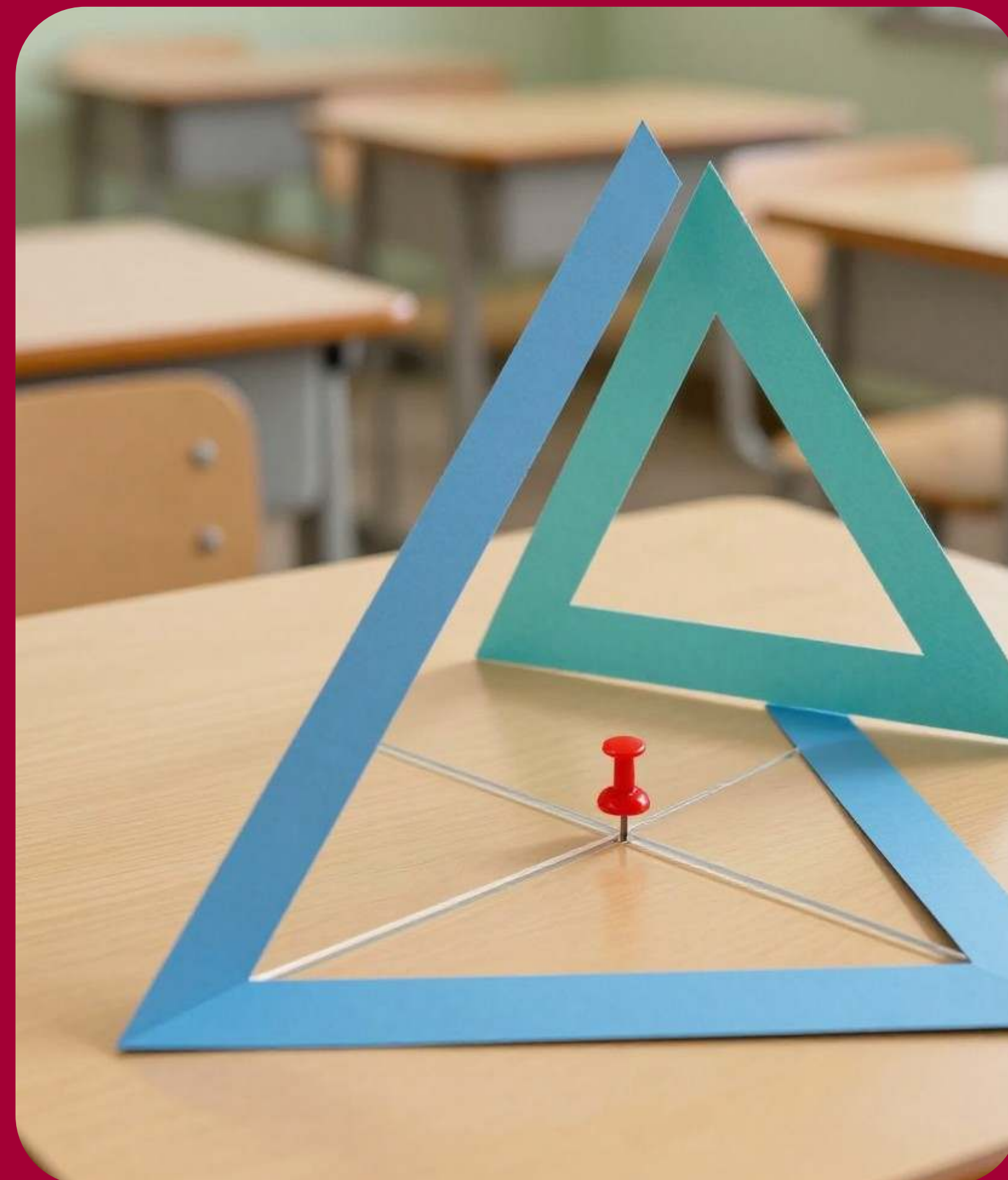


Понятие гомотетии в геометрии

Гомотетия: форма сохраняется,
а размер меняется.



