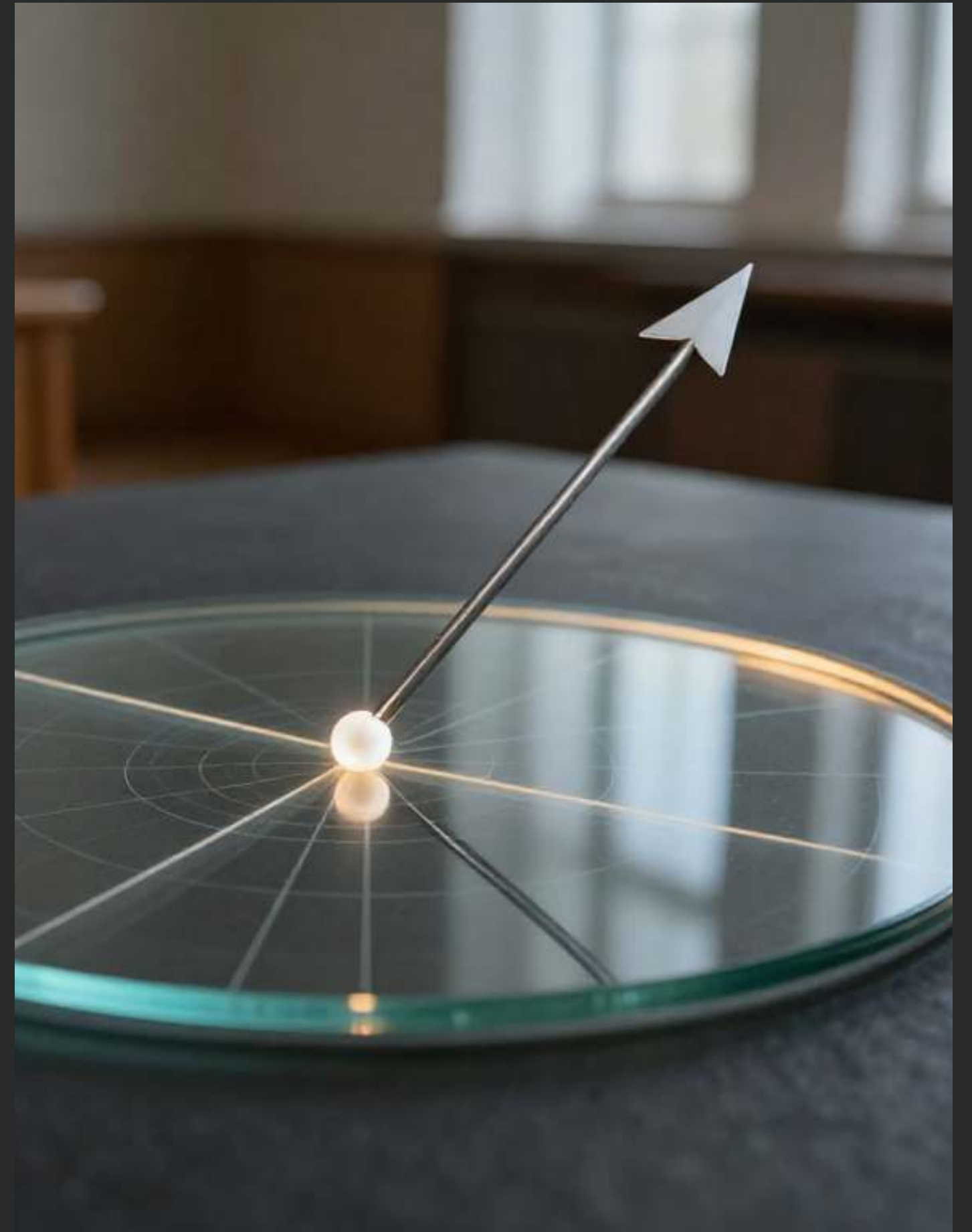


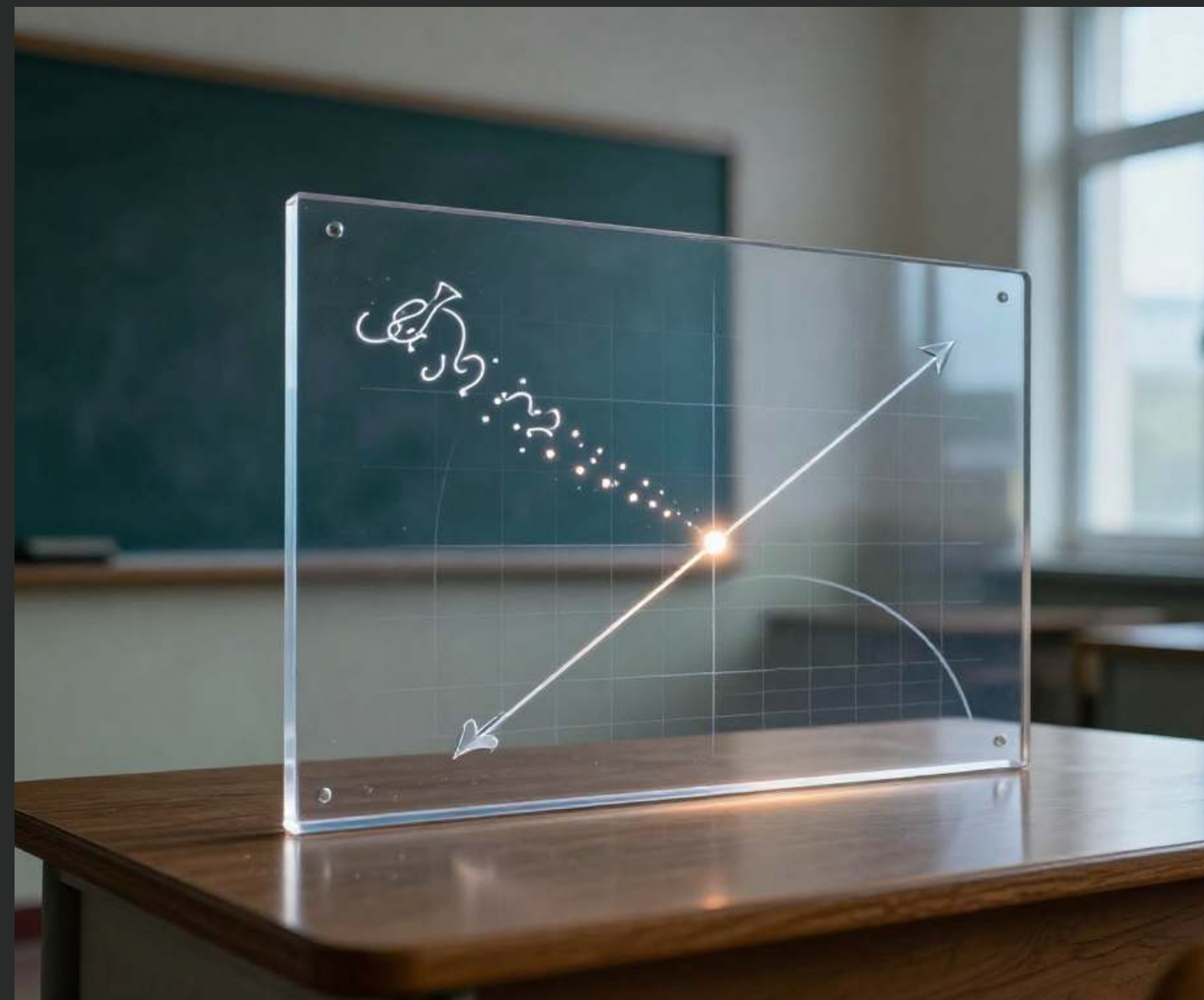
Геометрическое изображение комплексных чисел

Комплексные числа: точка, вектор
и поворот на плоскости Аргана.



От уравнений к плоскости

Комплексные числа появились, когда математики столкнулись с корнями из отрицательных чисел. Геометрическое представление превратило абстрактные записи в наглядные точки, а действия над ними — в перемещения, повороты и изменения масштаба.



Комплексное число как пара координат

Запись числа

Комплексное число записывают в виде $z=a+bi$, где a и b — действительные числа. Эта форма сразу показывает, из каких двух частей состоит число и как его читать на плоскости.

