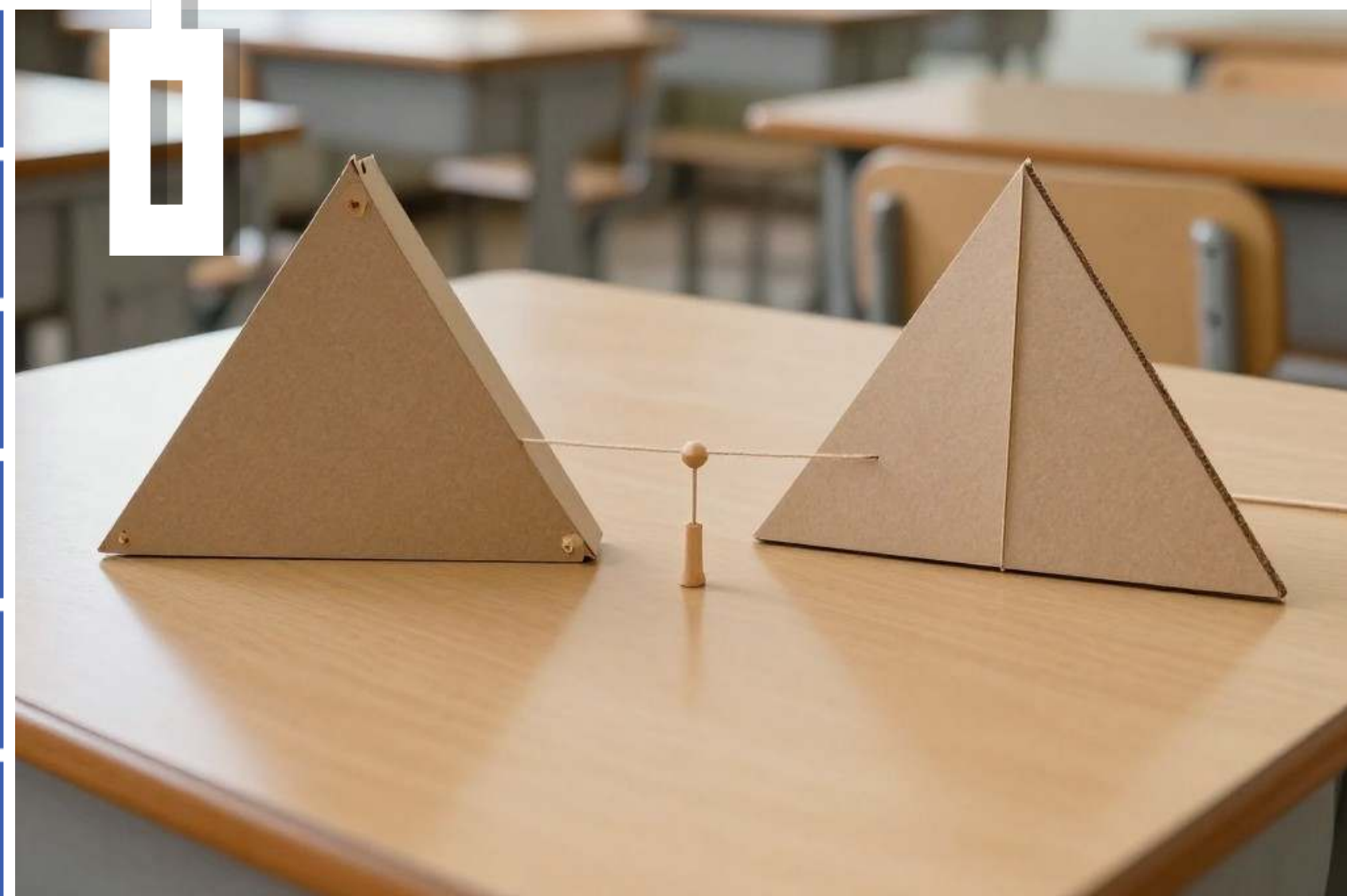
Тригонометрические функции и теоремы синусов и косинусов

Углы, стороны и точные расчёты в одной
теме.

