



Скалярное произведение векторов: связь длины, угла и чисел

Скалярное произведение связывает направления и длины двух векторов в одно число — результат зависит от угла.

Зачем это нужно в школьной геометрии

В 7 классе векторы помогают описывать направление и длину отрезков. Скалярное произведение связывает эти идеи с углами и координатами, упрощая задачи про прямоугольные треугольники, параллельность и перпендикулярность.



Что такое скалярное произведение

1

Для векторов a и b скалярное произведение обозначают $a \cdot b$. Результат — число, а не новый вектор. Это позволяет сравнивать направления через знак и величину.

2

Если оба вектора ненулевые, используется формула $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \alpha$, где α — угол между ними. Косинус связывает угол с числом, которое вы получаете при вычислении.

3

Когда угол острый, $\cos \alpha$ положительный, значит $a \cdot b$ больше нуля. При прямом угле $\cos 90^\circ = 0$, поэтому произведение равно нулю. При тупом — отрицательное.

Геометрический смысл формулы

1

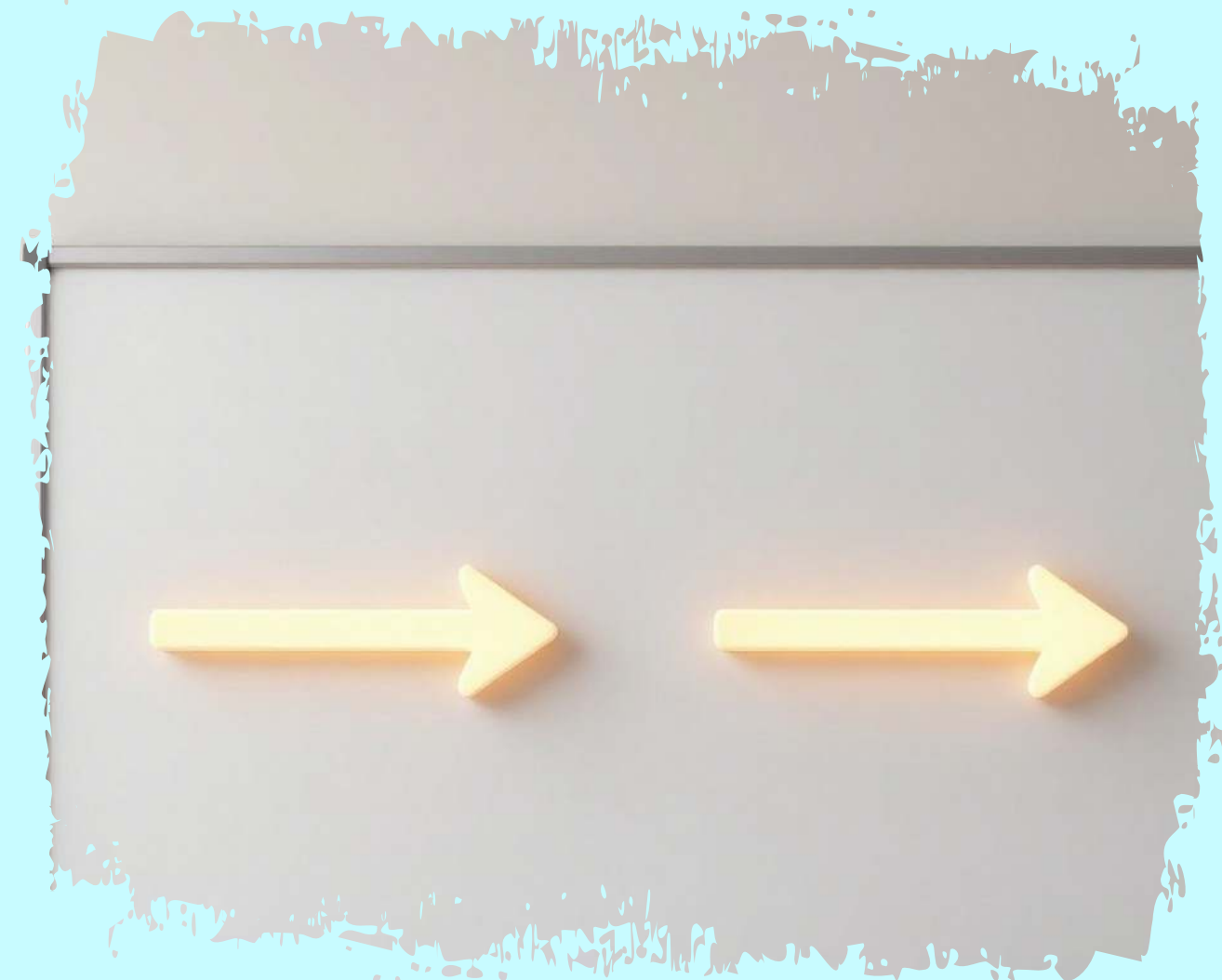
От чего зависит результат

Формула $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \alpha$ показывает, что результат определяется и длинами векторов, и углом между ними. При росте угла косинус уменьшается, и значение тоже меняется.