1

Действительная часть

Число a называют действительной частью комплексного числа. Оно отвечает за положение точки по горизонтали и совпадает с обычной числовой координатой на действительной оси.

2

Мнимая часть

Число b стоит при мнимой единице i , для которой $i^2=-1$. Оно задаёт вертикальную координату точки и показывает, насколько число смещено вверх или вниз относительно начала координат.

3

Особые случаи

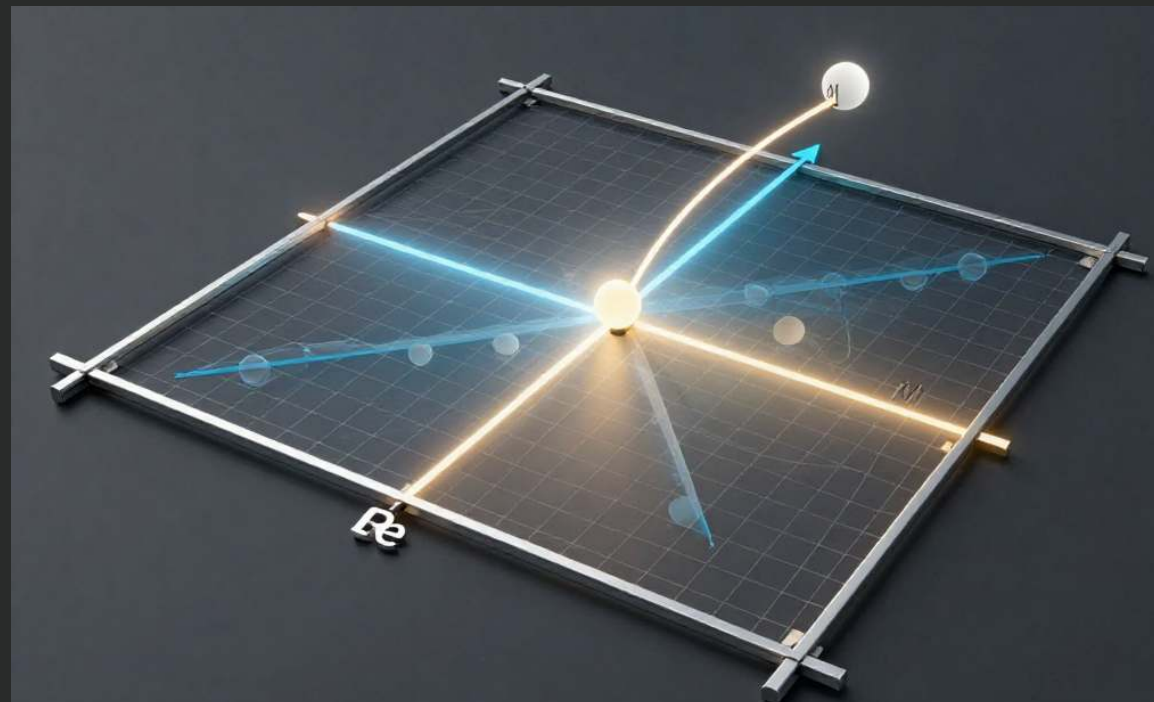
Если $b=0$, комплексное число становится действительным. Если $a=0$, получается чисто мнимое число вида bi . В обоих случаях геометрический образ лежит на одной из осей.

