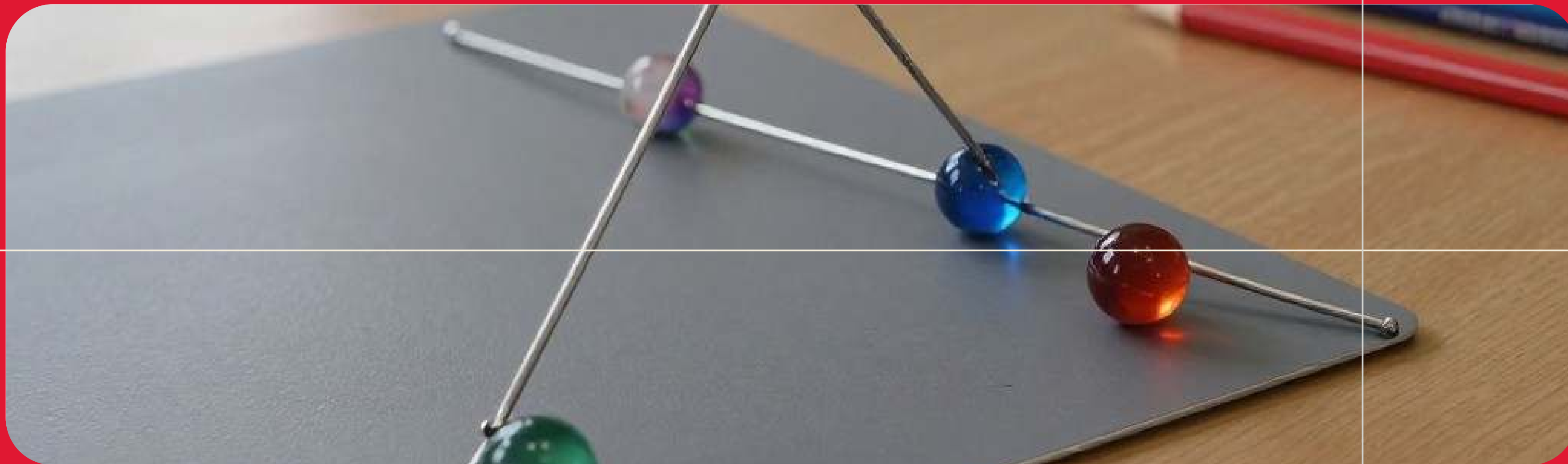
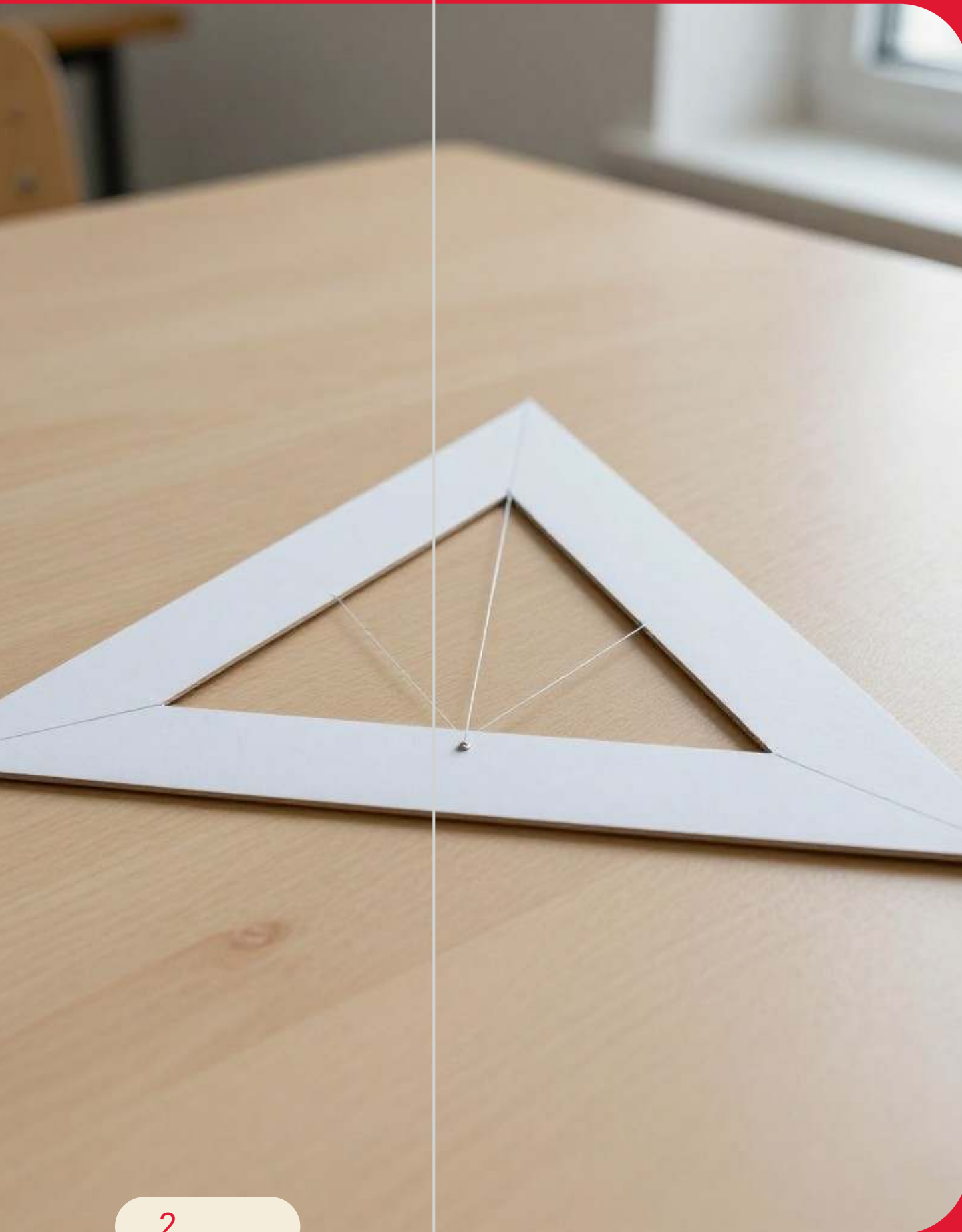