2

Как угол «рисует» знак

Если векторы направлены одинаково, угол равен 0° , и $\cos 0^\circ = 1$ — произведение становится наибольшим. При противоположных направлениях угол 180° , $\cos 180^\circ = -1$ — результат отрицательный.



Значение скалярного произведения при разных углах

Знак и величина $a \cdot b$ меняются в зависимости от угла α : косинус определяет, будет ли произведение положительным, нулевым или отрицательным.

Положительный знак соответствует острому углу, нулевой — прямому, отрицательный — тупому.

Образовательная модель по формуле $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \alpha$

α	$\cos \alpha$	знак $a \cdot b$	смысл
0°	1	положительное	одинаковое направление
60°	$1/2$	положительное	острый угол
90°	0	ноль	перпендикулярные векторы
120°	$-1/2$	отрицательное	тупой угол
180°	-1	отрицательное	противоположные направления

1

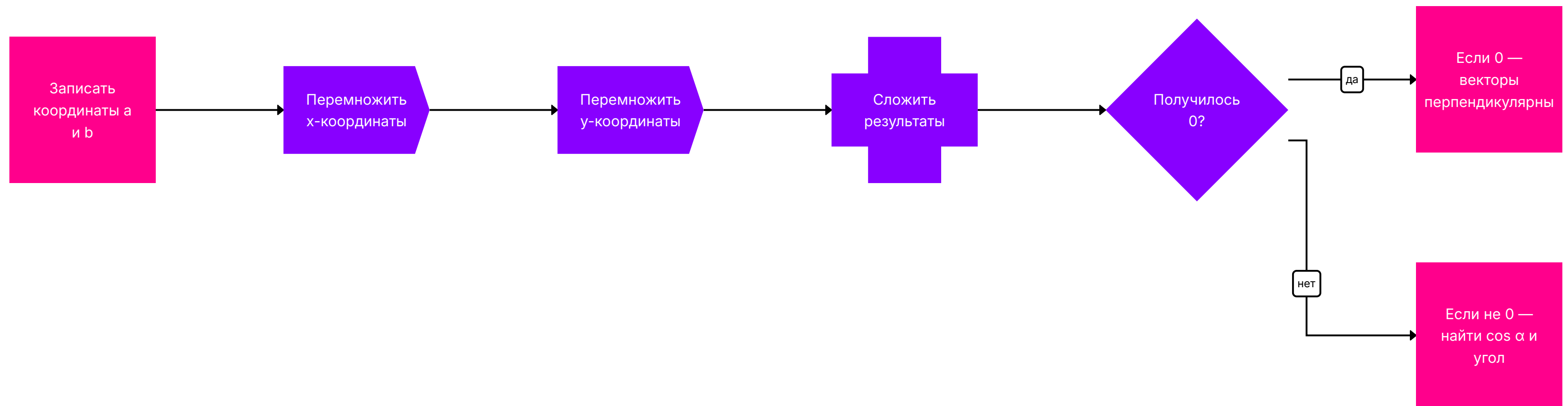
Если векторы заданы на координатной сетке, скалярное произведение удобно находить без измерения угла.

Когда $a = (x_1, y_1)$ и $b = (x_2, y_2)$, то $a \cdot b = x_1x_2 + y_1y_2$. Нужно перемножить соответствующие координаты и сложить.

Школьная формула для скалярного произведения в декартовой плоскости

Алгоритм: скалярное произведение по координатам

Последовательность вычислений для векторов на плоскости по координатам



Когда скалярное произведение равно нулю

1

Если $a \cdot b = 0$ и оба вектора ненулевые, то угол между ними равен 90° . Значит, векторы перпендикулярны.

2

Нулевой результат не означает, что векторы равны нулю. Он появляется именно из-за $\cos 90^\circ = 0$, то есть из-за прямого угла.

3

В геометрических задачах по треугольникам и четырехугольникам это помогает быстро выявлять прямые углы без измерений и построений.