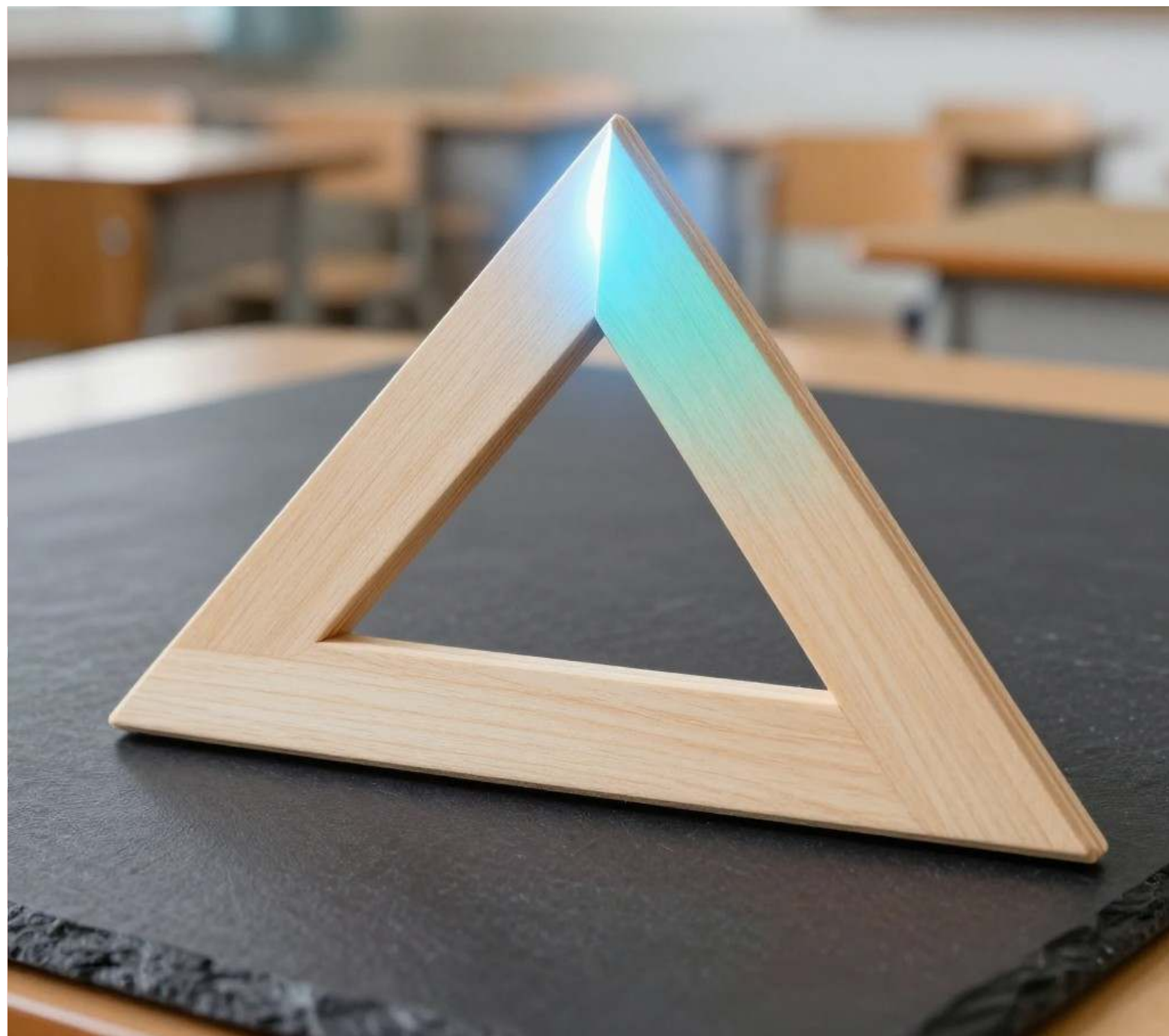


От прямоугольного треугольника к любому треугольнику

Сначала тригонометрия учит находить отношения сторон в прямоугольном треугольнике. Затем теоремы синусов и косинусов расширяют эти идеи на любой треугольник и помогают решать более общие геометрические задачи.



Синус и косинус острого угла



Синус угла

Синус острого угла показывает, какую часть гипотенузы составляет противолежащий катет. Это отношение остаётся тем же для любых подобных прямоугольных треугольников с одинаковым углом.

Косинус угла

Косинус острого угла равен отношению прилежащего катета к гипотенузе. Он тоже зависит только от величины угла и не меняется при изменении размеров треугольника.

Один и тот же угол

Если угол одинаковый, значения $\sin$ и $\cos$ будут одинаковыми в любом подходящем треугольнике. Поэтому тригонометрические функции описывают именно угол, а не конкретный чертёж.

Тангенс и его смысл

1

Определение тангенса

Тангенс угла можно выразить через синус и косинус: $\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$. В прямоугольном треугольнике это также отношение противолежащего катета к прилежащему.

2

Что он показывает

Тангенс удобно использовать, когда нужно оценить наклон или крутизну. Чем больше его значение, тем сильнее отклонение линии от горизонтального направления.

3

Практический смысл

Эта функция помогает сравнивать углы, записывать уклоны и описывать подъёмы в задачах. Поэтому её часто используют в геометрии и прикладных измерениях.

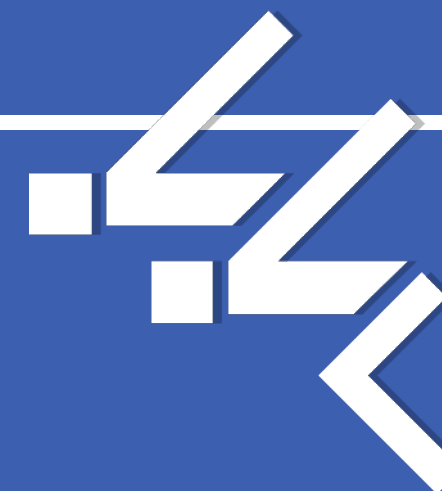
4

Когда не определён

Если $\cos \alpha$ равен нулю, делить на него нельзя, значит $\tan \alpha$ не существует. Такой случай важно помнить, чтобы не делать ошибку в вычислениях.



Едини́чная окру́жность и знаки тригонометрических функций



Координата x

На единичной окружности абсцисса точки показывает значение $\cos \alpha$. Поэтому по положению точки сразу видно, в какой части окружности косинус положителен или отрицателен.

Координата y

Ордината точки соответствует $\sin \alpha$. Это удобно: достаточно посмотреть, выше или ниже оси находится точка, чтобы определить знак синуса.

