

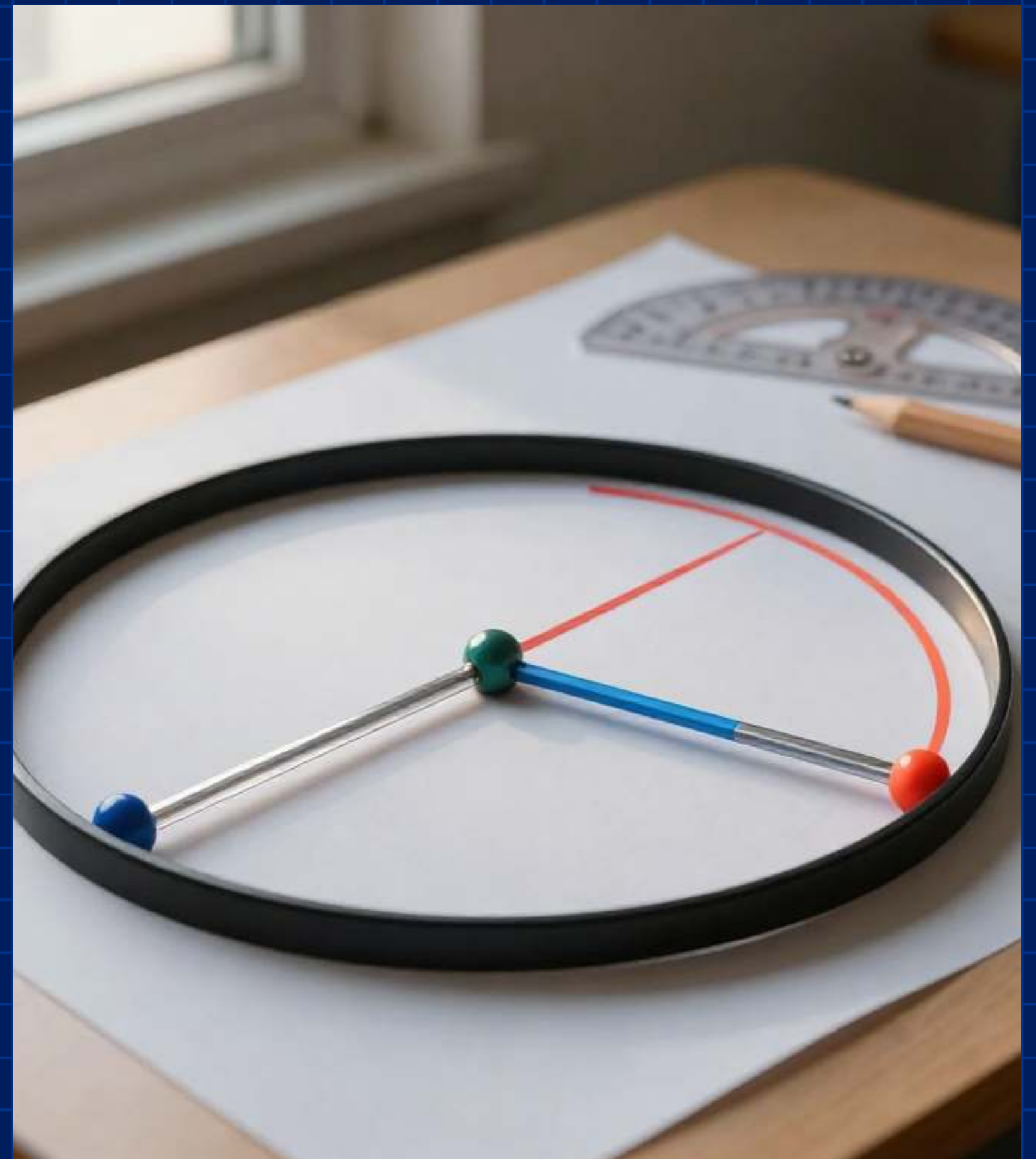
Определение тригонометрических функций центрального угла

Синус, косинус и углы на окружности: всё самое
важное в одной теме.

1 ÷ 2

log

8



Зачем в алгебре 8 класса нужно определение через окружность

4 1 2 9

Определение через треугольник удобно только для острых углов. Единичная окружность расширяет тригонометрию на любые углы и сразу показывает, как меняются значения при повороте луча вокруг центра координатной плоскости.