Как меняется $\cos \alpha$ при увеличении угла

Так как скалярное произведение содержит множитель $\cos \alpha$, именно по косинусу можно понять знак $a \cdot b$: положительный, нулевой или отрицательный.

Кривая убывает: с ростом угла направление «отходит» от совпадающего, и величина $\cos \alpha$ уменьшается до -1 .

Функциональная зависимость $\cos \alpha$ и ключевые значения для характерных углов

Как по скалярному произведению находят угол

1

Если известны $a \cdot b$, $|a|$ и $|b|$, то можно найти $\cos \alpha$ по формуле $\cos \alpha = a \cdot b / (|a| \cdot |b|)$. Это превращает задачу об угле в вычисление числа.

2

Дальше угол определяют по значению косинуса: одинаковые ориентировки дают косинус близкий к 1, прямой угол — 0, а противоположные направления — отрицательные значения.

3

В школьных задачах способ особенно удобен, когда векторы задаются координатами точек. Тогда сначала вычисляют $a \cdot b$ и длины, а затем по косинусу делают вывод об угле.

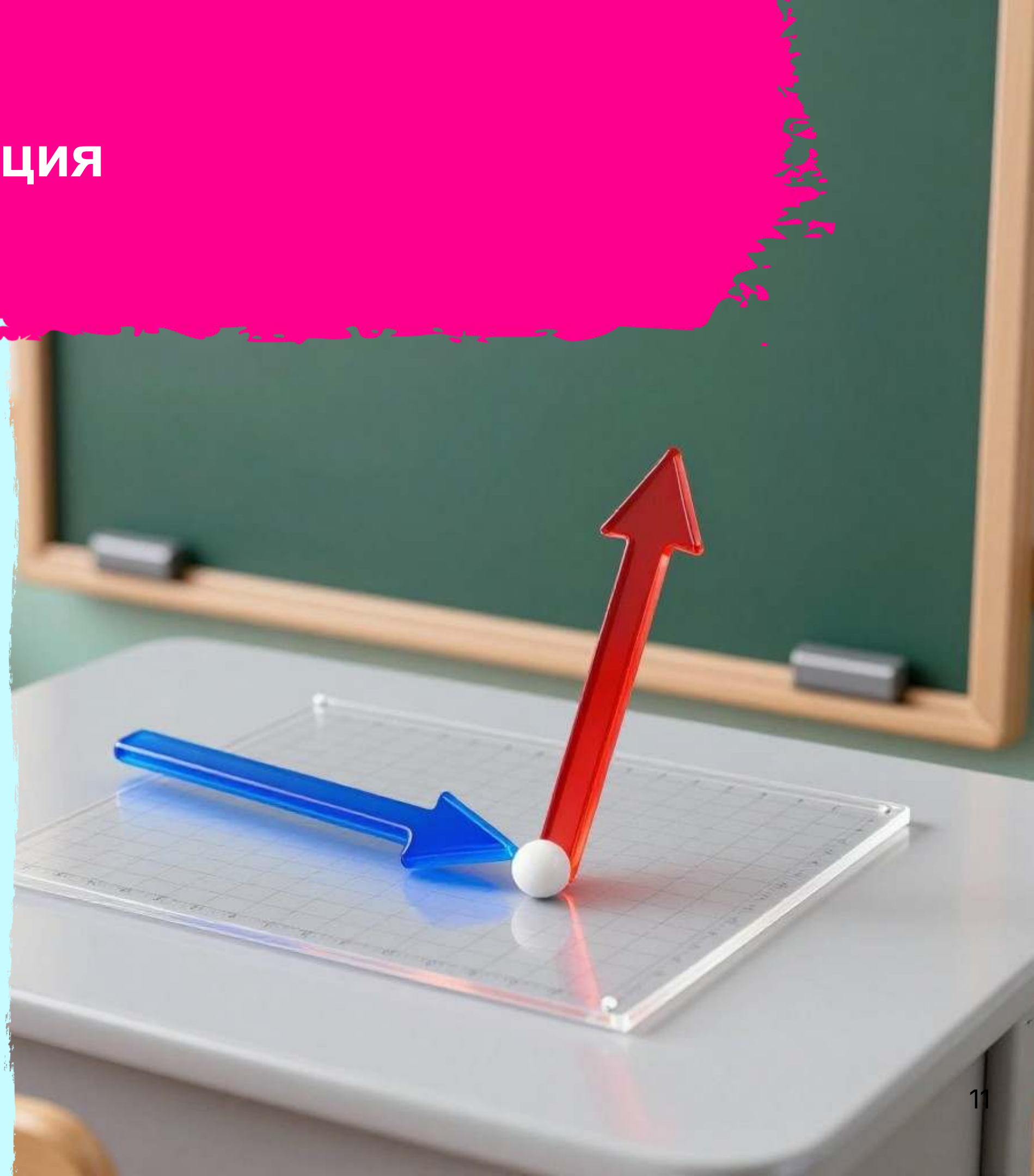
Скалярное произведение и проекция



Проекция вектора b на направление вектора a показывает, какая «часть» b работает вдоль a . Эта доля определяется косинусом угла α между векторами: чем меньше α , тем больше проекция.



Поэтому скалярное произведение $a \cdot b$ связано с проекцией как с мерой согласованности направлений. При $\alpha = 90^\circ$ косинус равен нулю, и проекция обнуляется, значит $a \cdot b = 0$ для ненулевых векторов.



Основные свойства скалярного произведения

Свойства помогают упрощать выражения и аккуратно раскрывать скобки при вычислениях в задачах на углы и перпендикулярность.

Все свойства сводятся к тому, что скалярное произведение ведет себя как «обычное умножение числами» относительно сложения векторов и выноса числового множителя.

Учебный материал по теме «Скалярное произведение векторов» (школьный курс 7–9 классы)

Свойство	Запись	Смысл
Переместительное	$a \cdot b = b \cdot a$	Порядок не влияет