Где встречается гомотетия и зачем она нужна

Гомотетия показывает, как одна и та же фигура может быть больше или меньше, не меняя формы. Она помогает понимать подобие, масштаб и построение моделей, карт, схем и чертежей.



Определение гомотетии

01

Центр преобразования

Точку O называют центром гомотетии. Именно от неё отсчитывают положение каждой точки исходной фигуры и её образа при преобразовании.

02

Связь точек

Каждой точке A ставят в соответствие точку A' на луче OA так, чтобы расстояние до образа изменялось по одному правилу для всей фигуры.

03

Коэффициент k

Число k называют коэффициентом гомотетии. Оно задаёт, во сколько раз меняется размер: при $k > 1$ фигура увеличивается, при $0 < k < 1$ уменьшается.

04

Случай $k = 1$

Если $k = 1$, образ совпадает с исходной фигурой. Это означает, что преобразование не изменяет ни размер, ни положение точек относительно центра.

Центр гомотетии и положение точек

Одна прямая

Точка, центр O и её образ всегда лежат на одной прямой. Поэтому направление от центра к точке сохраняется, а меняется только расстояние.

Единое правило

Для всех точек фигуры расстояние от центра до образа изменяется одинаково по коэффициенту. Это делает гомотетию строгим и предсказуемым преобразованием.

Удобная схема

На рисунке удобно показать центр O , лучи к вершинам треугольника и новые положения этих вершин. Тогда сразу видно, что соответствующие точки лежат на тех же направлениях.



Как влияет коэффициент гомотетии

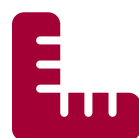
k	Результат	Смысл
2	Увеличение	В 2 раза
1	Без изменения	Фигура та же
$0 < k < 1$	Уменьшение	Меньше исходной
-1	Центральная симметрия	На другую сторону

Значение коэффициента показывает, как меняются размер фигуры и направление расположения её образа.

Модуль коэффициента задаёт изменение размера, а знак определяет, на каком луче окажется образ точки.

Правило гомотетии: результат зависит от модуля и знака коэффициента.

Что сохраняется при гомотетии



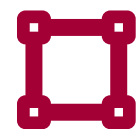
Углы не меняются

Гомотетия сохраняет величины углов, поэтому форма фигуры остаётся той же. Именно это свойство позволяет говорить о подобии фигур и сравнивать их без искажения.



Пропорции сторон

Соответствующие стороны после преобразования остаются пропорциональными. Если одна сторона была вдвое больше другой, то это соотношение сохранится и в образе фигуры.



Параллельность прямых

Параллельные прямые после гомотетии остаются параллельными. Это важно при построении чертежей и геометрических моделей, где нужно сохранить общий вид фигуры.



Периметр и площадь

Периметр изменяется в $|k|$ раз, а площадь — в k^2 раз. Поэтому площадь растёт или уменьшается быстрее, чем длина сторон, особенно при больших коэффициентах.