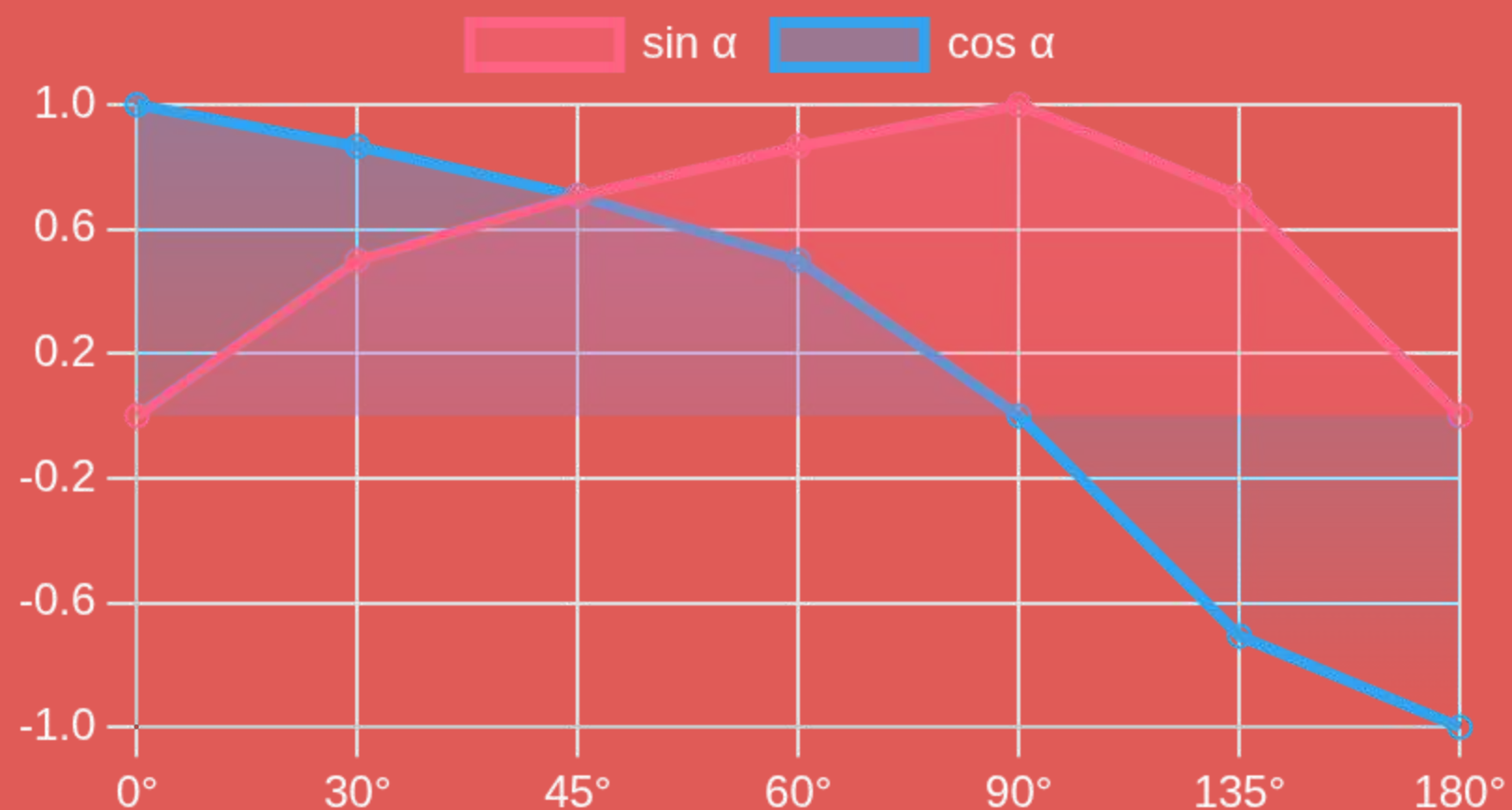
Первая и вторая четверти

В I четверти оба значения положительные. Во II четверти синус остаётся положительным, а косинус становится отрицательным, потому что точка находится левее оси Oy .

Третья и четвёртая четверти

В III четверти отрицательны и $\sin \alpha$, и $\cos \alpha$. В IV четверти косинус положителен, а синус отрицателен, что помогает быстро проверять ответы.