Распределительное	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	По сумме складывается
Умножение на число	$(ka) \cdot b = k(a \cdot b)$	Коэффициент выносится
С нулевым вектором	$0 \cdot a = 0$	Результат нулевой

Длина вектора через скалярное произведение



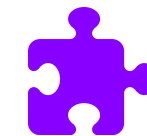
Длина как корень из $a \cdot a$

Длину вектора удобно находить через скалярное произведение: $|a| = \sqrt{a \cdot a}$. Важно, что $a \cdot a$ — это скаляр, который всегда неотрицателен и отражает «размер» вектора, не завися от направления.



Координатная запись

Если вектор задан координатами (x, y) , то $a \cdot a = x^2 + y^2$. Значит, $|a| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Эта формула связывает длину с вычислениями по координатной сетке, без измерения углов.



Связь с теоремой Пифагора

Формула длины $\sqrt{x^2 + y^2}$ напоминает классическую схему Пифагора для прямоугольного треугольника. В школьных задачах это помогает переходить от «геометрии по картинке» к расчетам через числа.

Сравнение способов работы с векторами

В таблице сравнения отражена практичность: координатная формула чаще подходит «по умолчанию», а проверка перпендикулярности особенно быстра, когда требуется найти прямой угол.

Сильная сторона координатного подхода — универсальность в плоскости. Геометрический смысл полезен для понимания, а признак нуля моментально дает ответ о перпендикулярности.

Обобщение методических рекомендаций школьной программы (оценка практичности способа)

Типичные ошибки при вычислениях

1

Часто путают скалярное произведение с умножением векторов как объектов: в вычислениях получают число, а не новый вектор. Нельзя сокращать выражения, как будто перемножаются векторы напрямую.

3

Случается и механическая ошибка со знаком: при отрицательных числах некоторые учащиеся забывают знак «минус» в произведениях. Нередко неверно подставляют угол вместо $\cos \alpha$, из-за чего формула перестает работать.