Построение образа фигуры при гомотетии

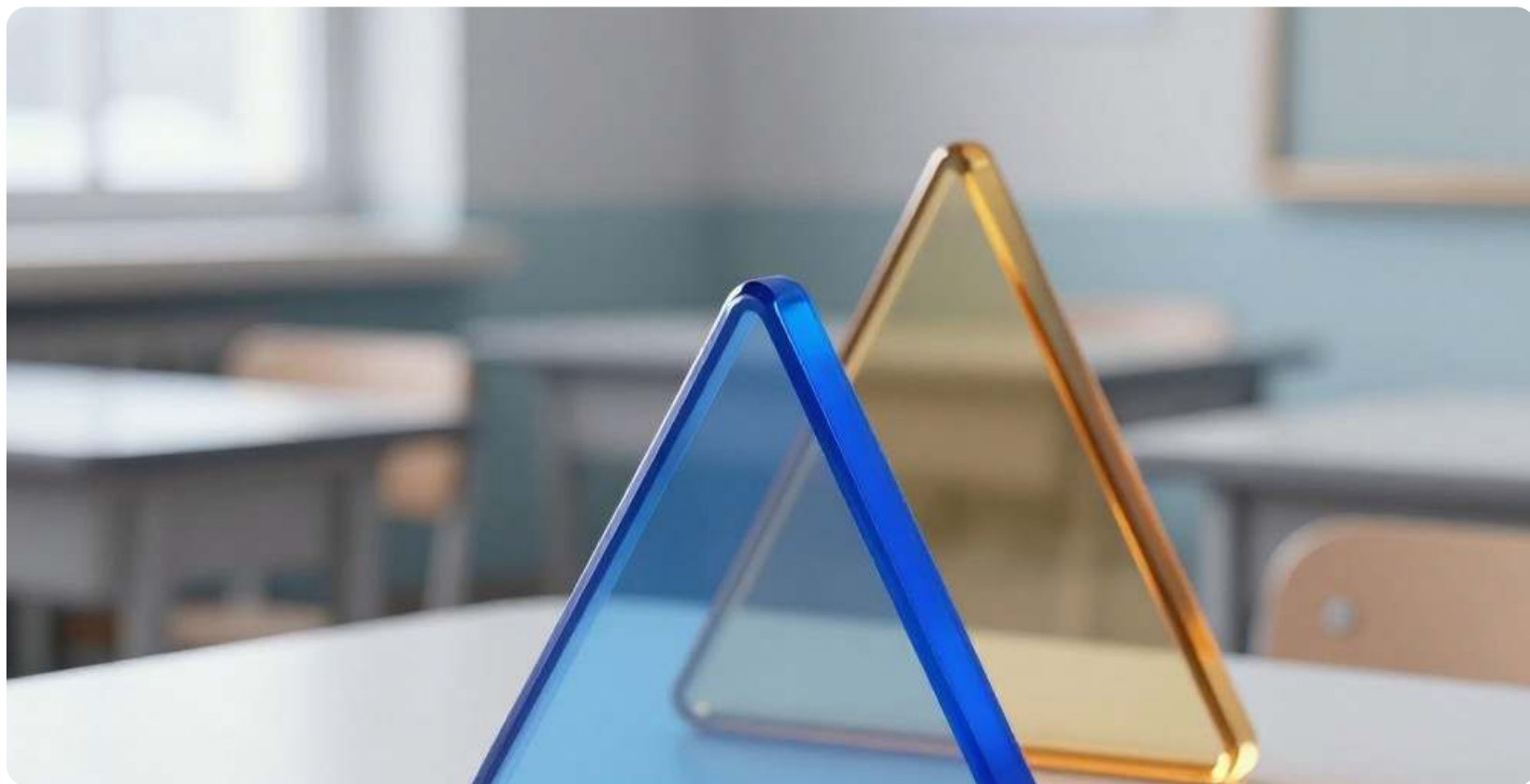
Схема показывает последовательность геометрического построения образа фигуры.