Как изменяются $\sin$ и $\cos$ при увеличении угла



Школьные значения тригонометрических функций для углов 0° – 180°

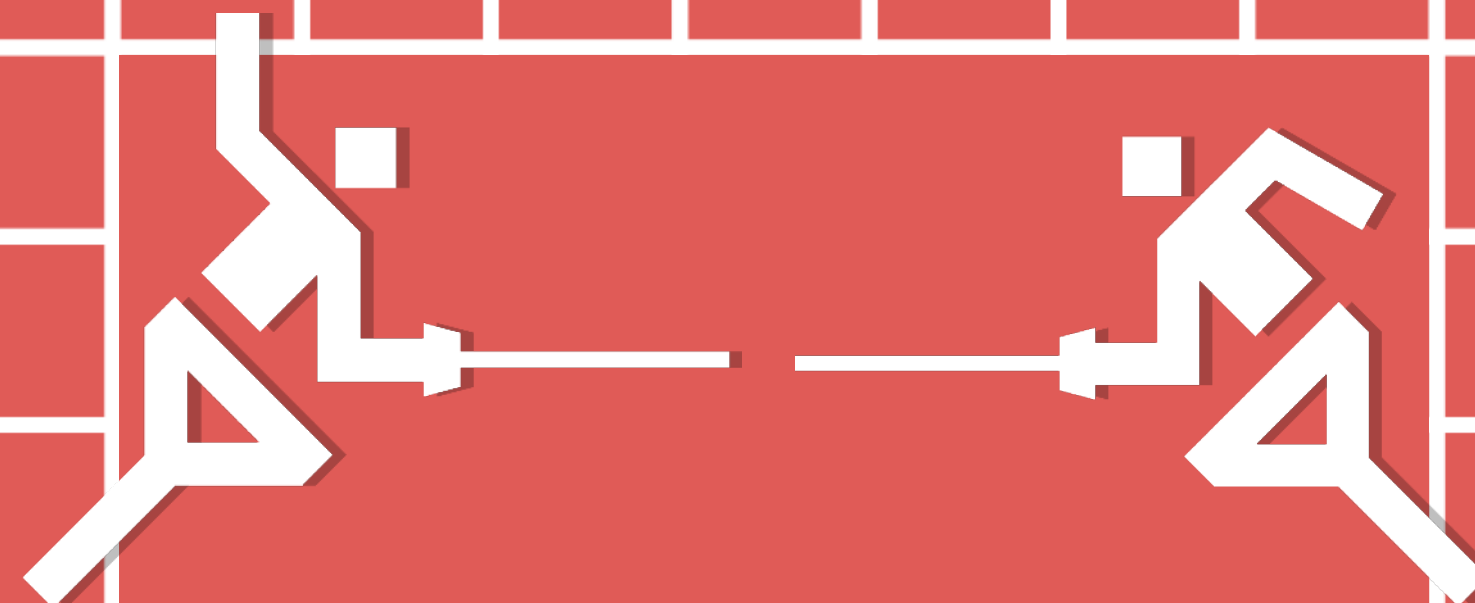
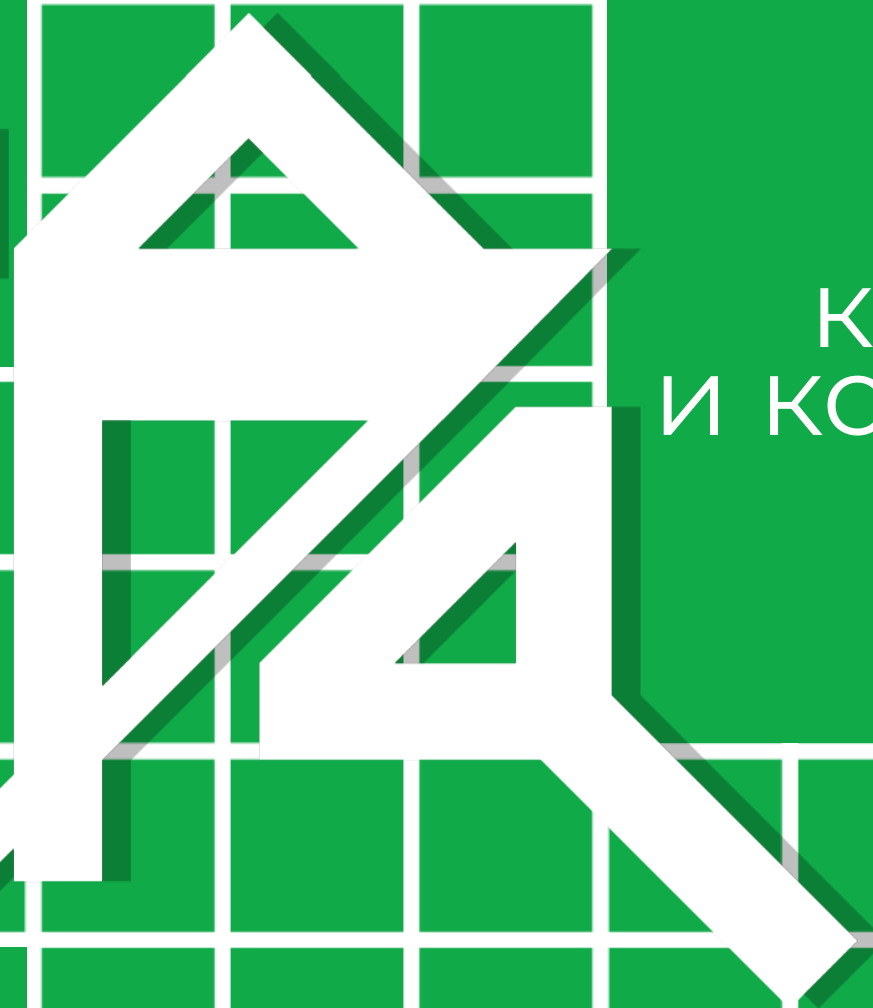


График помогает увидеть, как две функции ведут себя по-разному на одном и том же промежутке углов.

Синус растёт до 90° , а косинус убывает и после 90° становится отрицательным.

Это тождество удобно для проверки
вычислений и вывода неизвестной
функции, когда известна другая.



1
такова сумма
квадратов синуса
и косинуса для любого
угла

Основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Значения sin, cos и tan для углов 30°, 45° и 60°



Эти стандартные значения нужно знать,
чтобы быстро решать задачи
без калькулятора.

Углы 30°, 45° и 60° образуют самый часто
используемый набор в школьной
геометрии.

Угол	sin	cos	tan
30°	1/2	√3/2	1/√3
45°	√2/2	√2/2	1
60°	√3/2	1/2	√3

Таблица основных значений тригонометрических функций

Когда применяется теорема синусов

1

Известна сторона и угол

Теорема синусов особенно полезна, когда дана сторона треугольника и противолежащий ей угол. Тогда можно найти другие элементы через пропорцию между сторонами и синусами углов.

2

Две стороны и угол

Если известны две стороны и один угол, теорема синусов иногда позволяет продолжить решение без перехода к другой формуле. Главное — правильно сопоставить сторону с её противолежащим углом.

3

Нахождение расстояний

Формула помогает в задачах, где прямое измерение невозможно: например, до объекта, который стоит далеко. В таких случаях удобнее измерить базу и углы наблюдения.