2

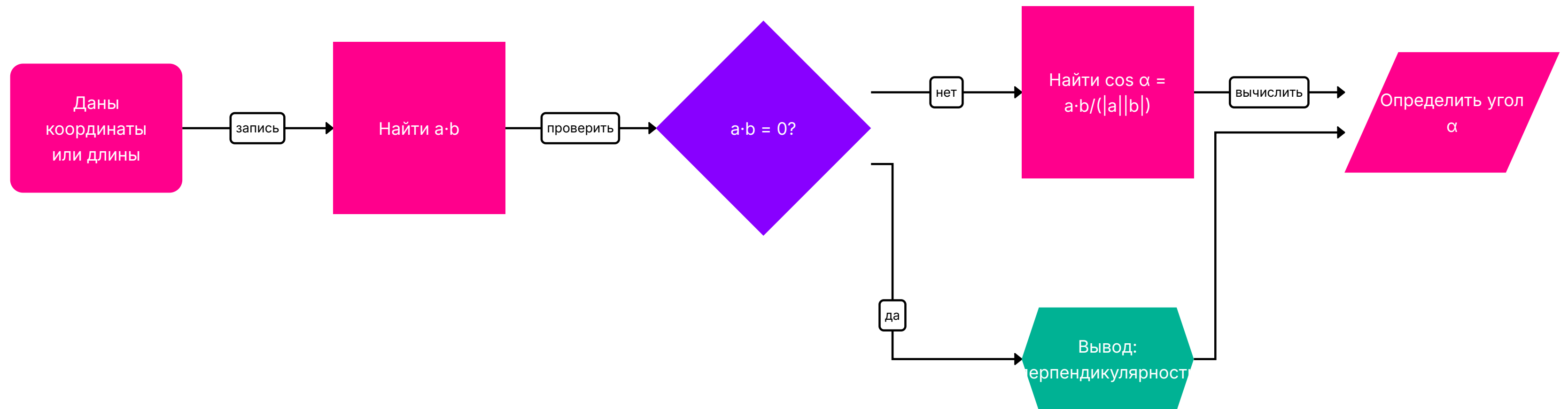
Ещё одна распространенная ошибка — пропустить одну координату при координатной формуле $x_1x_2+y_1y_2$. Из-за этого меняется итоговый знак и величина, а затем неверно определяется косинус угла или признак перпендикулярности.

4

Иногда считают, что нулевое произведение возможно только при нулевом векторе. Но если оба вектора ненулевые, результат все равно может быть нулевым при $\alpha=90^\circ$, то есть при перпендикулярности.

Алгоритм решения задач на угол и перпендикулярность

Метод опирается на связь $a \cdot b$, $\cos \alpha$ и признак перпендикулярности.



Где применяется скалярное произведение

Сила и направление в физике

Когда сила «совпадает» с направлением движения, её действие особенно велико. Математически это отражается через скалярное произведение, связанное с косинусом угла между вектором силы и направлением. Так становится понятно, почему при перпендикулярном направлении работа равна нулю.



Освещение в компьютерной графике

В компьютерной графике освещение зависит от того, под каким углом поверхность «смотрит» на источник света. Скалярное произведение помогает учесть этот угол и корректно вычислить яркость. Поэтому один и тот же объект на экране может выглядеть светлее или темнее.



Навигация и маршруты движения

В навигации важно учитывать направление движения относительно цели или траектории. Когда два направления образуют острый угол, движение «идёт в нужную сторону»; при тупом — отклоняется сильнее. Скалярное произведение помогает количественно оценивать такую согласованность направлений.



Мини-примеры для закрепления

1

Пример 1: $(2, 3) \cdot (4, -1) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) = 8 - 3 = 5$. Мы получили число, значит скалярное произведение не является вектором, а служит мерой связи направлений и длин.

2

Пример 2: если $a \cdot b = 0$ и оба вектора ненулевые, то угол между ними равен 90° . Следовательно, векторы перпендикулярны. Этот признак удобен, когда нужно быстро установить прямой угол в фигуре.

3

Пример 3: пусть $|a|=5$, $|b|=4$ и $a \cdot b = 10$. Тогда $\cos \alpha = 10 / (5 \cdot 4) = 10 / 20 = 1/2$, значит $\alpha = 60^\circ$. Здесь по скалярному произведению восстанавливают величину угла через косинус.

Сводка ключевых понятий темы

Таблица собирает формулы и смыслы в единую схему, чтобы быстрее переходить от вычислений к геометрическим выводам.

Если помнить: нуль продукта дает перпендикулярность, а вычисленный косинус — нужный тип угла, то задачи на углы становятся последовательными и проверяемыми.

Учебные материалы по теме «Скалярное произведение векторов»

Понятие	Формула	Смысл
Скалярное произведение	$a \cdot b = a b \cos \alpha$	Связь длины и угла
Координатная формула	$a \cdot b = x_1x_2 + y_1y_2$	Быстрый расчет по координатам
Перпендикулярность	$a \cdot b = 0$	Прямой угол между ненулевыми векторами
Длина вектора	$ a = \sqrt{a \cdot a}$	Нахождение длины через произведение
Проекция	$ b \cos \alpha$	Часть направления одного вектора на другом

Скалярное произведение объединяет геометрию и вычисления

Скалярное произведение — это число, которое связывает длины векторов и угол между ними. Оно помогает находить углы, проверять перпендикулярность и выполнять расчеты по координатам. В школьной геометрии это делает решения на векторы и треугольники более понятными.