6 7



Центральный угол и единичная окружность

1

Что такое центральный угол

Центральный угол имеет вершину в центре окружности, а его стороны проходят по радиусам. Именно положение его конечной стороны определяет нужную точку на окружности.

2

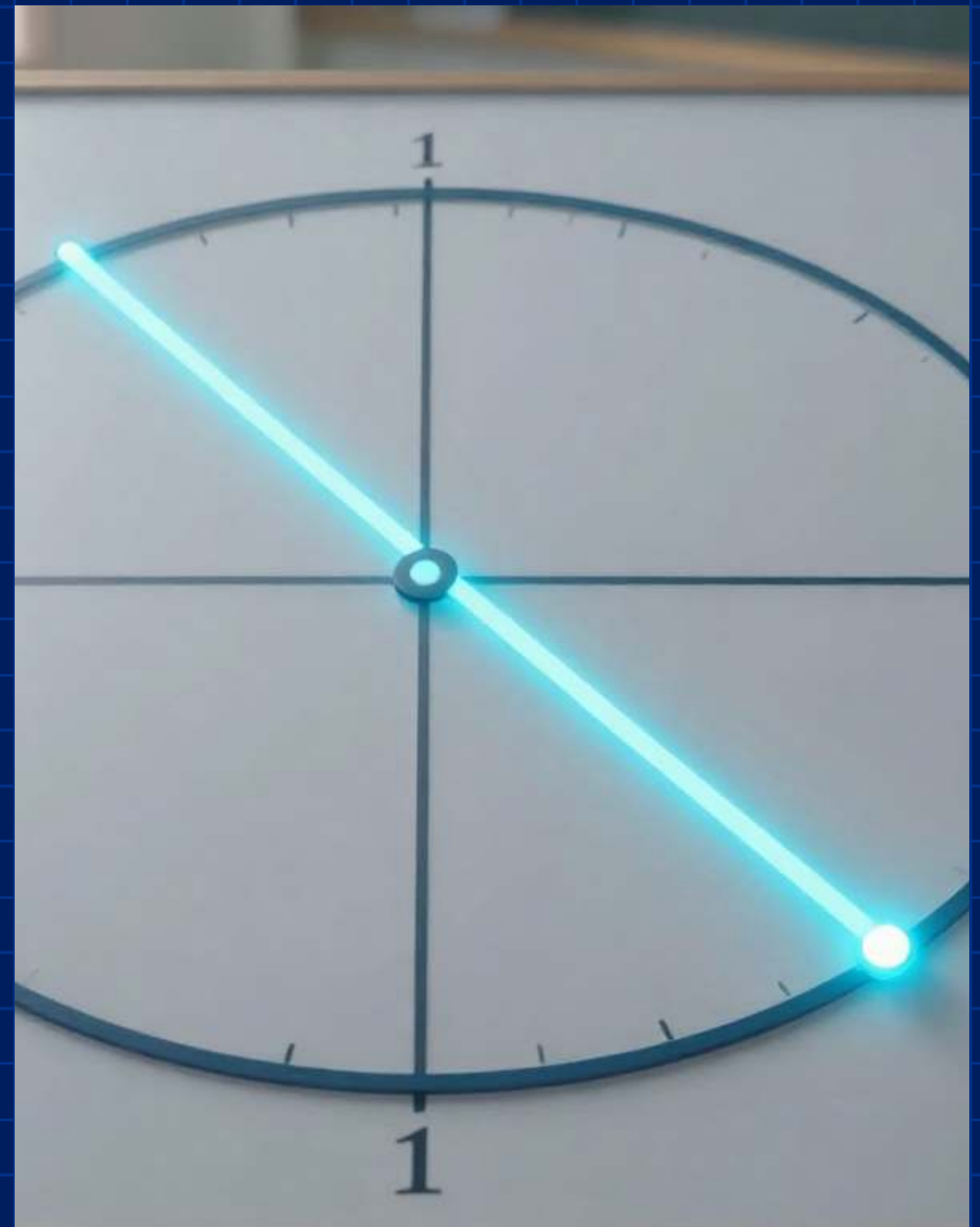
Единичная окружность

Единичная окружность — это окружность с центром в начале координат и радиусом 1. Такой выбор делает вычисления удобными: координаты точки сразу связаны с тригонометрическими функциями.