Замечательные точки треугольника

Четыре точки — четыре способа увидеть треугольник по-новому.

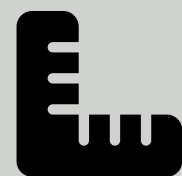


Линии, которые создают центры

У треугольника есть несколько особых точек. Их задают медианы, высоты, биссектрисы и серединные перпендикуляры, а потому каждая точка открывает свой способ решения задач.

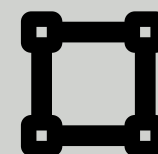
Что помогает узнать точку

По серединам сторон



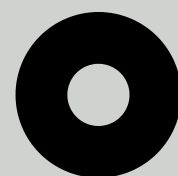
Если известны середины сторон, можно провести медианы и сразу выйти на центроид. Такая точка помогает связывать вершины и стороны через простое и наглядное построение.

По виду линий



Когда в условии встречаются углы и перпендикуляры, обычно ищут точку пересечения высот, биссектрис или серединных перпендикуляров. По набору линий легко понять, какой центр нужен.

По равным расстояниям



Особые точки удобно проверять по расстояниям: до вершин, до сторон или до прямых. Это делает ответ не только красивым, но и быстро проверяемым.

Основные объекты и обозначения

Вершины и стороны

Треугольник обычно обозначают буквами А, В и С. Эти буквы ставят у вершин, а стороны записывают как АВ, ВС и СА, чтобы не путаться в рассуждениях.

