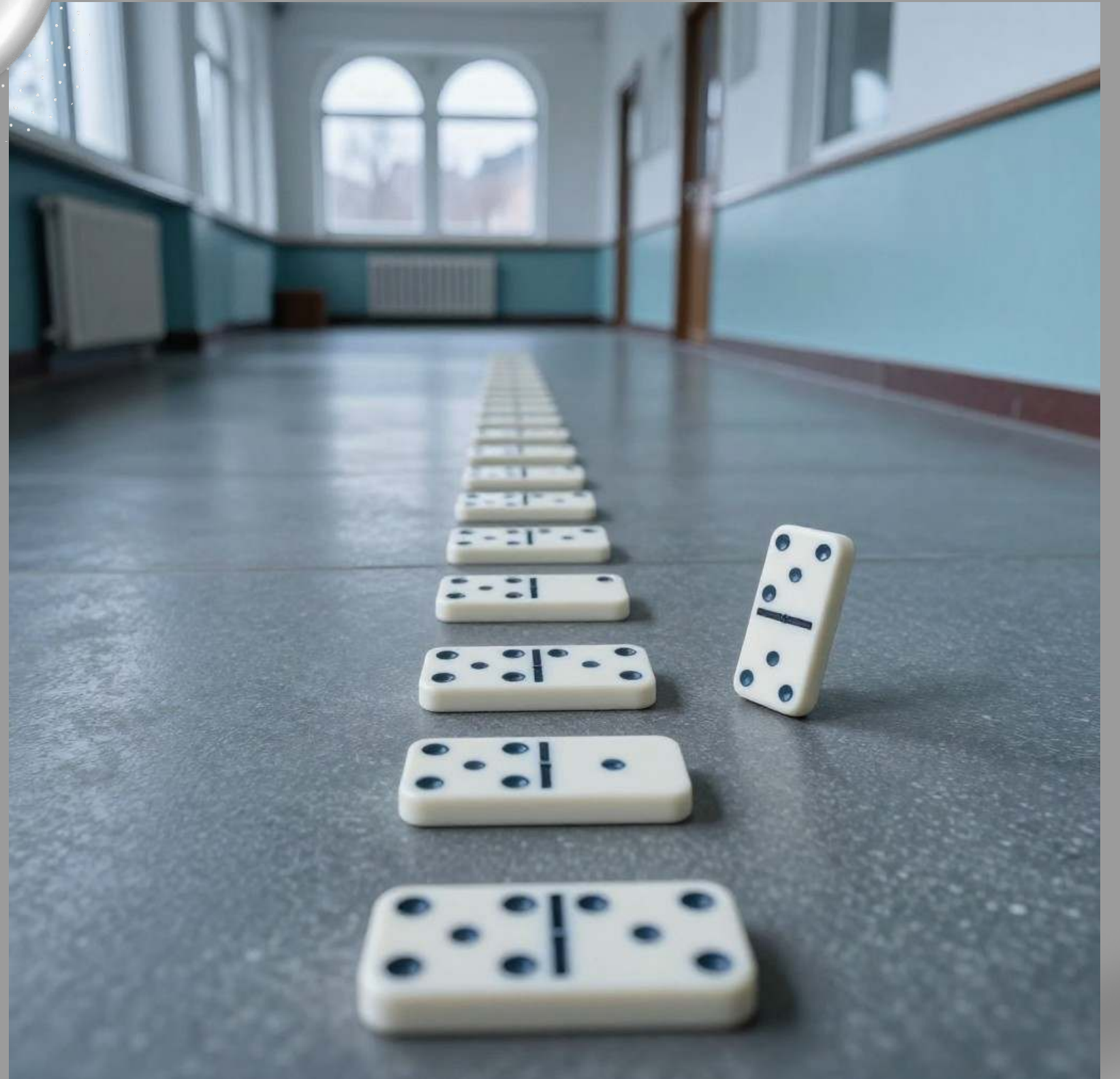


Полная и неполная математическая индукция

Доказательство через базу и переход от случая к случаю.

Зачем нужна индукция

Индукция особенно полезна там, где утверждение повторяется для каждого натурального n : в формулах, оценках, делимости и рекурсиях. Один надёжный шаг позволяет распространить истину на всю последовательность.