3

Координаты точки

Точка пересечения конечной стороны угла с окружностью имеет координаты x и y . Эти значения становятся основой для нахождения синуса, косинуса и связанных с ними функций.



Положение угла на координатной плоскости

Начальная сторона

За начало отсчёта принимают положительное направление оси Ox . От этого луча удобно откладывать все углы, потому что положение можно описать без лишних построений.

Положительное направление

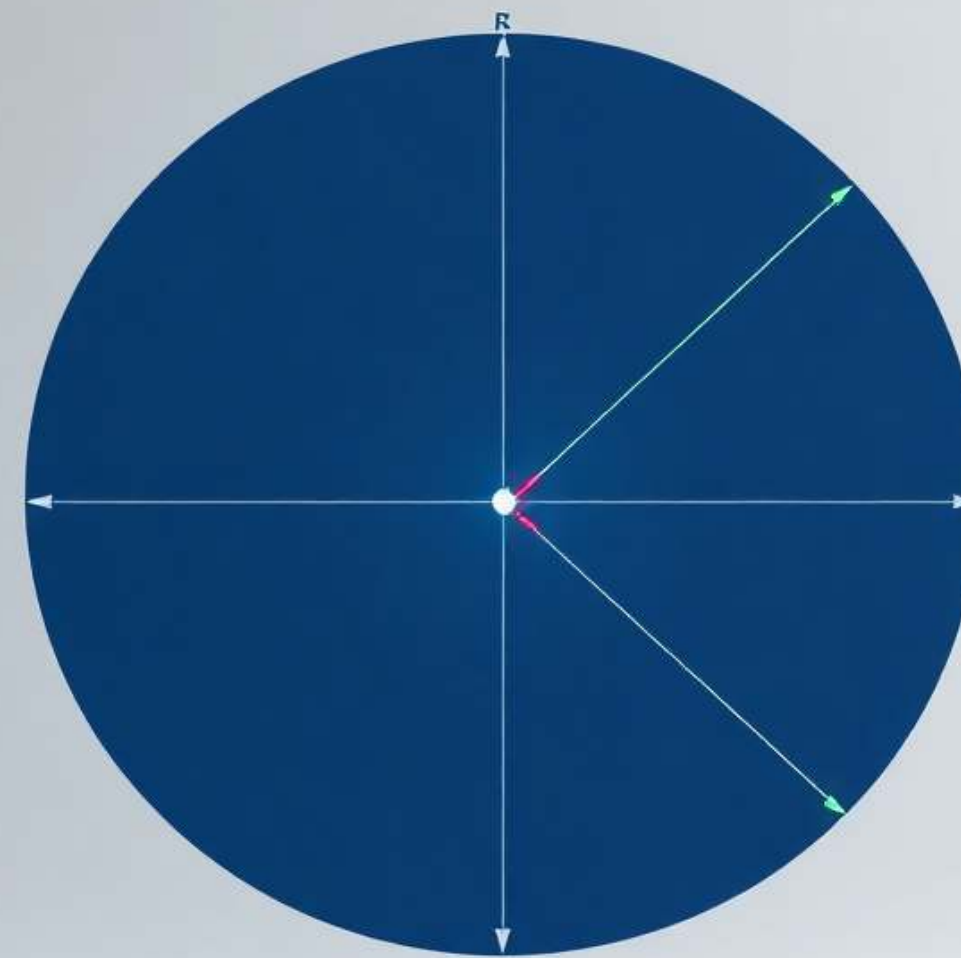
Положительный угол откладывается против часовой стрелки. Чем больше поворот луча, тем дальше конечная сторона уходит от начального положения на окружности.

Отрицательное направление

Отрицательный угол откладывается по часовой стрелке. Такое правило помогает работать не только с привычными углами, но и с поворотами в обратную сторону.

Главные ориентиры

На рисунке особенно важны центр, радиус, конечная сторона и точка пересечения с окружностью. Именно её координаты используются в формулах для тригонометрических функций.





Единичная окружность делает определение простым: x — это косинус, а y — синус. Это позволяет находить значения для любого угла, а не только для острых.