Гомотетия треугольника

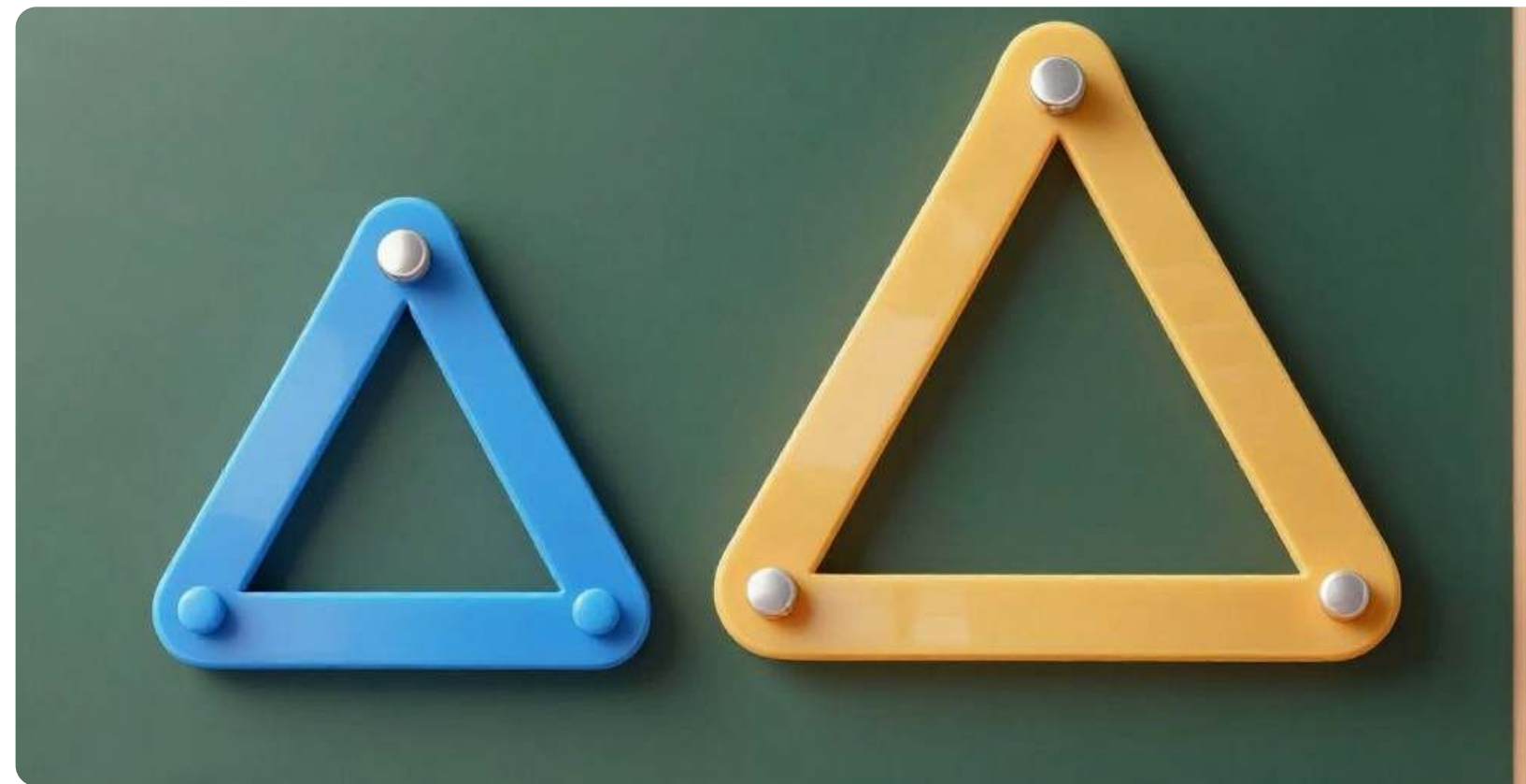
Треугольник и его увеличенная копия

На рисунке можно показать один треугольник и его образ, построенный из того же центра гомотетии. При коэффициенте 3 каждая сторона станет втрое длиннее, но все углы сохранятся. Такой пример наглядно объясняет, почему фигуры остаются похожими.



Один центр — два размера

Полезно изобразить исходный треугольник рядом с увеличенным вариантом и провести лучи от центра к вершинам. Тогда видно, что соответствующие вершины лежат на одних направлениях, а расстояния до них изменяются по одному и тому же правилу.