Обозначения и язык утверждений

3

P

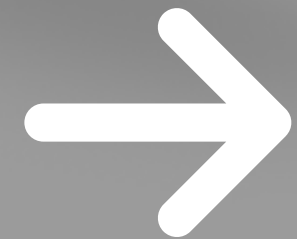
Обозначение $P(n)$

Пишут $P(n)$, когда нужно доказать утверждение, зависящее от натурального числа n . Так удобно фиксировать формулу, неравенство или свойство, которое проверяется для каждого значения отдельно.

$\frac{1}{2}$

Область чисел

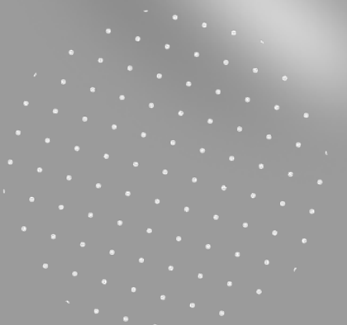
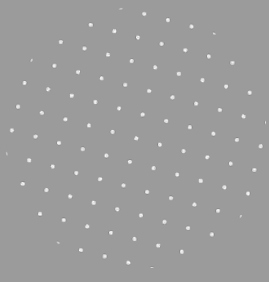
Натуральные числа образуют последовательность с началом в 1 или в 0 — это зависит от принятого соглашения. Важно заранее указать, от какого n начинается рассуждение.



Шаг доказательства

Любое доказательство по индукции состоит из базы и перехода. Сначала проверяют первый случай, затем показывают, что истинность для k ведёт к истинности для $k+1$.

Полная математическая индукция: идея и формула



1

1. База

Сначала устанавливают, что утверждение верно для начального значения n_0 . Без этого цепочка не запускается, даже если переход между соседними случаями сформулирован правильно.

2

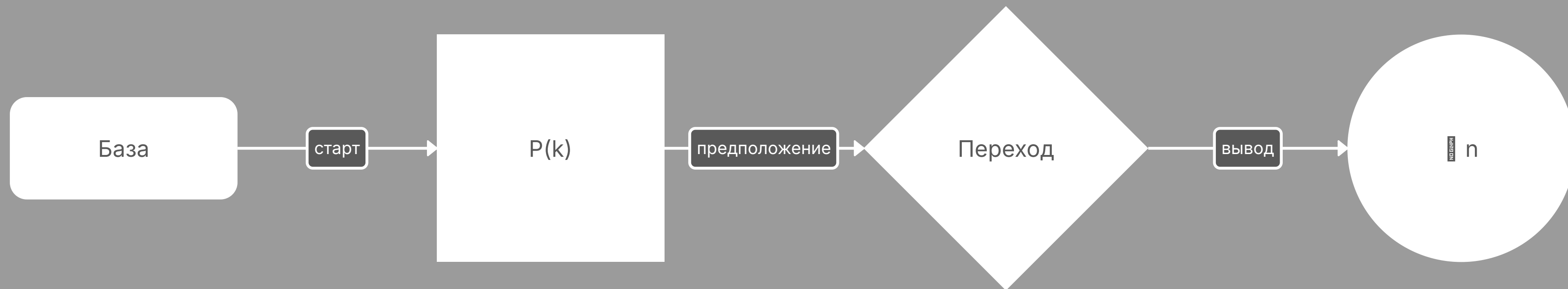
2. Переход

Затем предполагают, что $P(n)$ верно для всех n от n_0 до k , и из этого выводят $P(k+1)$. Именно эта опора на всю накопленную часть и делает индукцию полной.

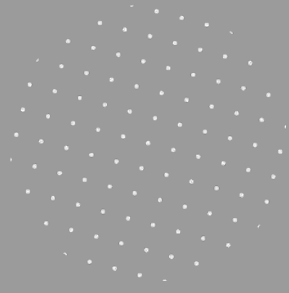
Как выглядит доказательство по шагам

Логика стандартного доказательства по индукции

5



Пример 1: сумма первых натуральных чисел



1

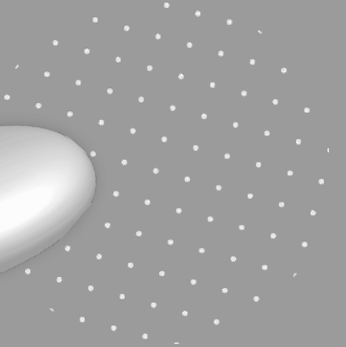
Проверка базы

При $n = 1$ формула даёт $1 = 1$, поэтому стартовое значение проверяется сразу и без преобразований. Это подтверждает корректность базы индукции.