Медиана

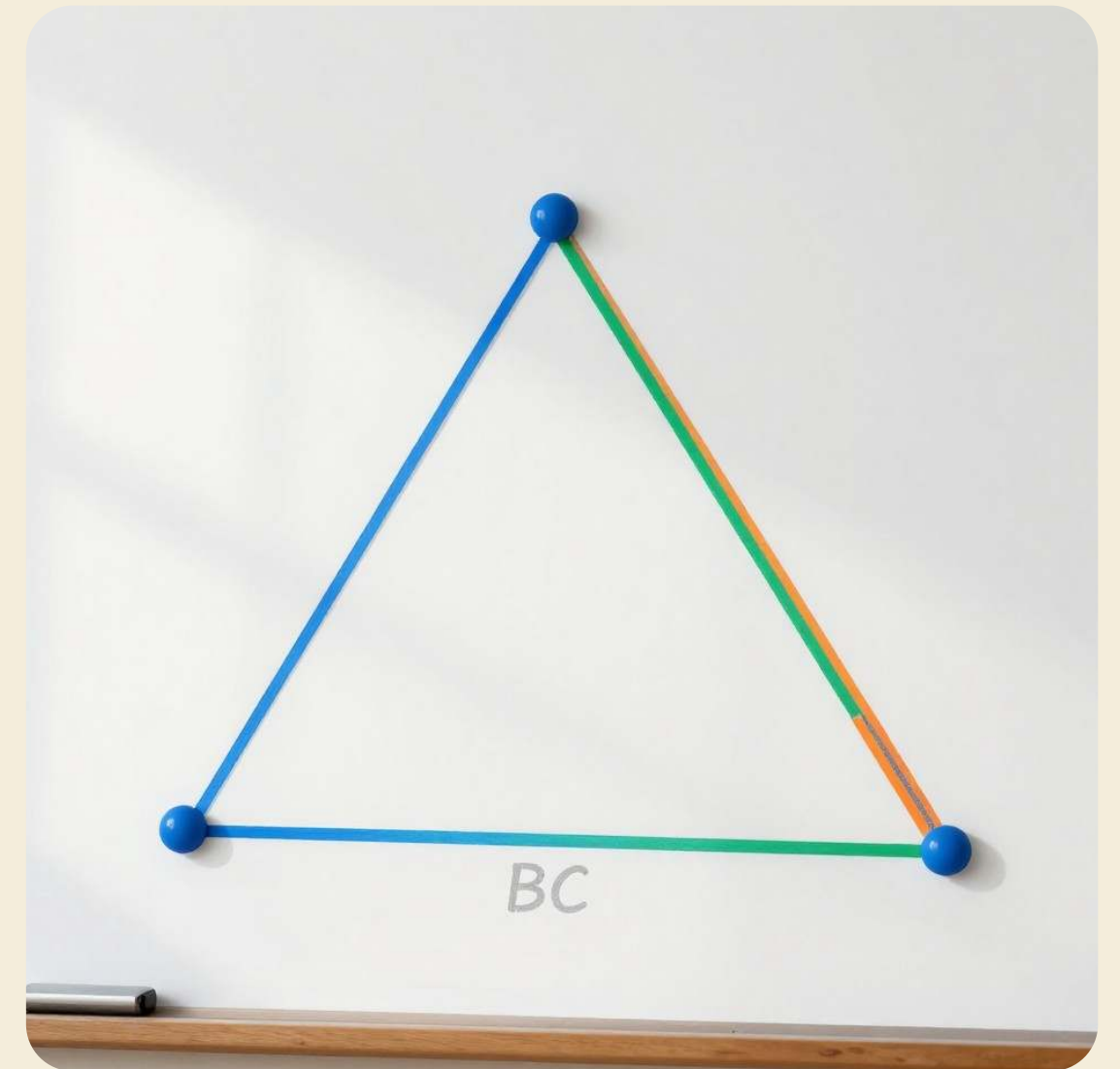
Медиана соединяет вершину с серединой противоположной стороны. Она делит сторону на две равные части и часто помогает находить центр тяжести треугольника.

Другие специальные линии

Высота проводится из вершины перпендикулярно противоположной стороне. Биссектриса делит угол пополам, а серединный перпендикуляр проходит через середину стороны под прямым углом.

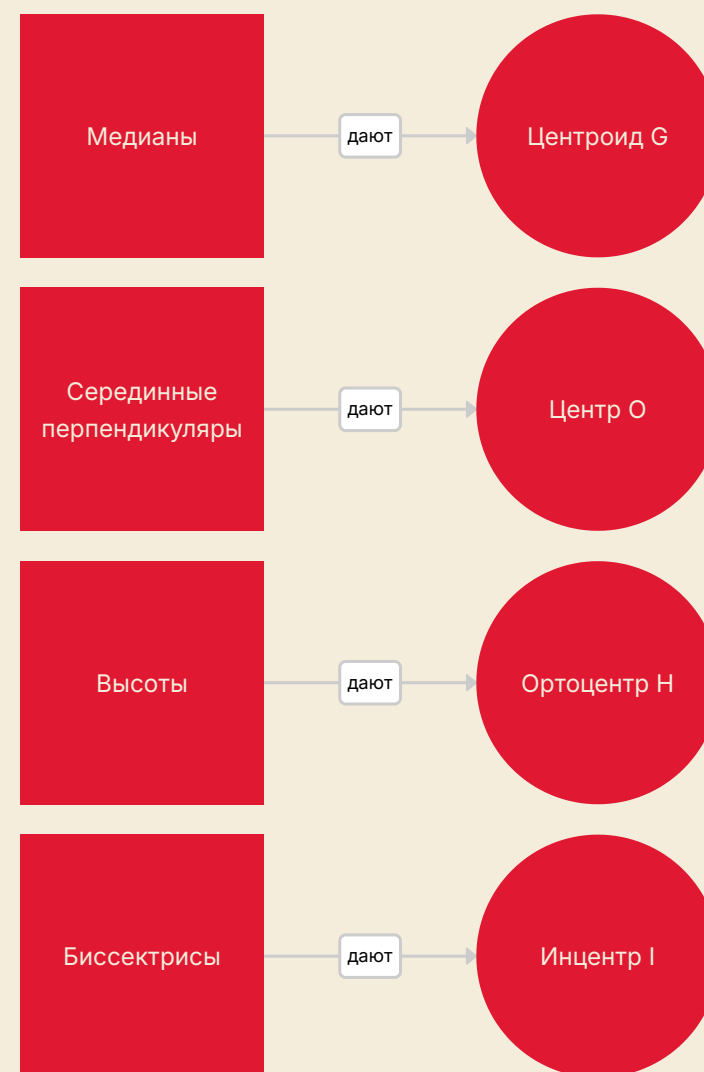
Подсказка для задач

Именно эти линии чаще всего встречаются в задачах на построение. Если заметить, какие из них даны, можно быстрее определить нужную замечательную точку.