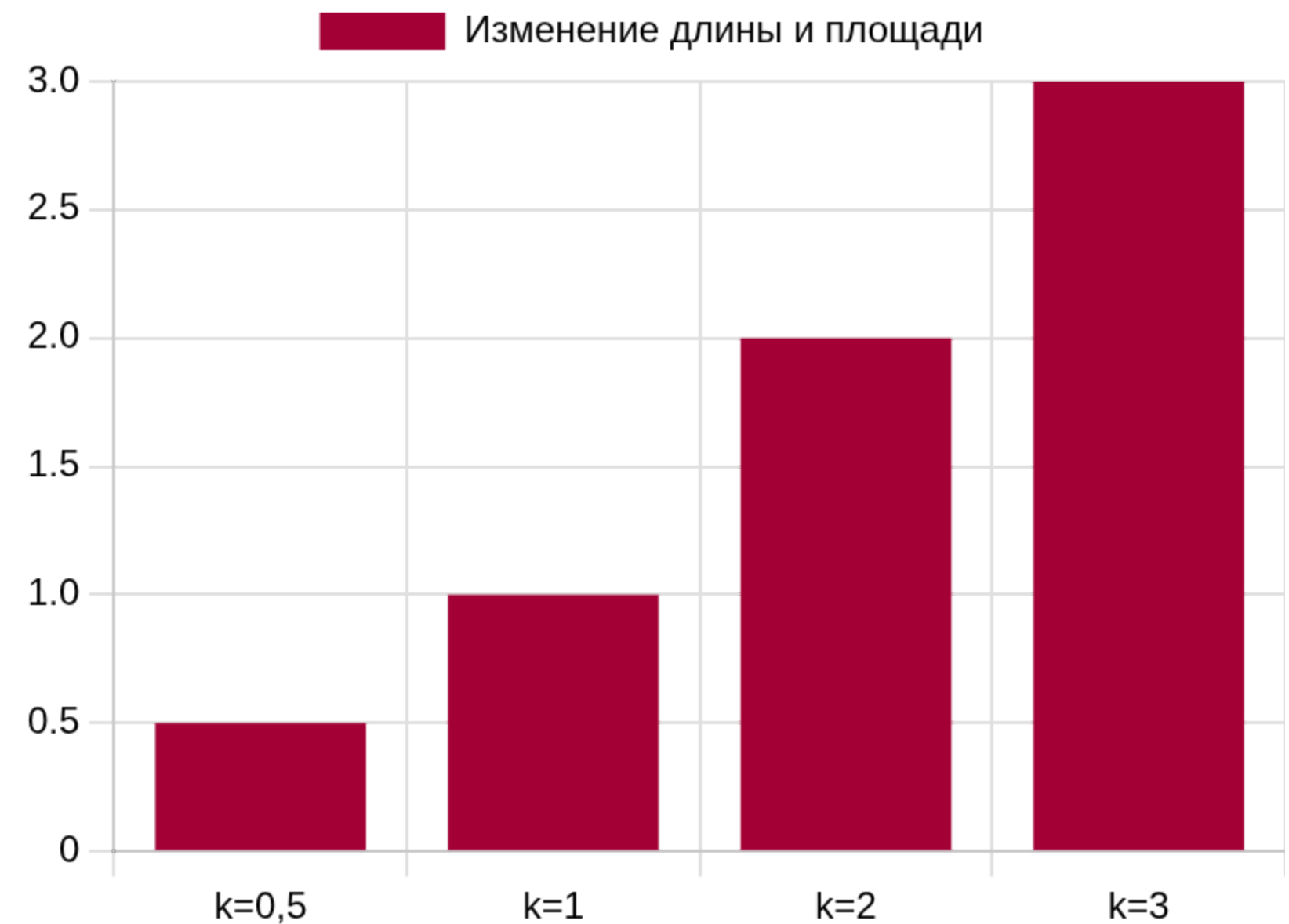


Как меняются длина и площадь при разных коэффициентах

Диаграмма помогает сравнить, как один и тот же коэффициент влияет на линейные размеры и на площадь фигуры.

Рост площади происходит быстрее, чем рост длины: при увеличении коэффициента эффект становится заметно сильнее.