4

Плоскость Аргана

Оси координат

На плоскости Аргана горизонтальная ось $\text{Re}(z)$ отражает действительную часть числа, а вертикальная ось $\text{Im}(z)$ — мнимую часть. Так запись сразу связывается с обычной системой координат.



Точка и вектор

Числу $z=a+bi$ соответствует точка $M(a, b)$ и радиус-вектор OM , проведённый из начала координат. Оба образа показывают одно и то же число, но с разных геометрических сторон.

Знаки координат

Положение точки в той или иной четверти зависит от знаков a и b . Поэтому по изображению можно быстро определить, где находится число: справа или слева, выше или ниже оси.

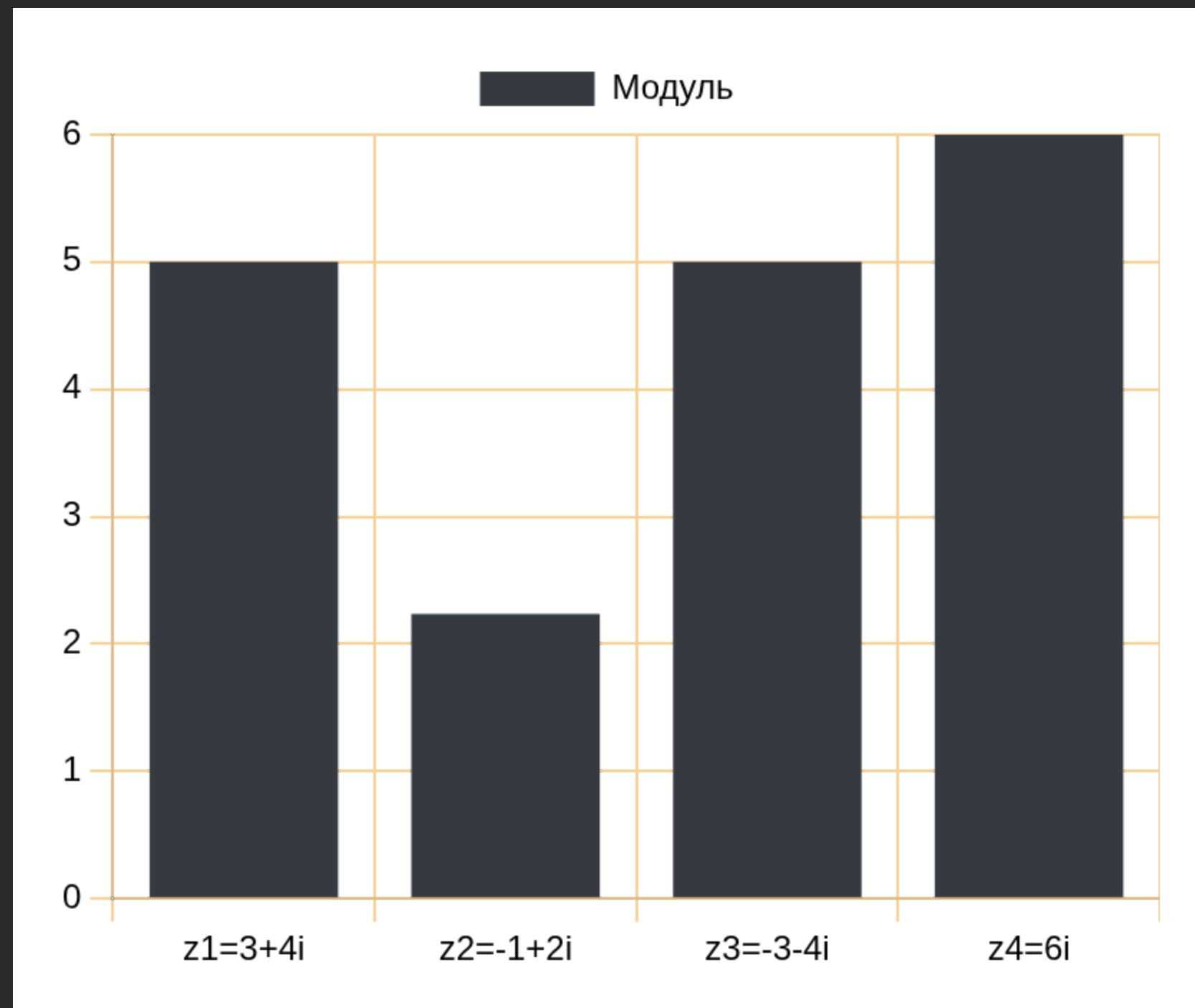
Связь с модулем

Расстояние от начала координат до точки M равно модулю комплексного числа. Чем дальше точка от начала, тем больше её модуль, независимо от направления к осям.

Наглядность модели

Плоскость Аргана позволяет видеть комплексное число не только как запись, но и как объект с направлением и длиной. Это делает дальнейшие операции намного понятнее.

Модуль комплексного числа на примерах



Сравнение показывает, что модуль зависит только от расстояния до начала координат, а не от знаков координат.

Наибольший модуль у $6i$; числа $3 + 4i$ и $-3 - 4i$ имеют одинаковую длину, хотя расположены в разных четвертях.

Школьный курс алгебры 11 класса;
вычисления по формуле $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Формула модуля и связь с теоремой Пифагора

01 Основная формула

Для числа $z=a+bi$ модуль вычисляют по формуле $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$. Она показывает, что модуль зависит от обеих координат и всегда является неотрицательным числом.

02 Геометрический смысл

На плоскости Аргана модуль равен длине радиус-вектора OM , проведённого к точке $M(a, b)$. Поэтому алгебраическая формула и геометрическая длина описывают один и тот же объект.