Какие линии образуют точки

Каждый центр возникает как общая точка трёх одинаковых линий.



Центроид: определение и свойство

01

Определение

Центроид G — это общая точка трёх медиан треугольника. Он всегда находится внутри фигуры и служит важной опорной точкой в задачах на деление сторон.

02

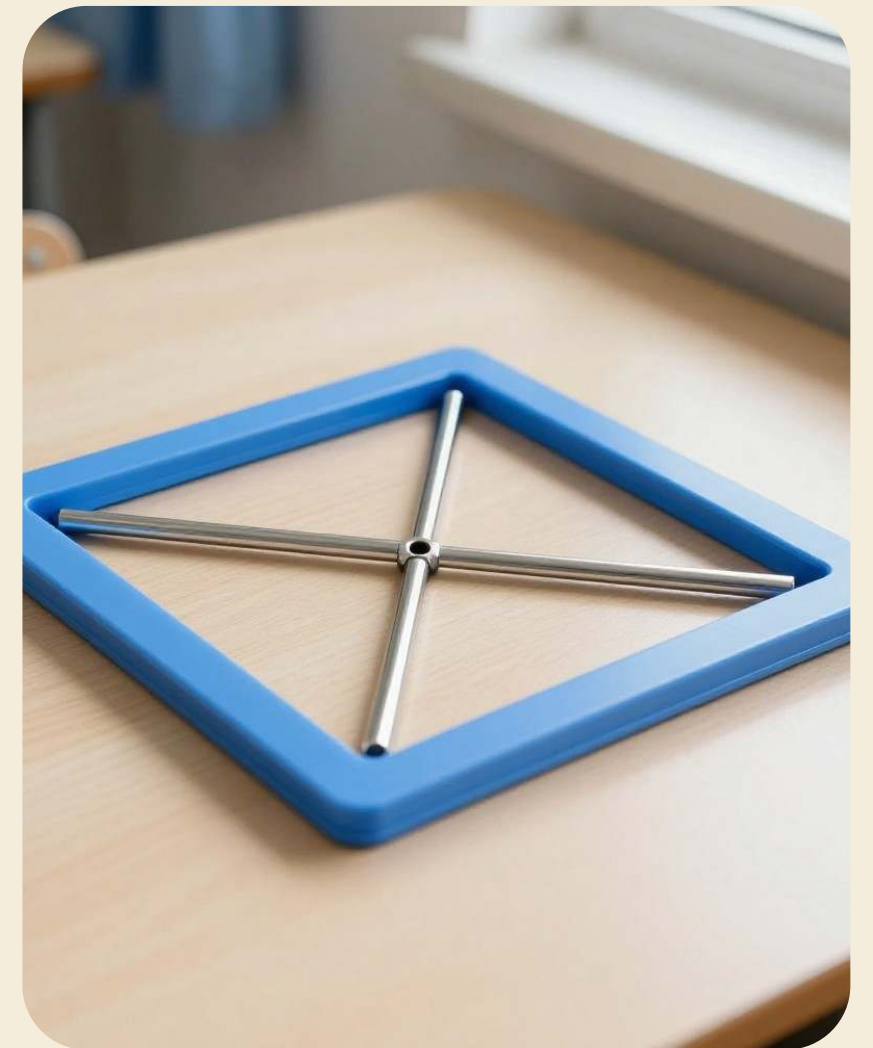
Главное свойство

Медианы делятся центроидом не поровну: от вершины до центроида отрезок в два раза длиннее, чем от центроида до середины стороны. Это свойство часто используют в вычислениях.

03

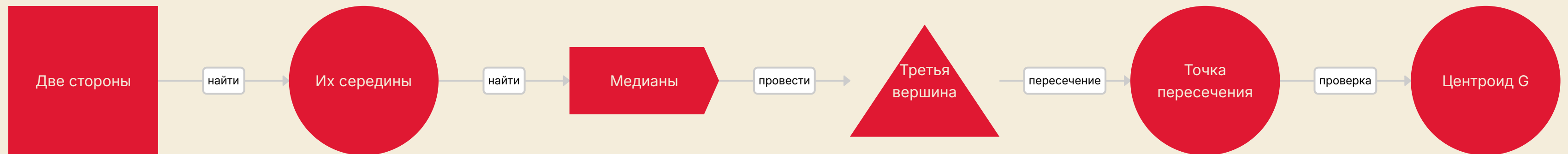
Как распознать

Если построить две медианы, их пересечение уже определяет G . Третья медиана обязательно проходит через ту же точку, поэтому построение можно сразу проверить.