4

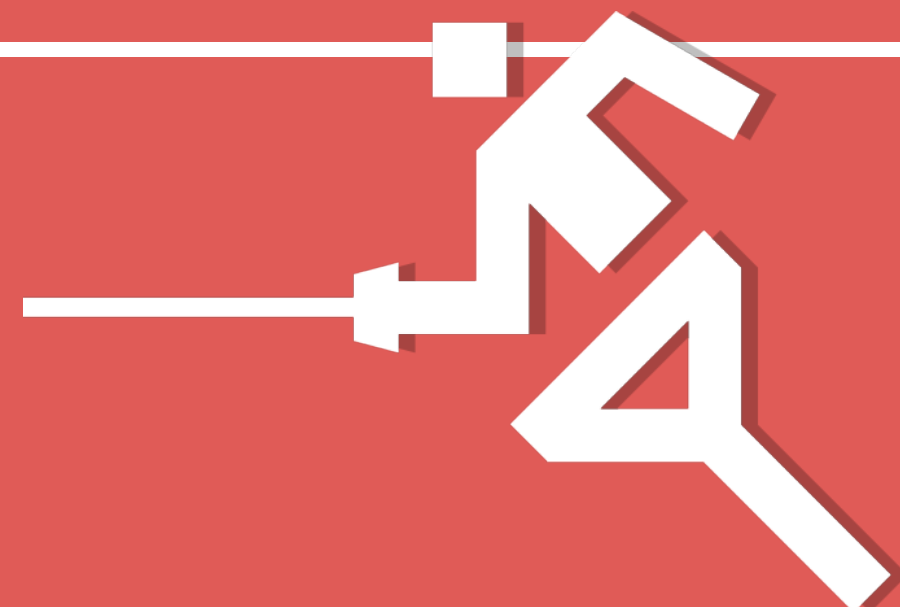
Сравнение элементов

Отношения в теореме синусов позволяют сравнивать элементы одного треугольника между собой. Это делает формулу удобной не только для вычислений, но и для анализа рисунка.



Как применять теорему синусов

Последовательность решения задачи по известным сторонам и углам



Теорема синусов позволяет найти
неизвестную сторону по известной
стороне и двум углам.



$8\sqrt{3}$ см
такой получается
длина стороны b
в приведённом
примере.

Учебный пример по теме

Случай двух решений в теореме синусов



1 Почему возникает два ответа

Если известны сторона, противолежащий ей угол и ещё одна сторона, вершину можно расположить двумя способами. Поэтому исходные данные иногда задают не один, а два возможных треугольника.



2 Что нужно проверить

Чтобы не ошибиться, сравнивают длины сторон с высотой, опущенной из вершины. Если возможны оба положения вершины, нужно отдельно рассмотреть каждый треугольник и проверить условия задачи.



3 Как не потерять решение

В задачах вида SSA полезно делать аккуратный чертёж и отмечать, какие углы и стороны уже известны. Это помогает вовремя заметить неоднозначность и не исключить верный вариант.



Теорема косинусов как обобщение теоремы Пифагора

1 Связь трёх сторон

Теорема косинусов соединяет все стороны треугольника с углом между двумя из них. Она особенно полезна, когда прямого угла нет и привычной формулы Пифагора уже недостаточно.

2 Переход к Пифагору

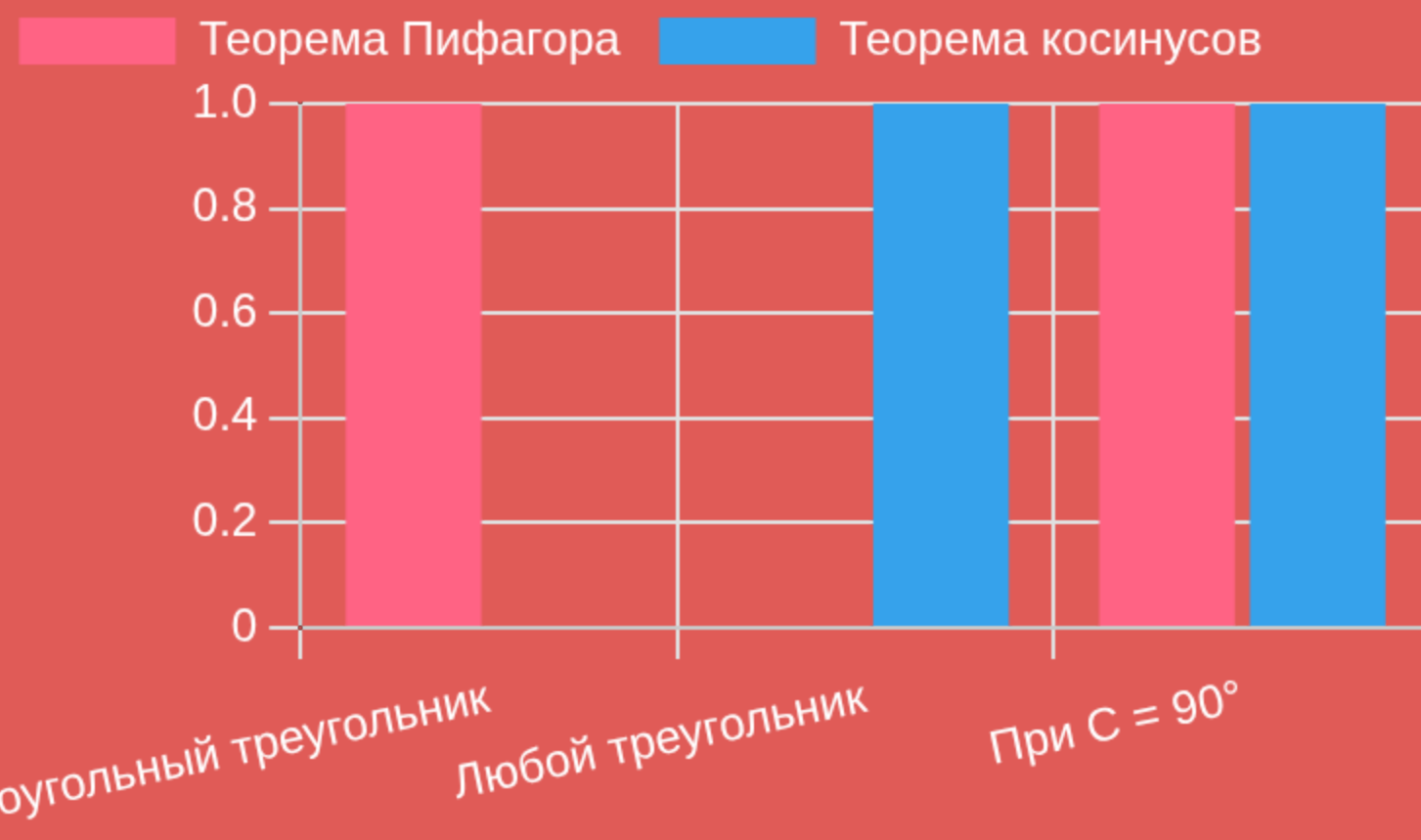
Если угол между сторонами равен 90° , косинус этого угла становится равным нулю. Тогда дополнительное слагаемое исчезает, и остаётся знакомая формула для прямоугольного треугольника.