2

Индукционное предположение

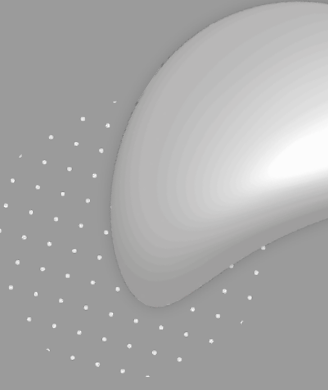
Предполагают, что $1 + 2 + \dots + k = k(k+1)/2$. Это индукционное предположение становится точкой опоры для следующего шага и позволяет продолжить вычисление.



3

Переход

Добавляя число $k+1$, получаем $k(k+1)/2 + (k+1) = (k+1)(k+2)/2$.
Значит, формула сохраняется для следующего натурального числа.



6

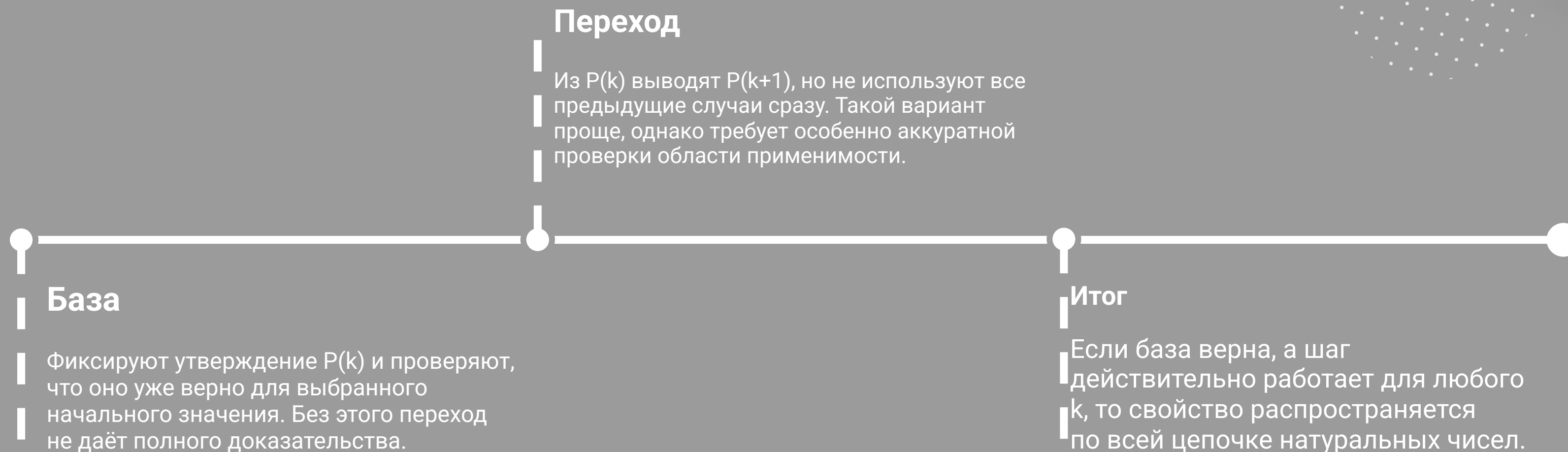
появляется в знаменателе формулы суммы квадратов и обеспечивает её точный вид.

Формула для суммы квадратов удобно проверяется и в базе, и в переходе: именно поэтому она стала классическим примером индукции.

Алгебраическая формула суммы квадратов

Неполная индукция: что она утверждает

8



Почему здесь нужна осторожность

Смысл термина

Неполная индукция не означает слабое или неверное доказательство. Она становится корректной, если переход действительно строгий, а начальный случай выбран правильно и не пропущен.

Границы применения

Особое внимание требуется к области определения: иногда формула верна только при $n \geq n_0$ или лишь при некоторых значениях. Тогда это нужно явно указать в доказательстве.

Скрытый разрыв

Локально убедительный переход ещё не гарантирует общий вывод. Если между соседними случаями есть скрытый разрыв, цепочка рассуждения не охватывает все натуральные числа.

Где метод полезен

Для рекурсий, конечных диапазонов и утверждений с отдельной вспомогательной леммой метод часто работает безупречно. Главное — не подменять доказательство интуицией.

2

**на паре кошек переход перестаёт
работать, и вывод становится неверным.**

Иллюстрация показывает, что ложный переход может
выглядеть убедительно, но рушится уже на минимальном
контрпримере.