1

**радиус единичной
окружности, поэтому
координаты точки сразу
дают значения синуса
и косинуса.**

Определение единичной окружности и тригонометрических функций через координаты точки



Функции через координаты точки на единичной окружности

Функция	Формула	Значение	Условие
$\sin$	y	координата y	—
$\cos$	x	координата x	—
$\tan$	y/x	отношение координат	$x \neq 0$
$\cot$	x/y	отношение координат	$y \neq 0$

Определение тригонометрических функций через единичную окружность

Координаты точки на единичной окружности позволяют сразу записать значения основных тригонометрических функций и увидеть, когда возникает ограничение на деление.

Синус и косинус всегда определены, а тангенс и котангенс требуют проверки нулевых координат.

Знаки тригонометрических функций по четвертям



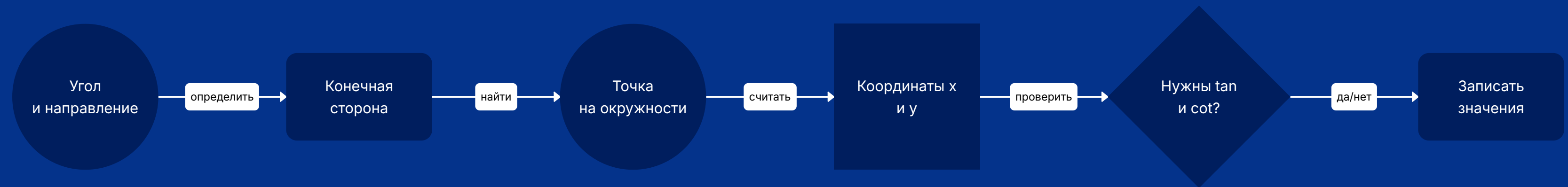
Правила знаков тригонометрических функций по четвертям координатной плоскости

Схема четвертей помогает мгновенно выбрать знак ответа, не вычисляя точное значение функции.

В I четверти положительны все функции, а в остальных четвертях — только часть из них, в зависимости от положения точки.

Как найти значения по центральному углу

Последовательность действий при работе с единичной окружностью и координатами точки



Радианная мера угла и её связь с окружностью

1

log



Полный оборот

Полный поворот вокруг центра равен 2π радиан. Это помогает сравнивать углы не по градусам, а по доле окружности, что особенно удобно в тригонометрии.



Развёрнутый угол

Развёрнутый угол соответствует π радиан. Такое обозначение часто встречается в задачах и помогает видеть связь между поворотом и длиной дуги на окружности.



Известные соответствия

Углы 90° , 60° и 45° записываются как $\pi/2$, $\pi/3$ и $\pi/4$. Эти значения нужно хорошо помнить, потому что они часто встречаются в задачах.