03 Прямоугольный треугольник

Если из точки M опустить перпендикуляры на оси, получится прямоугольный треугольник. Его катеты равны $|a|$ и $|b|$, а гипотенуза соответствует модулю комплексного числа.

04 Связь с Пифагором

Формула модуля фактически повторяет теорему Пифагора. Именно поэтому комплексные числа удобно изучать через координаты: их свойства становятся продолжением знакомой школьной геометрии.

Аргумент и угол положения

Что такое аргумент

Аргумент комплексного числа — это угол между положительным направлением оси $\text{Re}(z)$ и радиус-вектором OM . Он показывает не длину, а именно направление числа на плоскости.

Не единственное значение

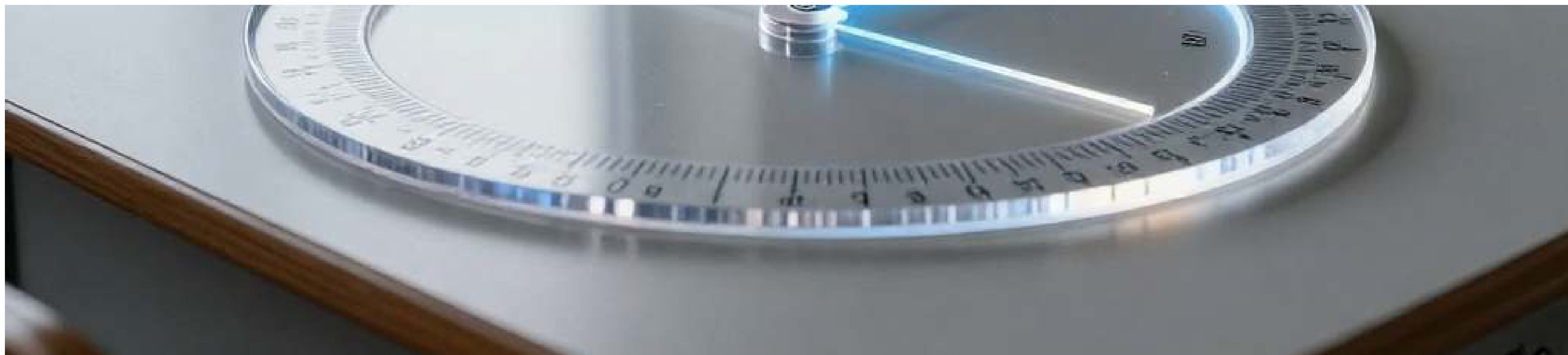
Для одного и того же числа аргумент можно задать по-разному: к нему прибавляют или вычитают $2\pi k$, где k — целое число. Все такие значения равноправны.

Главное значение

Чтобы избежать бесконечного множества вариантов, часто выбирают главное значение аргумента. Его удобно брать в пределах от $-\pi$ до π или от 0 до 2π .

Геометрическое чтение

По аргументу можно быстро понять, в каком направлении расположен вектор, а значит — в какой части плоскости находится число. Это особенно полезно при работе с тригонометрической формой.



Основные формы записи комплексного числа

Форма	Вид	Удобство	Смысл
Алгебраическая	$z=a+bi$	Сложение, вычитание	Координаты точки
Тригонометрическая	$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$	Умножение, степени	Модуль и аргумент
Показательная	$re^{i\varphi}$	Произведения, краткая запись	Компактный вид

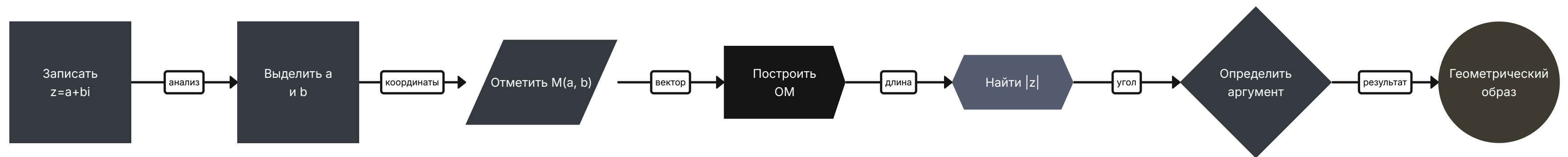
Школьный курс алгебры 11 класса.

Одна и та же величина может быть записана по-разному в зависимости от задачи.

Алгебраическая форма удобна для координатных действий, а тригонометрическая и показательная — для операций, где важны модуль и угол.

Как построить изображение комплексного числа

Последовательность действий при переводе записи $z=a+bi$ в геометрический образ.



Сложение комплексных чисел

Складывание координат

Если $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$, то при сложении отдельно складывают действительные и мнимые части: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$. Это делает вычисление прозрачным.

1

Геометрическая интерпретация

На плоскости Аргана сложение соответствует правилу параллелограмма или последовательному переносу радиус-векторов. Результат находится там, куда приводит совместное действие обоих векторов.

2

Что важно помнить

При сложении не смешивают координаты разных типов: горизонтальная часть прибавляется к горизонтальной, вертикальная — к вертикальной. Именно поэтому геометрический смысл полностью совпадает с алгебраическим правилом.

3

Умножение и поворот на плоскости

Изменение масштаба

При умножении на действительное число радиус-вектор либо удлиняется, либо укорачивается. Если множитель положительный, направление сохраняется; если отрицательный, к изменению длины добавляется разворот на 180° .

Поворот через тригонометрическую форму

Число вида $(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ действует как поворот на угол (φ) без изменения модуля. Геометрически точка лишь меняет направление, оставаясь на той же окружности.