Учебные правила гомотетии и зависимости линейных размеров и площадей от коэффициента k .



Гомотетия и подобие фигур

01

Связь с подобием

Если одна фигура получена из другой гомотетией, то они подобны. Это значит, что форма совпадает, а отличаться могут только размеры.

02

Что сохраняется

У подобных фигур равны соответствующие углы и пропорциональны стороны. Поэтому гомотетия удобно объясняет, почему два многоугольника могут быть одинаковыми по виду.

03

Зачем это нужно

В школьных задачах гомотетия помогает сравнивать треугольники, квадраты и другие фигуры. Она показывает, как по одному чертежу получить другой, сохранив точность построения.

Отрицательный коэффициент гомотетии

○ Противоположная сторона

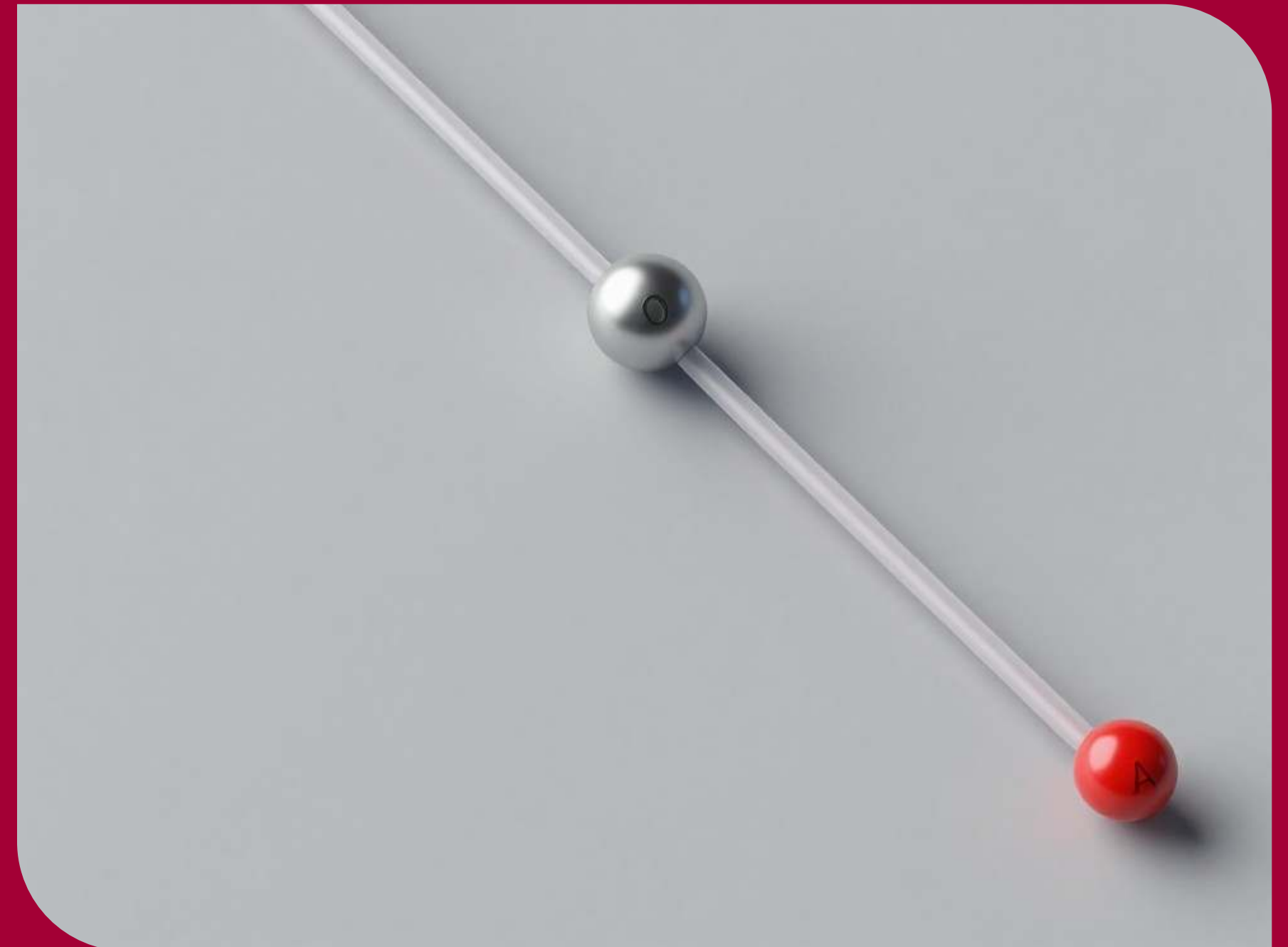
При отрицательном коэффициенте образ точки оказывается не на том же луче, а по другую сторону от центра. Направление меняется, но расстояние от центра умножается на модуль коэффициента.