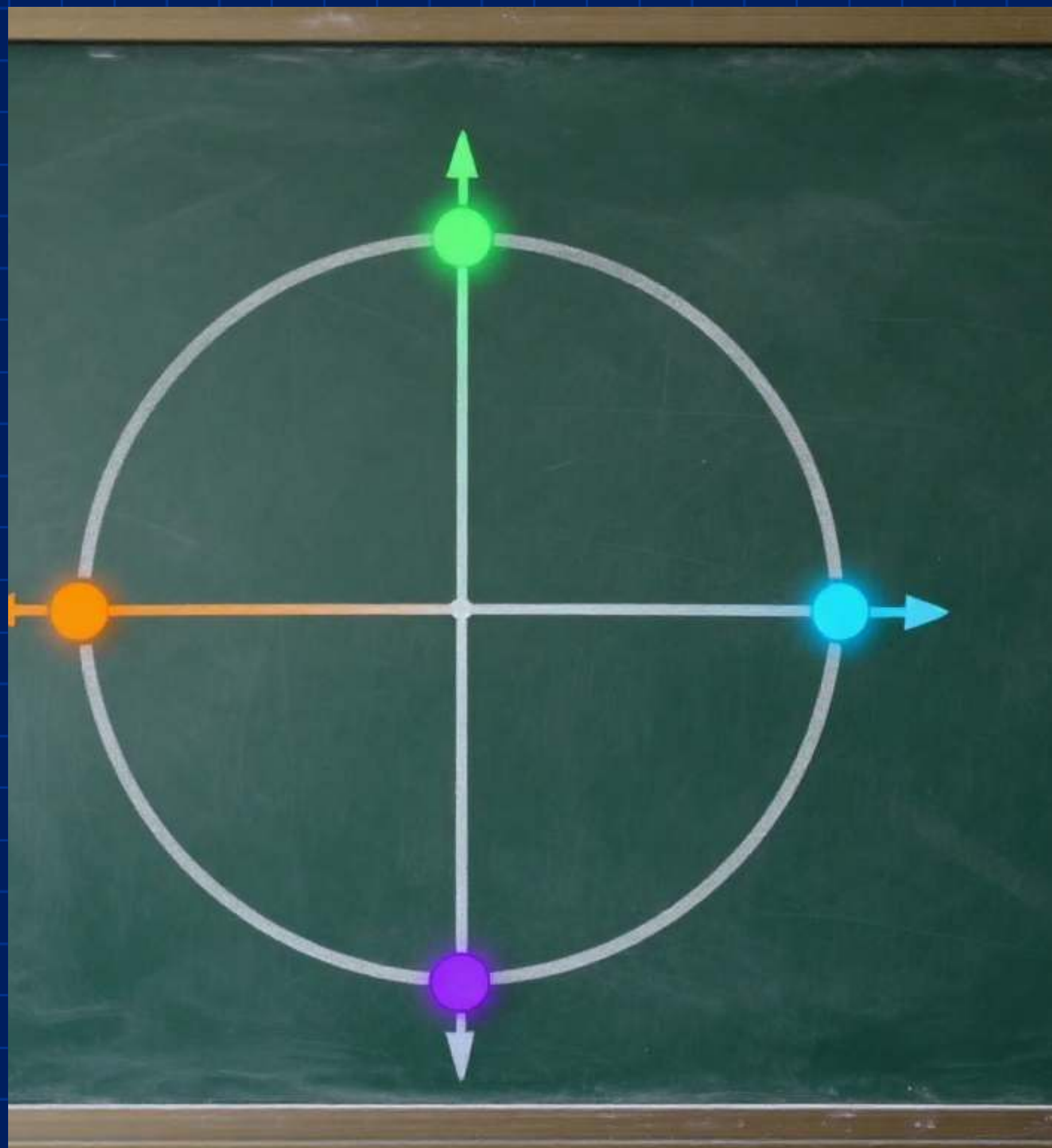


Почему радианы удобны

На единичной окружности длина дуги численно равна величине угла в радианах. Поэтому радианная мера естественно связывает угол, дугу и координаты точки.

2

x



Основные точки единичной окружности

tg ctg

0°

При нулевом угле конечная сторона совпадает с осью Ox , а точка на окружности имеет координаты $(1; 0)$. Здесь косинус равен 1, а синус — 0.

90°

При повороте на прямой угол точка переходит в положение $(0; 1)$. В этой точке синус равен 1, а косинус становится равным 0.

180°

После половины оборота точка оказывается слева от центра и имеет координаты $(-1; 0)$. Здесь синус снова равен 0, а косинус — -1.

270°

Ещё один прямой угол приводит точку вниз, в положение $(0; -1)$. На этом участке окружности синус равен -1, а косинус равен 0.

360°

Полный оборот возвращает точку в исходное положение $(1; 0)$. Это показывает, что значения тригонометрических функций повторяются после полного круга.