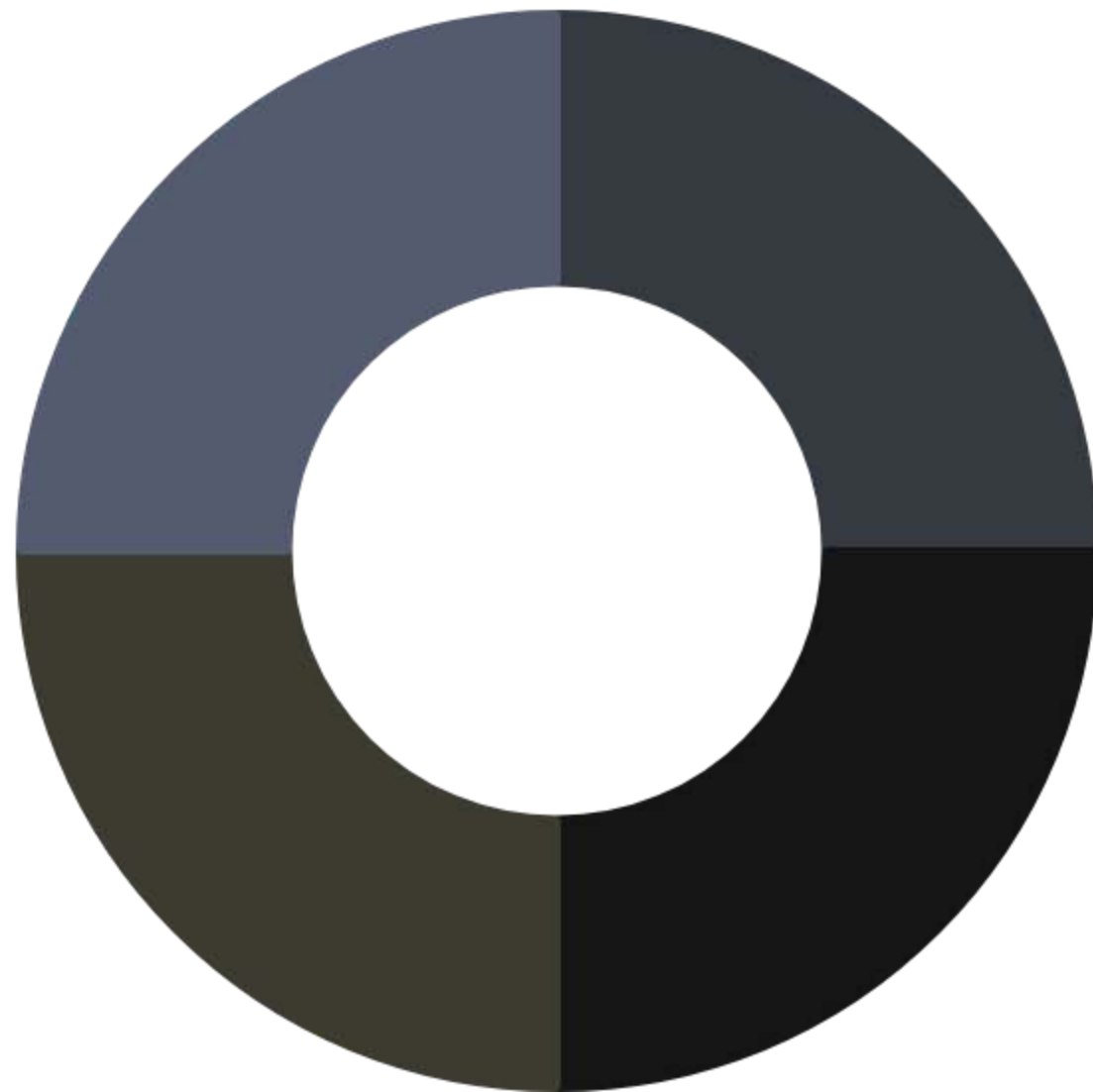
Произведение в показательной записи

В форме $(re^{i\varphi} \cdot se^{i\psi} = rs, e^{i(\varphi+\psi)})$ модуль умножается, а аргументы складываются. Поэтому последовательные умножения легко понимать как сочетание растяжения и вращения.



Что меняют разные операции над комплексными числами

Сложение Умножение на действительное
Умножение на i Сопряжение



Все операции по-разному преобразуют одну и ту же точку: смещают её, меняют длину радиус-вектора, поворачивают или зеркально отражают относительно оси.

Геометрический смысл помогает быстро отличать сдвиг, масштабирование, поворот и симметрию, не сводя действия только к алгебраическим формулам.

Школьный курс алгебры 11 класса,
геометрическая интерпретация комплексных чисел

Сопряжённое число и симметрия

01 Запись сопряжённого

Для числа $z=a+bi$ сопряжённое записывают как $\bar{z}=a-bi$.
Меняется только знак мнимой части, поэтому действительная часть остаётся прежней, а образ на плоскости отражается относительно оси $\text{Re}(z)$.