Классический контрпример к ошибочной индукции

Когда неполная индукция работает

11

1. Проверка базы

Сначала проверяют отдельный стартовый случай: без него цепочка рассуждений не начинается, даже если переход сформулирован верно.

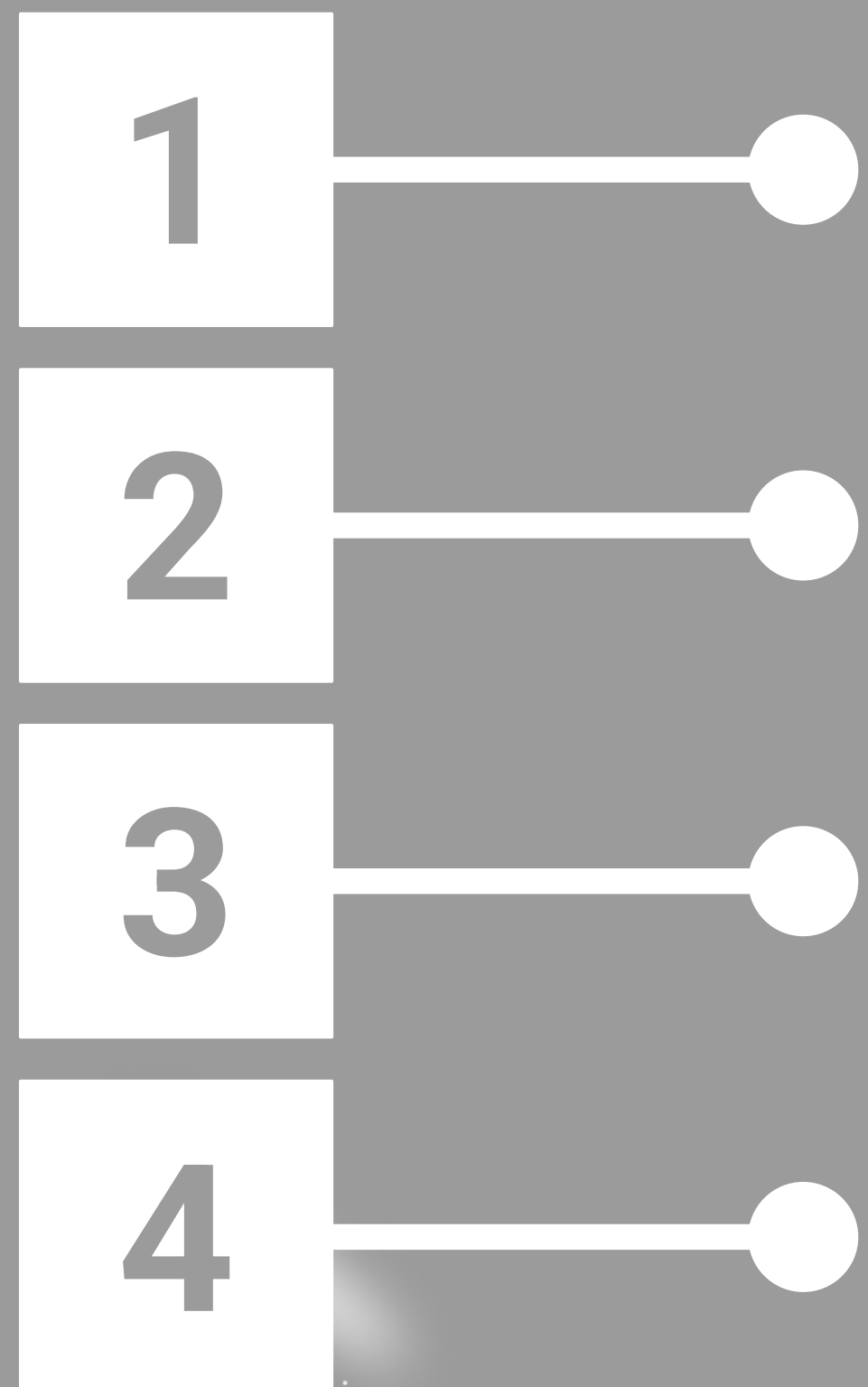
2. Переход

Затем доказывают правило перехода: из истинности $P(k)$ получают истинность $P(k+1)$, часто с помощью преобразований или рекурсии.

3. Итог

После этого выводят утверждение для нужного диапазона: если база и переход верны, метод работает так же надёжно, как и полная индукция.