Построение центроида циркулем и линейкой

Построение опирается на середины сторон и медианы, проведённые из вершин.



Центр описанной окружности

01

Определение

Центр описанной окружности O — это точка, одинаково удалённая от всех вершин треугольника. Поэтому через вершины A , B и C можно провести одну окружность.

02

Почему он существует

Эта точка получается как пересечение серединных перпендикуляров к сторонам. Каждый такой перпендикуляр состоит из точек, равноудалённых от концов стороны.

03

Как проверить

Если измерить отрезки OA , OB и OC , они окажутся равными. Это удобная проверка, когда центр уже найден построением или на чертеже.



Построение центра описанной окружности

Сначала строят перпендикуляры к двум сторонам, затем отмечают их общую точку.



3

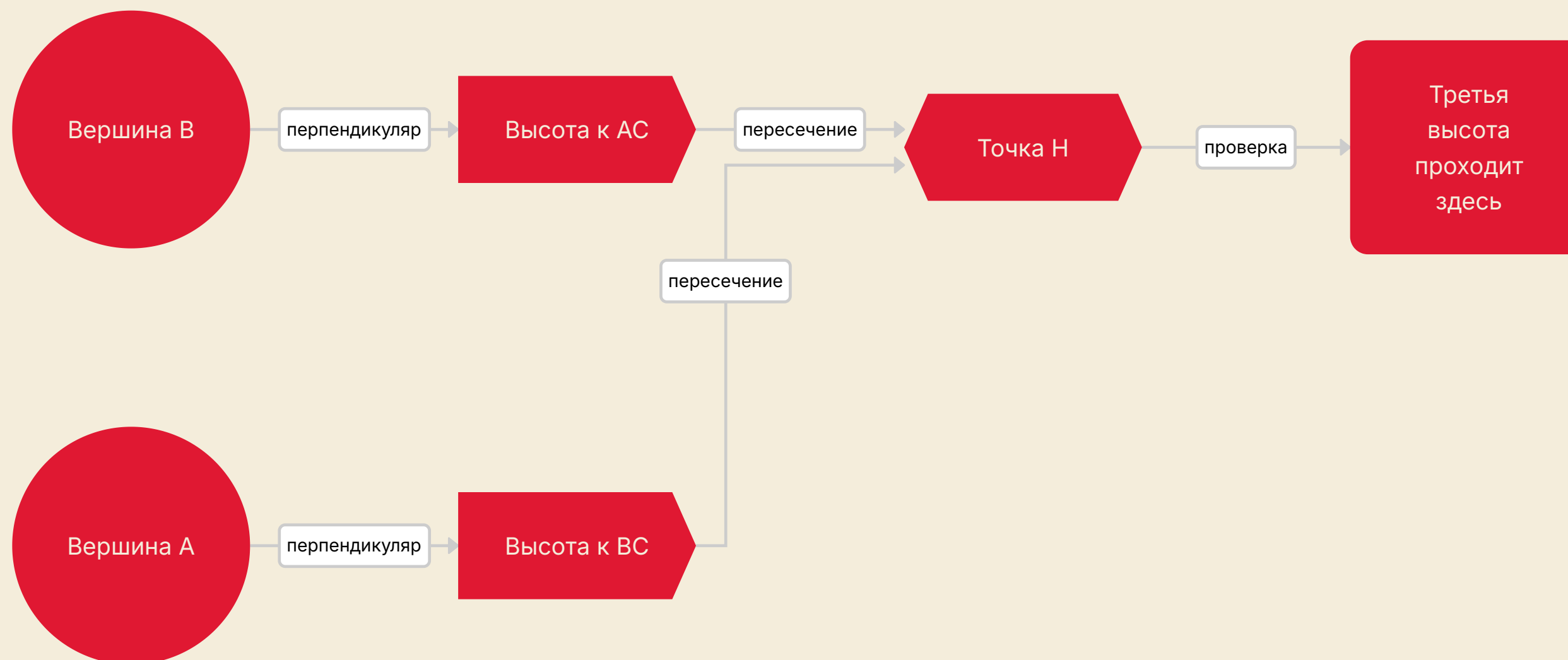
высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Точка пересечения высот позволяет быстро
определить тип треугольника и его положение.

Свойства высот треугольника

Построение ортоцентра

Через две вершины проводят высоты, перпендикулярные противоположным сторонам; их пересечение дает ортоцентр.