02 Геометрический смысл

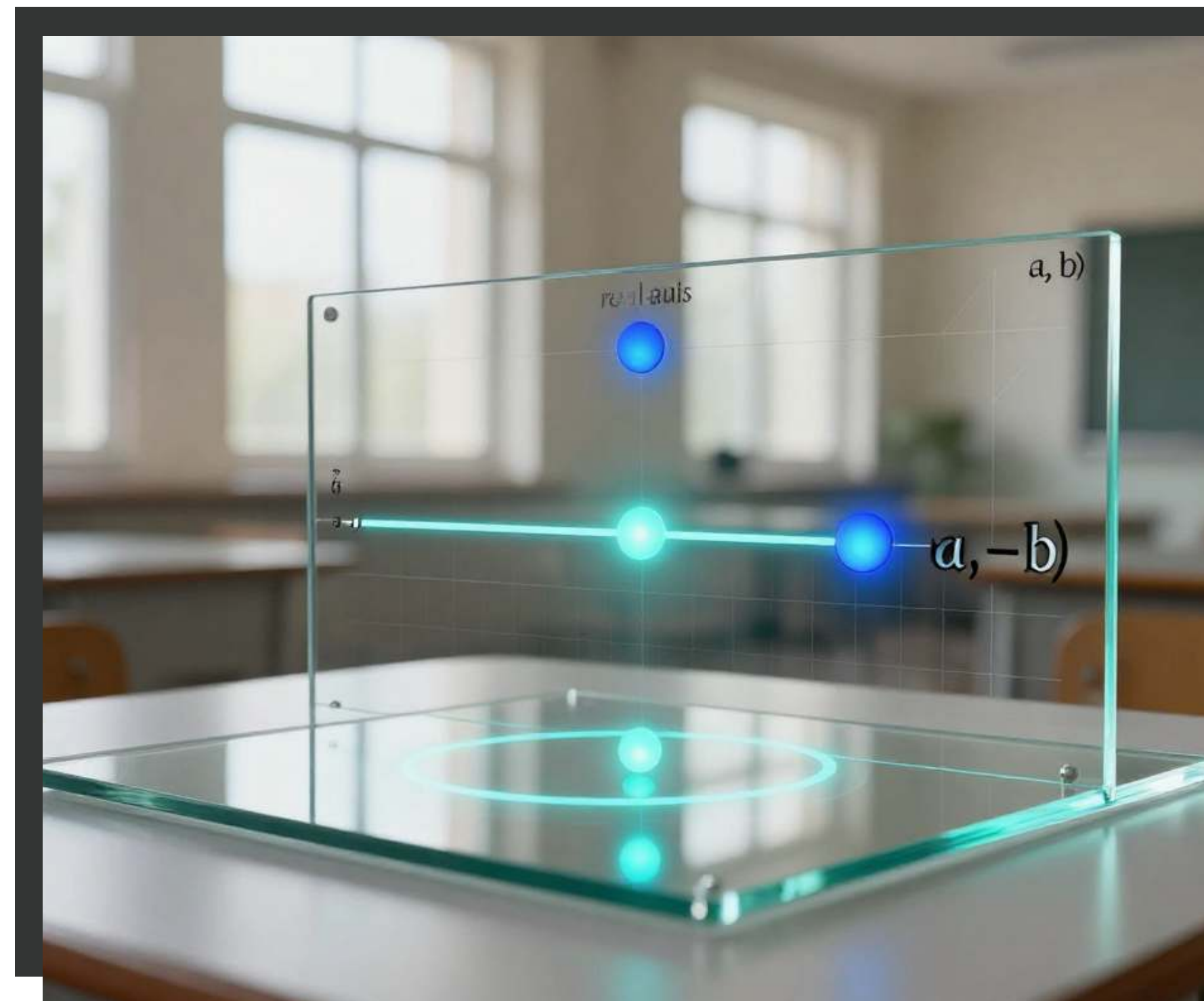
Точка $((a, b))$ переходит в $((a, -b))$. Это симметрия относительно действительной оси: расстояние до начала координат сохраняется, но положение по вертикали меняется на противоположное.

03 Связь с модулем

Произведение $(z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2)$. Следовательно, $|z|=\sqrt{z\bar{z}}$, и модуль можно находить через сопряжённое число без прямого обращения к координатам.

04 Практическое применение

Сопряжение удобно при дробях с комплексными числами и рационализации знаменателя. Оно позволяет убрать мнимую часть из знаменателя и упростить выражение до стандартного вида.



4 четверти

помогают сразу определить знаки
действительной и мнимой частей числа.

Разбиение плоскости
на четверти позволяет быстро
установить, где находится
комплексное число, даже
без вычислений. Источник:
школьный курс алгебры 11
класса.

Примеры комплексных чисел и их геометрический образ

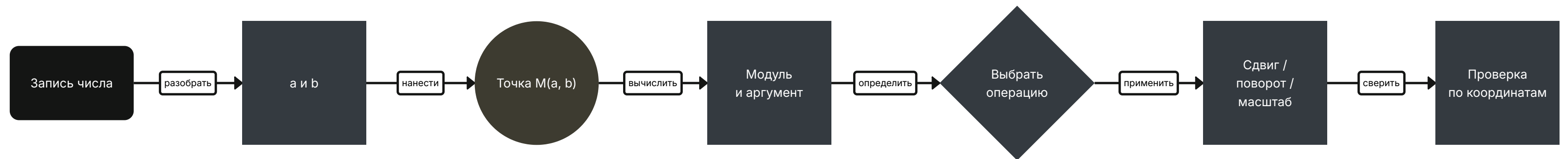
Число	Образ	Особенность
$2+3i$	$(2,3), \sqrt{13}$	I четверть
$-4+i$	$(-4,1), \sqrt{17}$	II четверть
$6i$	$(0,6), 6$	ось $\text{Im}(z)$

Таблица показывает, как запись числа сразу определяет его координаты, модуль и положение на плоскости.

Знак координат задаёт четверть, а модуль показывает расстояние до начала координат; числа на осях являются частными случаями изображения.