Почему индукция называется полной

**1**

1. Опора на цепочку

Переход строится не на одном частном случае, а на всей уже доказанной цепочке: каждое новое утверждение опирается на накопленный результат и сохраняет его корректность.

2

2. Зависимость от предшественников

Такой подход нужен, когда свойство следующего шага зависит от нескольких предыдущих значений, а не только от одного. Тогда один шаг уже не даёт полной гарантии.

3

3. Полнота условия

Название подчёркивает полноту условия перехода: учитываются все случаи от начального до текущего, поэтому доказательство контролирует не отдельное звено, а всю последовательность.

4

4. Цепочка звеньев

Именно поэтому метод удобно представлять как ряд связанных звеньев: если одно из них установлено неверно, рухнет вся конструкция, а не только один фрагмент.

Сравнение двух методов

Критерий	Полная	Неполная
Опора шага	Все предыдущие	Одно предыдущее
База	Обязательна	Обязательна
Гарантия	Для всех n	При строгих условиях

- Таблица показывает, чем различаются два близких по форме, но не одинаковых по смыслу метода доказательства.
- Главное различие — в силе индукционного перехода: полная индукция использует всю накопленную информацию, а неполная — только ближайший предыдущий случай.

Как выбрать метод доказательства

14

Проверьте область

Если утверждение сформулировано для всех натуральных чисел, сначала ищут простой базовый случай и проверяют, можно ли доказать переход без лишних допущений.

Оцените зависимость шага

Когда следующий шаг зависит только от предыдущего значения, удобнее применить обычный индукционный переход. Это особенно типично для рекурсий и последовательностей.

Учитывайте накопленные факты

Если в доказательстве нужен не один факт, а несколько уже установленных свойств, лучше использовать полную индукцию или отдельную вспомогательную лемму.

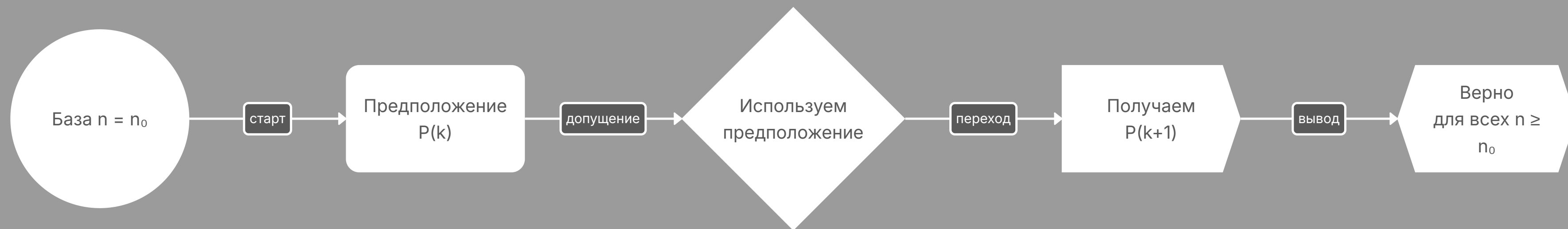
Проверьте строгость вывода

Любое сомнение в переходе — сигнал остановиться и уточнить аргументацию. Индукция допустима только тогда, когда каждый вывод действительно следует из предыдущего.

База $\rightarrow$ предположение $\rightarrow$ переход $\rightarrow$ вывод

Последовательность шагов классического индуктивного доказательства

15



Делимость $7^n - 1$ на 6



Проверяем базу

Для первого шага достаточно проверить самый маленький показатель. При $n=1$ имеем $7^1 - 1 = 6$, а 6 делится на 6 без остатка. Это задаёт правильный старт для индукции и фиксирует, что утверждение не пустое.



Организуем переход

Далее рассматривают переход к следующему значению. Запись $7^{k+1} - 1 = 7 \cdot 7^k - 1 = 7(7^k - 1) + 6$ специально устроена так, чтобы выделить множитель $7^k - 1$ и применить предположение о его делимости на 6.

Сумма нечётных чисел

17



1. База

Начинают с самого малого случая, где формула почти очевидна: при $n=1$ левая часть равна 1, и это совпадает с квадратом 1. Такой старт делает дальнейшее рассуждение прозрачным.

2. Переход

В переходе к $k+1$ к уже известной сумме добавляют следующий нечётный член $2k+1$. После упрощения получаем $(k+1)^2$, то есть формула сохраняется на новом шаге.