3

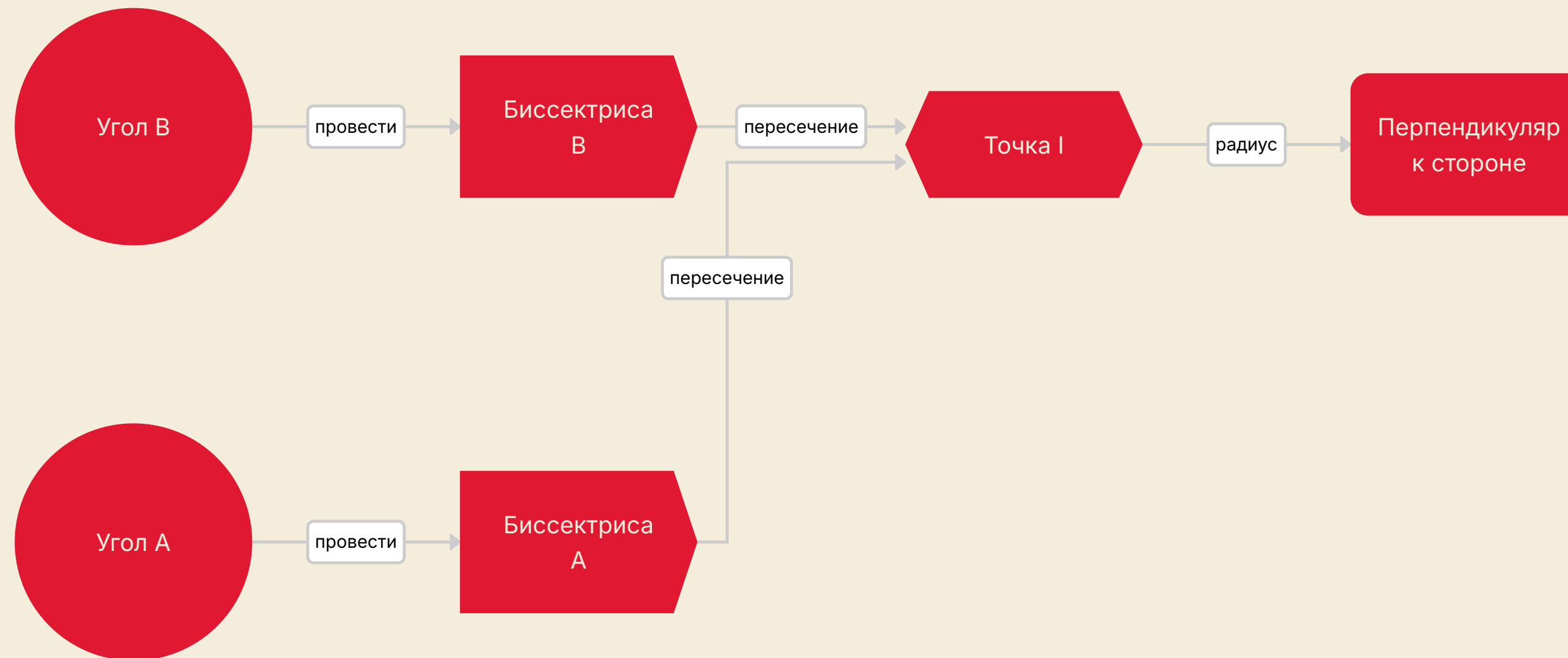
биссектрисы дают точку, равноудалённую от всех сторон.

Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, поэтому инцентр легко находить без измерений.

Свойство биссектрис треугольника

Построение инцентра

Проводят биссектрисы двух углов; их пересечение задаёт инцентр, а расстояние до стороны даёт радиус вписанной окружности.



Четыре точки: короткое сравнение

Сравнение четырёх ключевых точек треугольника и их основных свойств.

Каждая точка определяется своим набором линий и своим типом равенства расстояний.

Основные свойства замечательных точек треугольника

Точка	Линии	Свойство
G	медианы	2:1
O	перпендикуляры	к вершинам
H	высоты	пересечение
I	биссектрисы	к сторонам

90°

угол помогает сразу определить положение ортоцентра и центра описанной окружности.

В прямоугольном треугольнике одна важная точка совпадает с вершиной прямого угла, а центр описанной окружности оказывается на середине гипотенузы.