Алгоритм геометрического решения задач

Школьный курс алгебры 11 класса: работа с модулем, аргументом и основными операциями

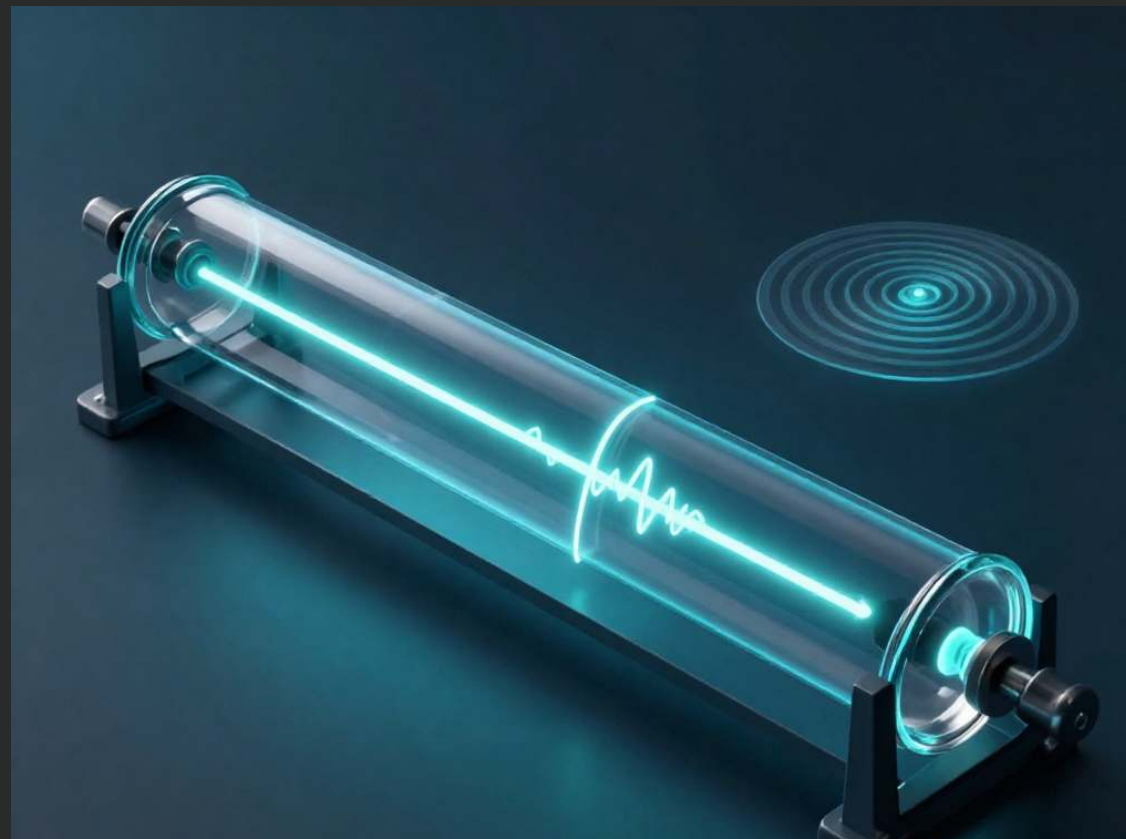


Применения комплексных чисел в физике и технике



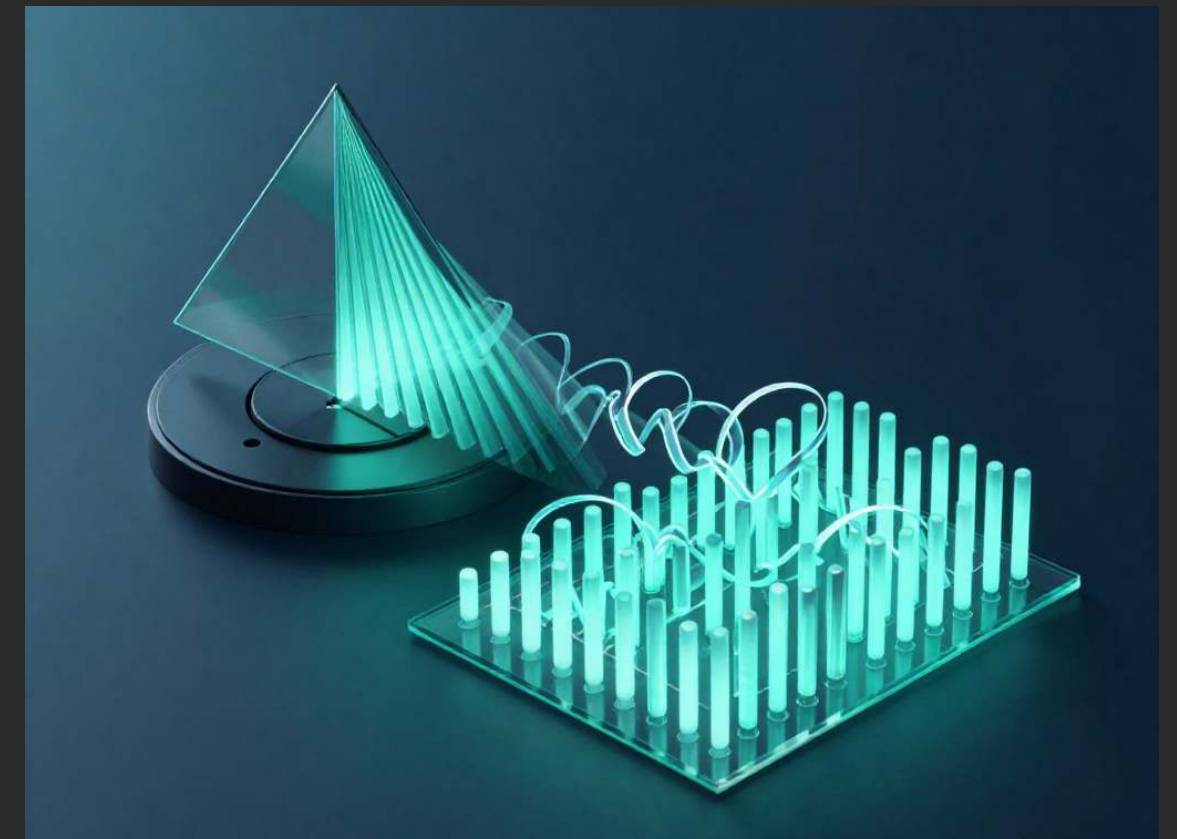
Переменный ток как вращающийся вектор

В электротехнике комплексные числа помогают описывать переменный ток, где важны амплитуда и фазовый сдвиг. Геометрическая модель превращает эти величины в наглядный вектор, который можно мысленно поворачивать на плоскости, сопоставляя его с синусоидой на графике.