Основные значения синуса, косинуса и тангенса

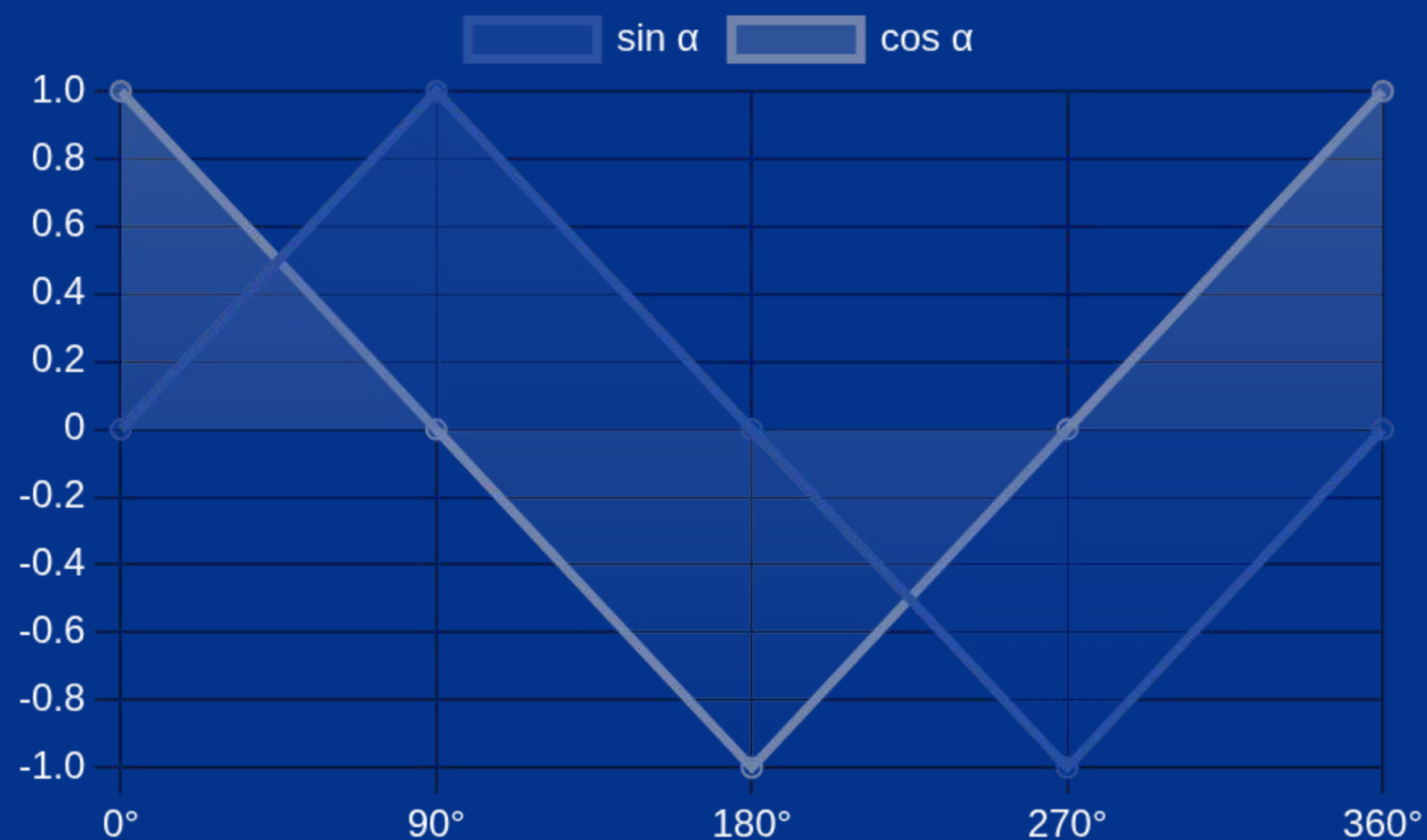
Угол	sin	cos	tan
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	—

Стандартные значения тригонометрических функций на единичной окружности

Значения для углов 0°, 30°, 45°, 60° и 90° часто используют как опорные при решении задач и проверке вычислений.

Удобнее всего запомнить эти углы как базовые ориентиры: по ним быстро находят остальные значения и проверяют ответ.

Как меняются синус и косинус при повороте луча



Единичная окружность; значения для 0°, 90°, 180°, 270° и 360°

На единичной окружности обе функции меняются плавно и повторяют свой ход после полного оборота, отражая движение точки по окружности.

Синус и косинус ведут себя периодически: их значения зависят от положения луча и возвращаются к исходным после 360°.

Отрицательные углы и повторяемость значений



Отрицательный поворот

Отрицательный угол откладывают по часовой стрелке от начальной стороны. Точка на окружности смещается в противоположном направлении, но правило чтения координат остаётся тем же.

Симметрия относительно осей

При отражении точки относительно осей меняются знаки координат. Поэтому для отрицательных углов одни функции сохраняют знак, а другие его меняют.

Период 360°

Если добавить или вычесть полный оборот, точка снова окажется в том же месте окружности. Значения тригонометрических функций поэтому повторяются через 360° .



Связь с прямоугольным треугольником

1 Построение треугольника

Для острого угла на единичной окружности можно провести перпендикуляр к оси Ox и получить прямоугольный треугольник. Его стороны помогают увидеть привычные отношения между углами и длинами.