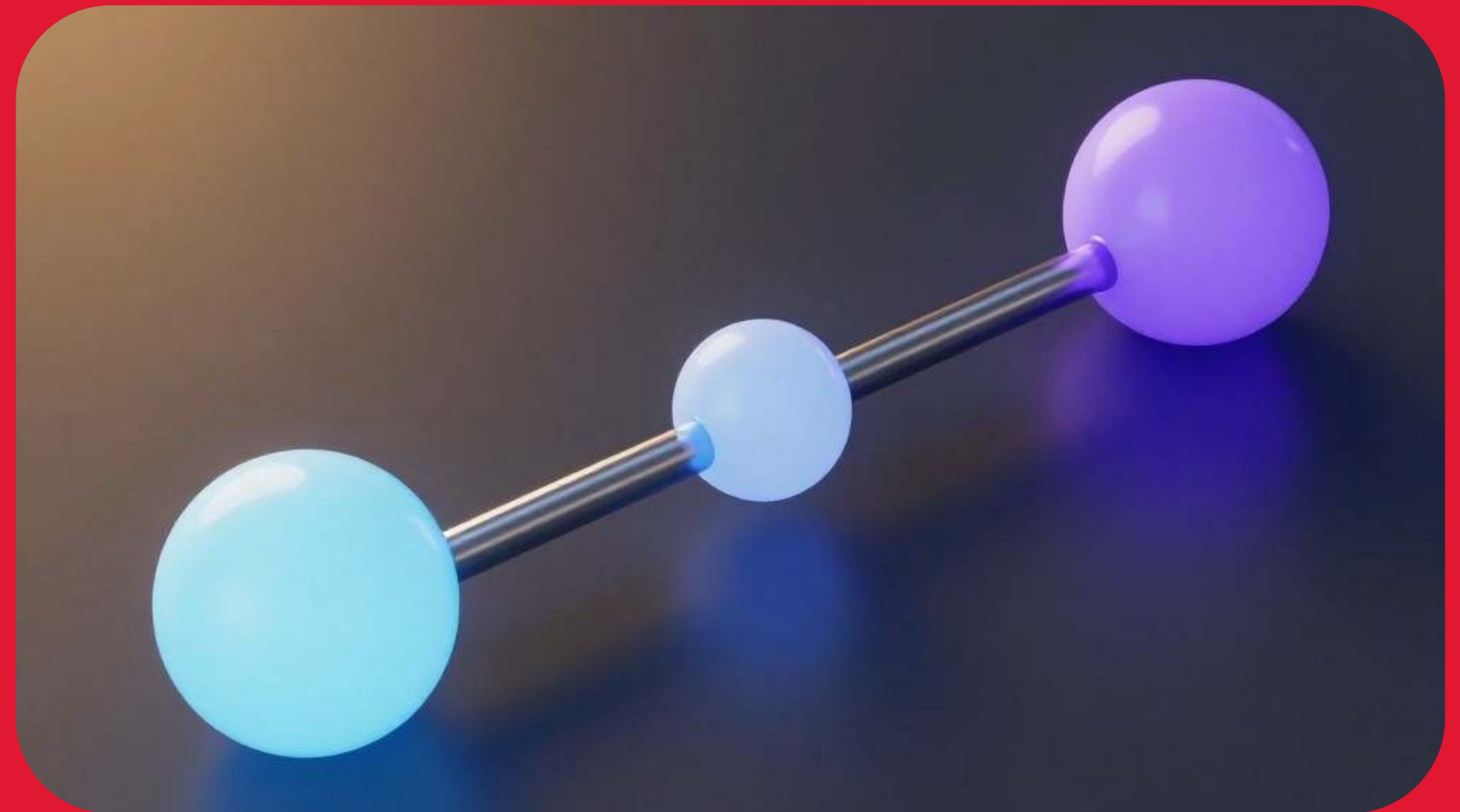
Свойства прямоугольного треугольника

Линия Эйлера



Три точки на одной линии

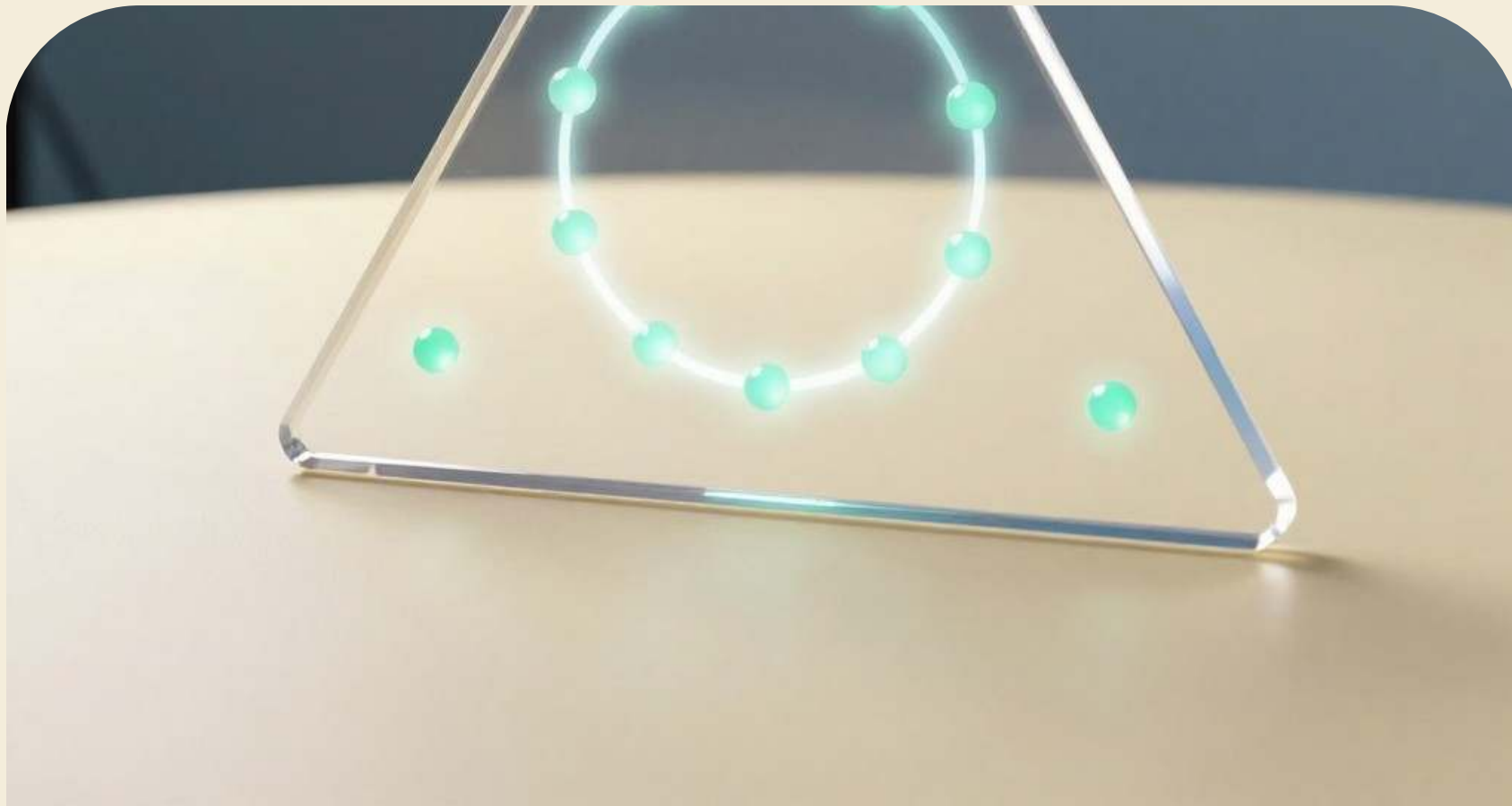
На одной прямой оказываются три важные точки треугольника: центр описанной окружности O , центроид G и ортоцентр H . Это помогает быстро проверять взаимное расположение точек и искать неизвестную по двум уже найденным.



Как делится отрезок

Самая удобная деталь линии Эйлера — постоянное отношение отрезков. Точка G делит отрезок OH в отношении $1:2$, поэтому по двум точкам можно восстановить третью и проверить рисунок без лишних вычислений.

Девятиточечная окружность



Окружность из девяти точек

Девятиточечная окружность показывает, как в треугольнике повторяются одинаковые идеи. Она проходит через середины сторон и через середины отрезков, связанных с высотами, поэтому внутри фигуры возникает очень чёткая симметрия.



Симметрия чертежа

Эта окружность удобна для рисунков и задач на доказательство. Когда на чертеже уже отмечены стороны, высоты и ортоцентр, девятиточечная окружность связывает все элементы в одну красивую конструкцию.

4

окружности оказываются касательными к девятиточечной окружности.

Теорема Фейербаха связывает девятиточечную окружность с четырьмя окружностями треугольника, показывая редкую и красивую связь между разными центрами.

Теорема Фейербаха

Банк типовых задач

Такие задачи учат узнавать центр по его признакам и быстро выбирать нужную линию построения.

Главный приём — сначала определить семейство линий, а затем вспомнить связанную с ним замечательную точку.

Типовые задачи по теме «замечательные точки треугольника»

Что дано	Что ищем	Подсказка
линии	точку	смотреть пересечение
вершины/стороны	равноудалённость	сравнить расстояния
вид треугольника	положение точки	учесть тип

Главное запомнить

Замечательные точки треугольника запоминаются через линии, которые их строят: медианы, серединные перпендикуляры, высоты и биссектрисы. Если знать эти связи и свойства равных расстояний, задачи решаются быстро и наглядно.