3. Смысл формулы

Геометрически эта сумма описывает рост квадрата слоями из нечётных чисел. Поэтому индукция не просто вычисляет выражение, а показывает закономерность построения квадратов.

Распространённые ошибки



Пропуск базы

Если не проверить базовый случай, доказательство может оказаться «висящим в воздухе». Индукция работает только тогда, когда цепочка действительно начинается с верного первого звена.



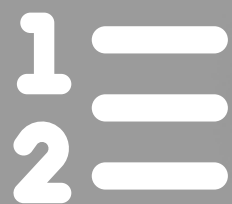
Неверная подстановка

Частая ошибка — без оснований менять в предположении k на $k+1$ и считать, что это автоматически даёт нужный результат. На самом деле требуется отдельный вывод для нового случая.



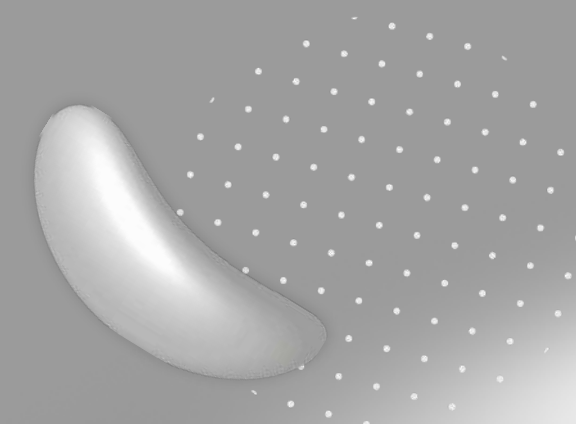
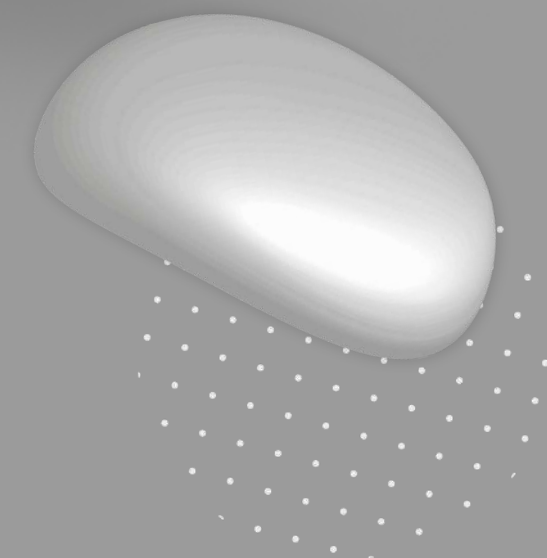
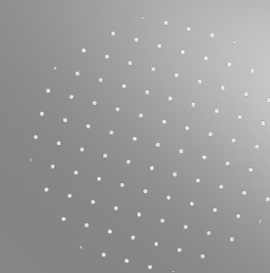
Скрытая круговость

Иногда в переходе используют утверждение, которое само ещё не доказано. Такой круговой ход выглядит убедительно, но не доказывает ничего, кроме логической ошибки.



Неясная область

Ещё одна проблема — не указать, для каких именно n доказано свойство. Без этого невозможно понять, где работает результат и не нарушены ли условия начала.



Проверь себя

1

Различие методов

Сначала ответьте себе, чем полная индукция отличается от неполной. В одном случае переход опирается на всю предыдущую цепочку, в другом — только на ближайший шаг.

2

Роль базы

Далее проверьте базу: без верного стартового случая даже правильный переход не даёт доказательства. Это первый обязательный элемент любого индуктивного рассуждения.

3

Проверка перехода

Затем найдите сам индукционный переход и убедитесь, что он действительно выводит $P(k+1)$ из того, что уже известно. Здесь нельзя подменять вывод предположением.

4

Место предположения

После этого посмотрите, где именно в доказательстве используется индукционное предположение. Если его можно убрать без потери смысла, аргумент, скорее всего, записан неверно.

5

Анализ контрпримера

Наконец, разберите ложный контрпример и определите, на каком шаге он ломается. Это лучший способ понять, почему формальная строгость в индукции необходима.

Главное о математической индукции

Индукция — это не формальный ритуал, а точный способ построить бесконечное доказательство из базы и корректного перехода. Полная версия надёжнее, а неполная требует особенно внимательной проверки условий.