3 Универсальность формулы

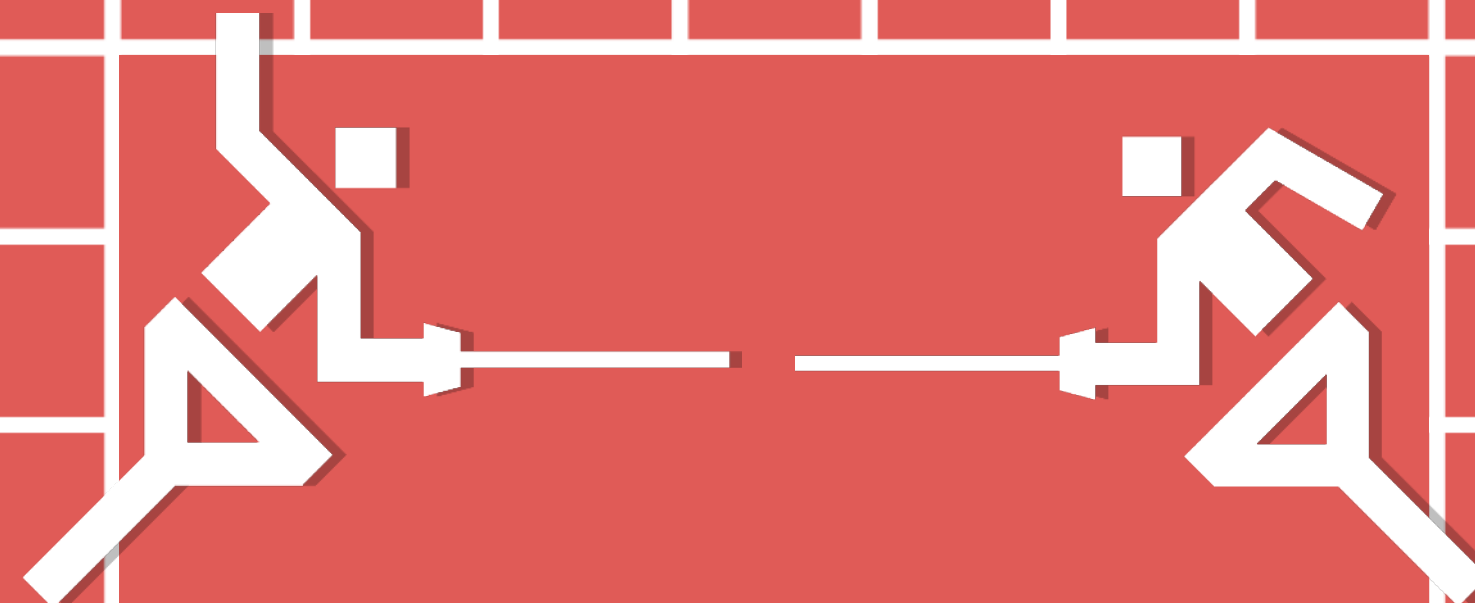
Благодаря этому теорема косинусов подходит для любых треугольников. Она помогает находить неизвестную сторону, а затем использовать найденный результат для вычисления углов по другим данным.



Сравнение теоремы Пифагора и теоремы косинусов



Школьный курс геометрии



Обе формулы связаны с одними и теми же сторонами, но используются в разных ситуациях.

Теорема косинусов охватывает больше случаев и при прямом угле переходит в теорему Пифагора.

Как выбрать формулу для решения треугольника



Дано	Формула	Действие
2 стороны + угол	Косинусы	Найти сторону
Сторона + угол	Синусы	Найти вторую
3 стороны	Косинусы	Найти угол

Таблица помогает быстро сопоставить условие задачи с подходящей формулой.

Выбор формулы зависит от того, какие элементы треугольника уже известны и что требуется найти.

Примеры измерений в реальной жизни

Ширина реки без переправы

На берегу отмечают две точки наблюдения и измеряют расстояние между ними. Затем с каждой точки снимают углы на противоположный берег, а дальше считают неизвестную ширину по треугольнику.