Колебания и фаза

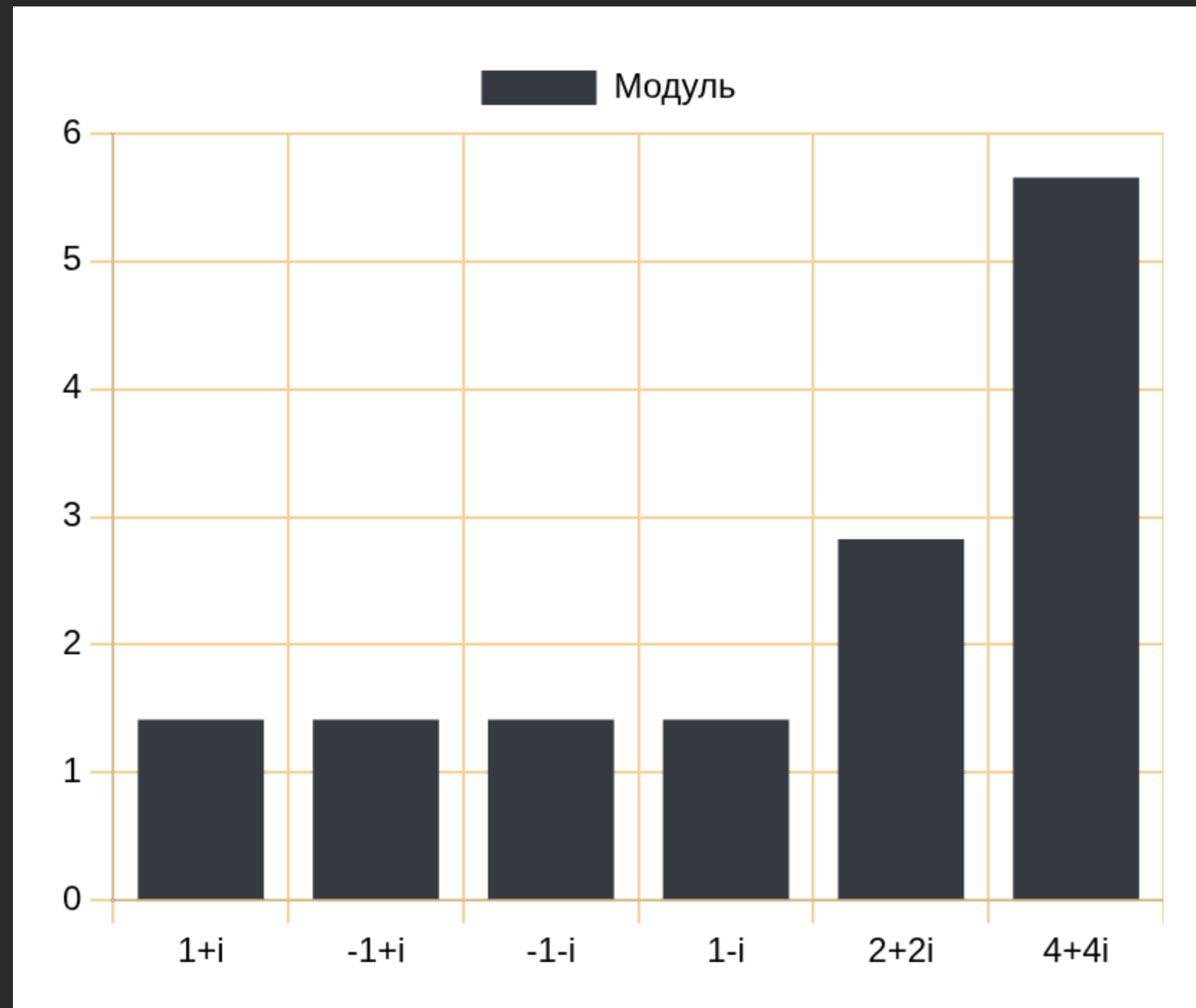
В теории колебаний комплексная запись удобна для анализа периодических процессов. Амплитуда показывает силу колебания, а аргумент отражает его фазу, поэтому одна и та же формула связывает движение маятника, звук и другие повторяющиеся явления.



Сигналы и спектр

В обработке сигналов комплексные числа позволяют разложить сложный сигнал на составляющие и исследовать их отдельно. На векторных диаграммах хорошо видно, как модуль отвечает за величину, а угол — за взаимное положение фазовых компонент.

Модуль и аргумент: независимые характеристики числа



На диаграмме видны числа с одинаковым модулем и числа с общим направлением, но разной длиной радиус-вектора.

Модуль и аргумент задают разные стороны одного объекта: длину и направление. Поэтому одинаковое значение одной характеристики не определяет другую.

Школьный курс алгебры 11 класса

Преимущества геометрического подхода



Связь с координатами

Геометрическая модель соединяет алгебру с координатной плоскостью: число перестаёт быть только формулой и становится точкой, которую можно увидеть, сравнить и измерить.



Понятный модуль и аргумент

Длина радиус-вектора и его направление приобретают ясный смысл. Это облегчает понимание модуля, аргумента и их роли в записи комплексного числа.



Ясные операции

Сложение, умножение, деление и сопряжение легче интерпретировать как сдвиг, поворот, растяжение или отражение. Такой взгляд помогает избежать формального заучивания.



Основа для дальнейших тем

Геометрическая интерпретация особенно важна при изучении тригонометрической и показательной форм, а также при выводе формулы Муавра и степеней комплексных чисел.

Комплексное число: формула, точка, вектор

Комплексные числа становятся понятными, когда число, точка и вектор рассматриваются как одна и та же сущность. Такой взгляд делает вычисления наглядными и запоминающимися.