○ Связь с симметрией

Случай $k = -1$ особенно важен: точка переходит в положение, симметричное относительно центра. Поэтому гомотетию с отрицательным коэффициентом удобно сравнивать с центральной симметрией.

○ Знак и модуль

Знак коэффициента определяет, куда направлен образ точки, а модуль показывает, во сколько раз изменяется расстояние. Это правило помогает быстро строить фигуры без ошибок.



Примеры в координатах

Точка	k	Образ
A(2; 1)	2	A'(4; 2)
B(-3; 2)	0,5	B'(-1,5; 1)
C(1; -4)	-1	C'(-1; 4)

Для центра в начале координат координаты образа получают умножением на коэффициент гомотетии.

При центре в начале координат координаты изменяются одинаково по обеим осям, а отрицательный коэффициент дополнительно меняет направление на противоположное.

Составлено по правилу гомотетии с центром O(0; 0).

Связь коэффициента и результата преобразования

На диаграмме показано изменение площади, выраженное через квадрат модуля коэффициента. Для длины достаточно самого коэффициента, а для площади изменение заметно сильнее.

Чем больше модуль коэффициента, тем сильнее изменяется фигура. Отрицательные значения меняют направление, но величину изменения определяет только модуль.

Данные получены из правил гомотетии: длина — $|k|$, площадь — k^2 .



Гомотетия в окружающей жизни

01

Карты и планы

На картах и планах одно и то же место изображают в уменьшенном виде, сохраняя форму объектов. Масштаб показывает, во сколько раз чертёж отличается от реальности.

02

Модели и макеты

Архитектурные макеты, модели машин и учебные пособия помогают увидеть объект целиком. Их размеры меняются, но пропорции остаются такими же, как у настоящего предмета.