2 Синус и косинус

В таком треугольнике синус равен отношению противолежащего катета к гипотенузе, а косинус — отношению прилежащего катета к гипотенузе. На единичной окружности гипотенуза равна 1.

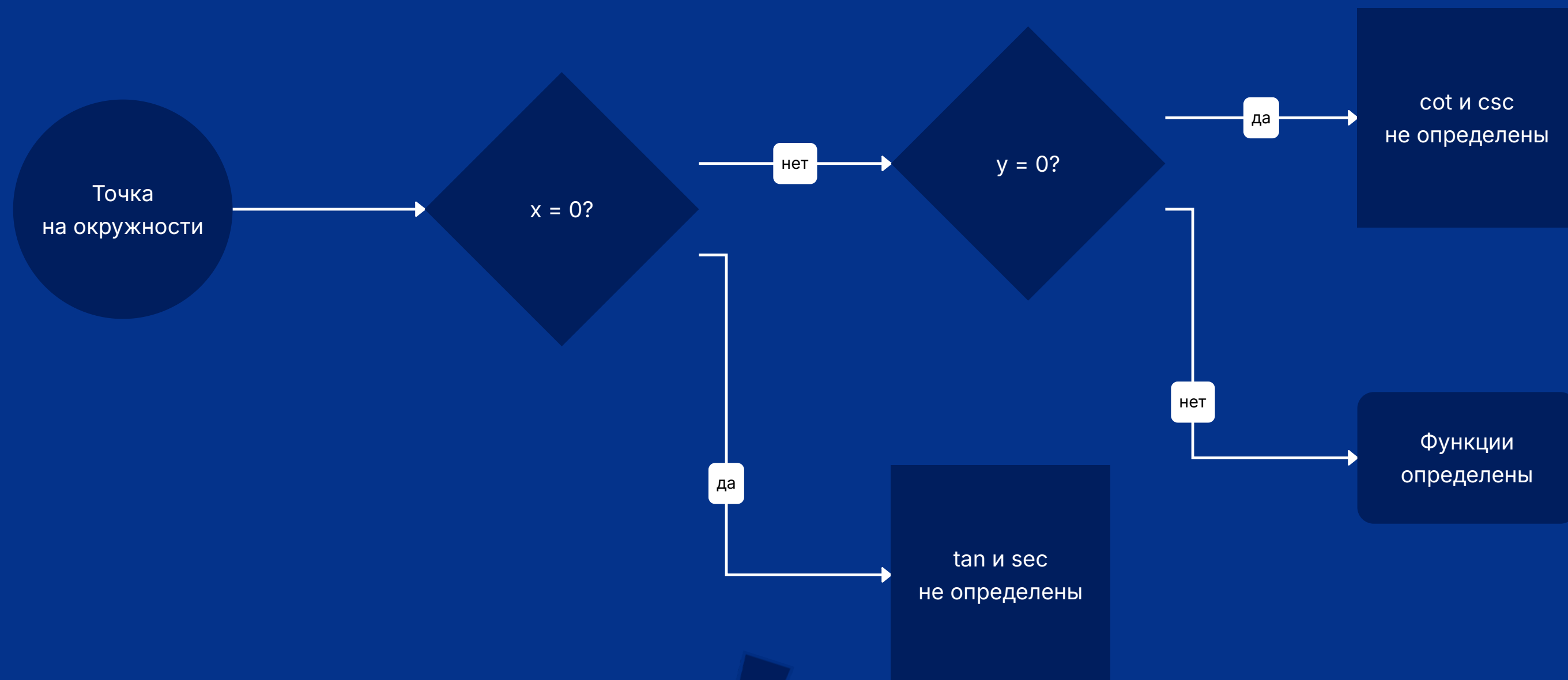
3 Почему это удобно

Поэтому координаты точки сразу становятся значениями функций: x соответствует косинусу, а y — синусу. Так определение через окружность и через треугольник согласуются между собой.



Проверка области определения тригонометрических функций

Алгоритм основан на координатах точки на единичной окружности и проверке деления на ноль.