Высота башни издалека

От основания выбранного отрезка измеряют углы подъёма к вершине башни. После этого тригонометрические формулы позволяют найти высоту, даже если подойти вплотную нельзя. Такой способ часто используют в геодезии.

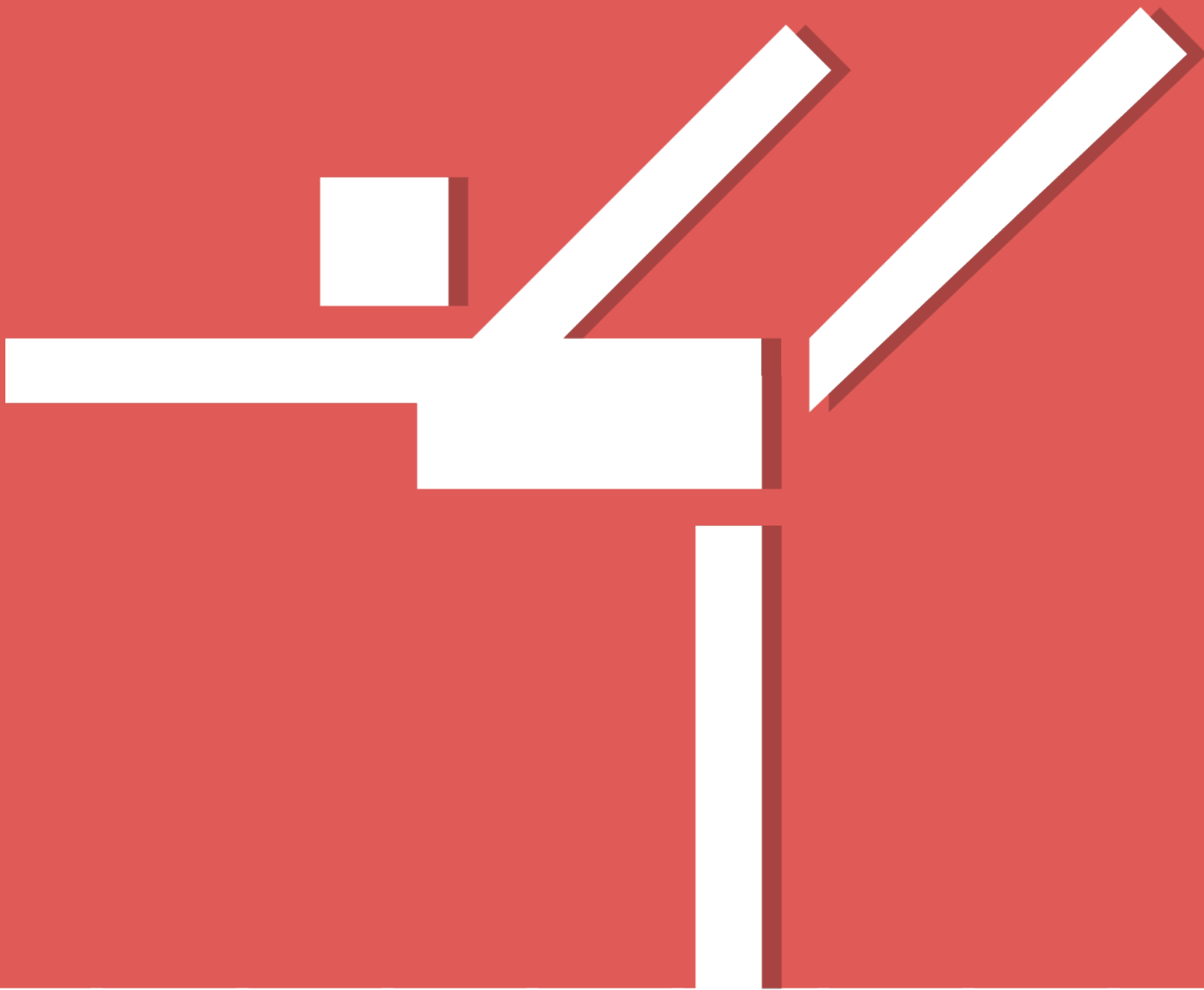


Навигация и ориентирование

Корабль, самолёт или дрон могут определить положение объекта по известной базе и углам наблюдения. На схеме получается треугольник, где вычисления помогают понять, насколько далеко находится цель.



Типичные ошибки при решении задач



Путают стороны

Часто учащиеся берут не тот катет или не ту сторону напротив угла. Перед вычислением нужно ещё раз подписать рисунок и проверить, какие элементы действительно противолежат выбранному углу.

Выбирают лишнюю формулу

Иногда теорему синусов применяют там, где удобнее теорема косинусов, и наоборот. Правильный выбор зависит от того, какие данные даны в условии и что требуется найти.

Подставляют неверный угол

Ошибки возникают, когда вместо нужного угла берут соседний или внешний. Особенно важно проверить, к какой стороне относится угол, чтобы не получить бессмысленный ответ.

Забывают про единицы

Длины нужно записывать в одних и тех же единицах, а углы — в градусах, если в задаче не сказано иначе. Несогласованность единиц часто приводит к неверному результату.

Не проверяют ответ

После вычисления полезно посмотреть на чертёж и сравнить, похож ли результат на реальный. Если сторона оказалась слишком большой или угол не соответствует рисунку, значит, где-то допущена ошибка.

Связь с другими разделами математики



Алгебраические выражения

Тригонометрические формулы часто преобразуют так же, как обычные алгебраические выражения. Это развивает навык упрощения, раскрытия скобок и аккуратной работы с равенствами.