03

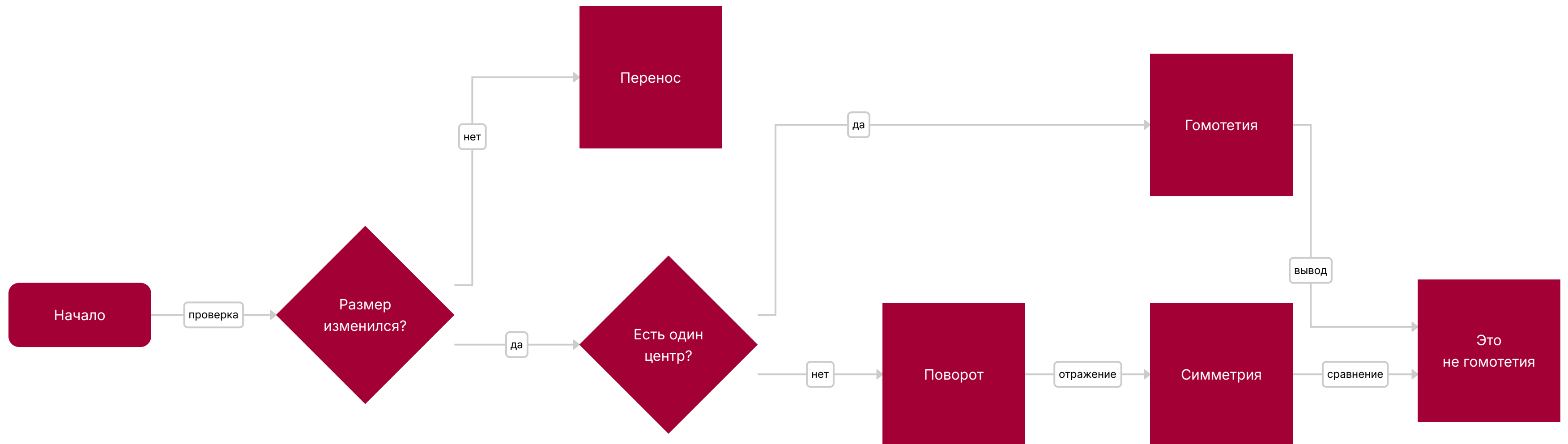
Цифровые изображения

При увеличении или уменьшении рисунков в компьютере важно сохранить узнаваемую форму. Именно поэтому гомотетия лежит в основе работы с изображениями, схемами и визуальными моделями.



Как отличить гомотетию от других преобразований

Схема сравнивает основные преобразования по тому, что они сохраняют и как изменяют фигуру.



Типичные ошибки при изучении темы

Путают центр

Часто центр гомотетии принимают за центр окружности или середину отрезка. На самом деле это точка, относительно которой строятся все лучи к исходной фигуре и её образу.

Нарушают направление

Иногда длину увеличивают правильно, но точку ставят не на том луче. При гомотетии положение образа обязательно связано с центром, иначе построение становится неверным.

Забывают про случай $k = 0$

Нулевой коэффициент переводит все точки в центр, но в школьных задачах такой случай обычно не рассматривают как обычную гомотетию. Его нужно отличать от стандартных построений.

Смешивают преобразования

Гомотетию легко спутать с поворотом или отражением. Главный признак верного ответа — сохранение формы при одинаковом изменении размеров для всех точек фигуры.



Где применяется масштабирование

Масштабирование нужно везде, где важно сохранить узнаваемые пропорции: от бумажных чертежей до экранных изображений и учебных моделей.

Наибольшая доля примеров связана с картами и цифровой графикой, потому что там чаще всего требуется точное изменение размера без искажения формы.

Учебное обобщение основных областей применения масштабирования в геометрии.



Пример задачи на гомотетию

01

Найдём сторону

Сторона квадрата равна 4 см, а коэффициент гомотетии равен 1,5. Значит, каждая сторона образа увеличится в 1,5 раза и станет равной 6 см.

02

Посчитаем площадь

Площадь изменяется по правилу k^2 . Поэтому новый квадрат будет иметь площадь в 2,25 раза больше исходной, то есть увеличение происходит быстрее, чем рост стороны.

03

Сделаем вывод

Задача показывает разницу между линейным и площадным изменением. Даже небольшое увеличение коэффициента заметно сильнее влияет на площадь, чем на длину стороны.

Главные формулы и свойства гомотетии

Свойство	Результат
ОА'	$k \cdot OA$
Отрезки	$ k $
Периметр	$ k $ раз
Площадь	k^2 раз
Углы	сохраняются

В таблице собраны основные правила, которые помогают решать задачи на подобие и масштаб.

Гомотетия сохраняет форму фигуры, но изменяет её размер. Именно поэтому она тесно связана с подобием, пропорциями и построениями в масштабе.

Основные свойства гомотетии из школьного курса геометрии.

Гомотетия: форма остаётся, размер меняется

Гомотетия помогает увидеть, как одна и та же фигура может становиться больше или меньше, не теряя формы. Эти знания полезны и в задачах, и в повседневных измерениях.