Графики функций

Синус и косинус изучают через графики, где видно изменение значений при росте угла. Такой подход помогает понимать периодичность и сравнивать форму кривых.



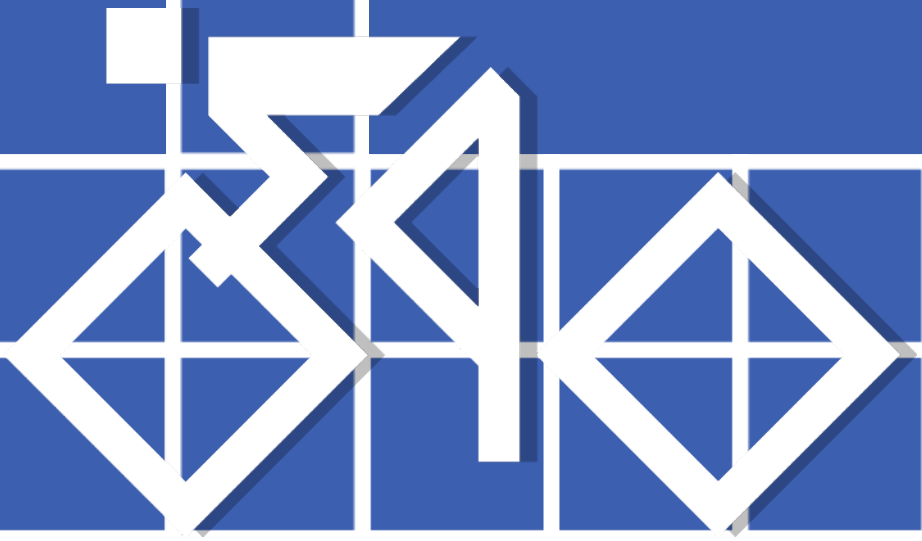
Координаты точек

На координатной плоскости синус и косинус связаны с положением точки на окружности. Это помогает находить координаты, определять знаки функций и читать геометрическую картину.



Применение в науках

В старших классах тригонометрия нужна в физике, информатике и инженерных расчётах. Она описывает колебания, вращение и позволяет моделировать реальные процессы через числа и формулы.

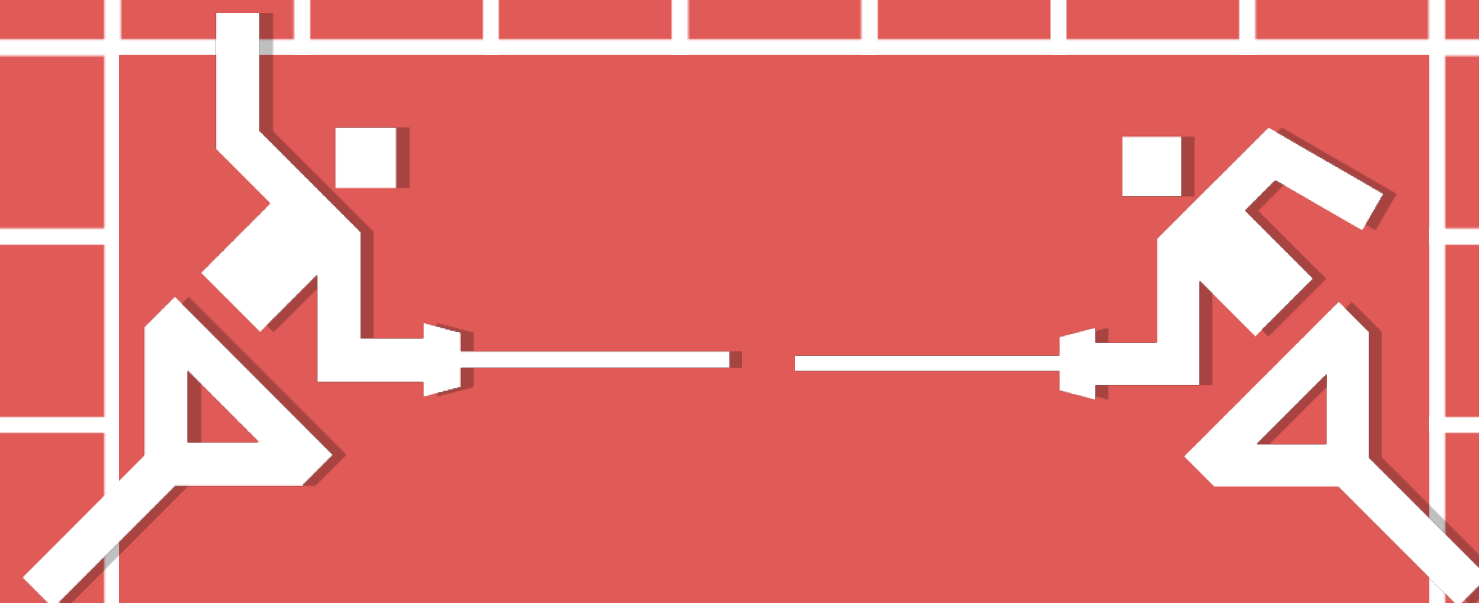


Где применяются тригонометрические функции и теоремы

Геодезия Строительство Навигация
Физика Компьютерная графика Музыка



Иллюстративная схема по теме



На схеме показаны области, где
тригонометрия помогает описывать
движение, форму и расстояния.

Тригонометрия полезна там, где
нужно связать угол, направление
и размер объекта.

Главное, что нужно запомнить

Синус, косинус и тангенс описывают связь углов и сторон, а теоремы синусов и косинусов расширяют эти идеи на любой треугольник. Вместе они делают геометрию удобной для точных вычислений.