Симметрия точек и свойства функций

Отражение относительно Ox

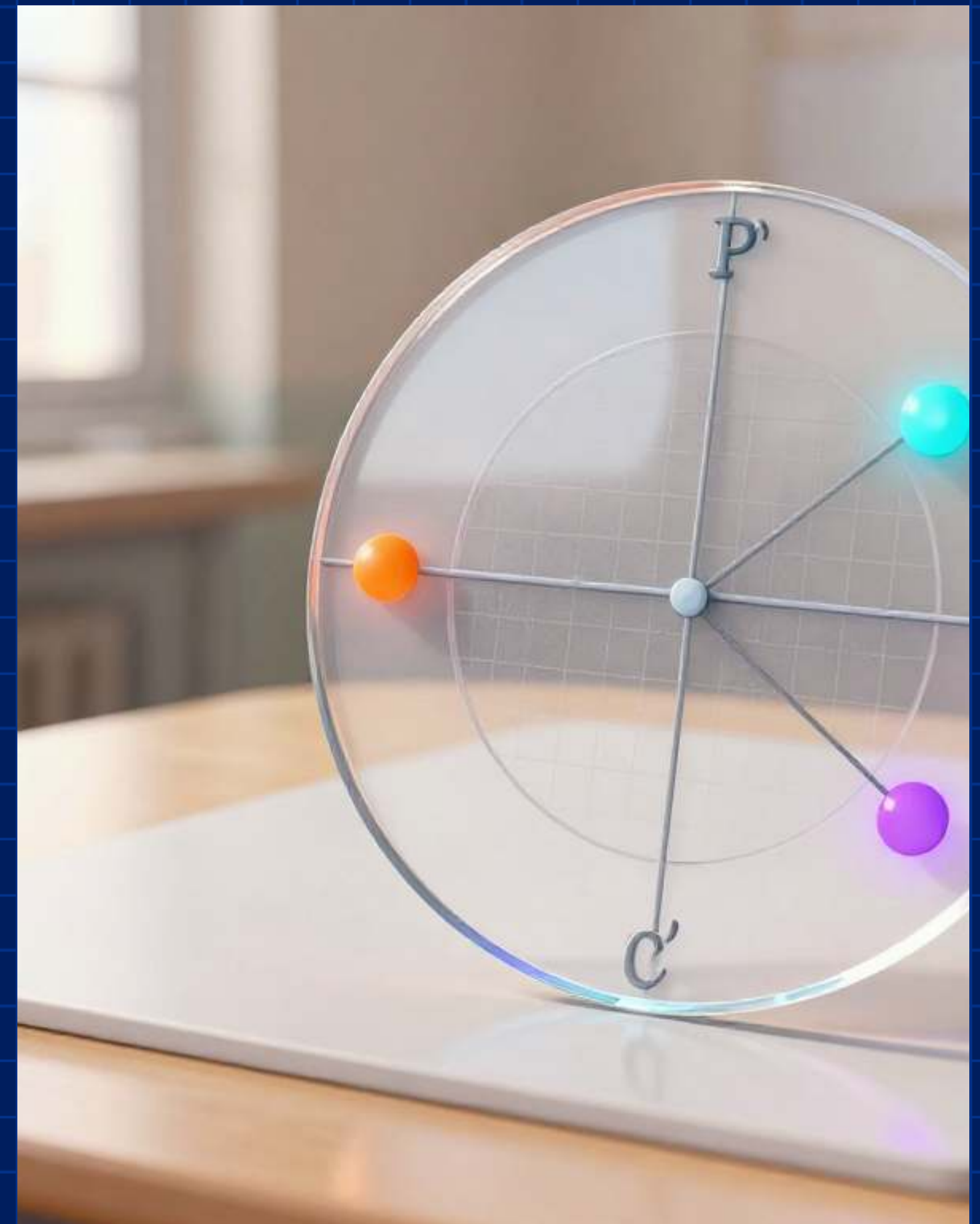
Если точка на окружности отражается относительно оси Ox , её абсцисса остаётся прежней, а ордината меняет знак. Значит, косинус сохраняется, а синус становится противоположным.

Отражение относительно Oy

При отражении относительно оси Oy меняется знак абсциссы, но ордината остаётся той же. Поэтому синус сохраняет значение, а косинус меняет знак.

Формулы для отрицательного угла

Из симметрии следуют важные равенства: $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ и $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$. Они помогают быстро находить значения без полного построения.



Пример нахождения значений по координатам точки

1

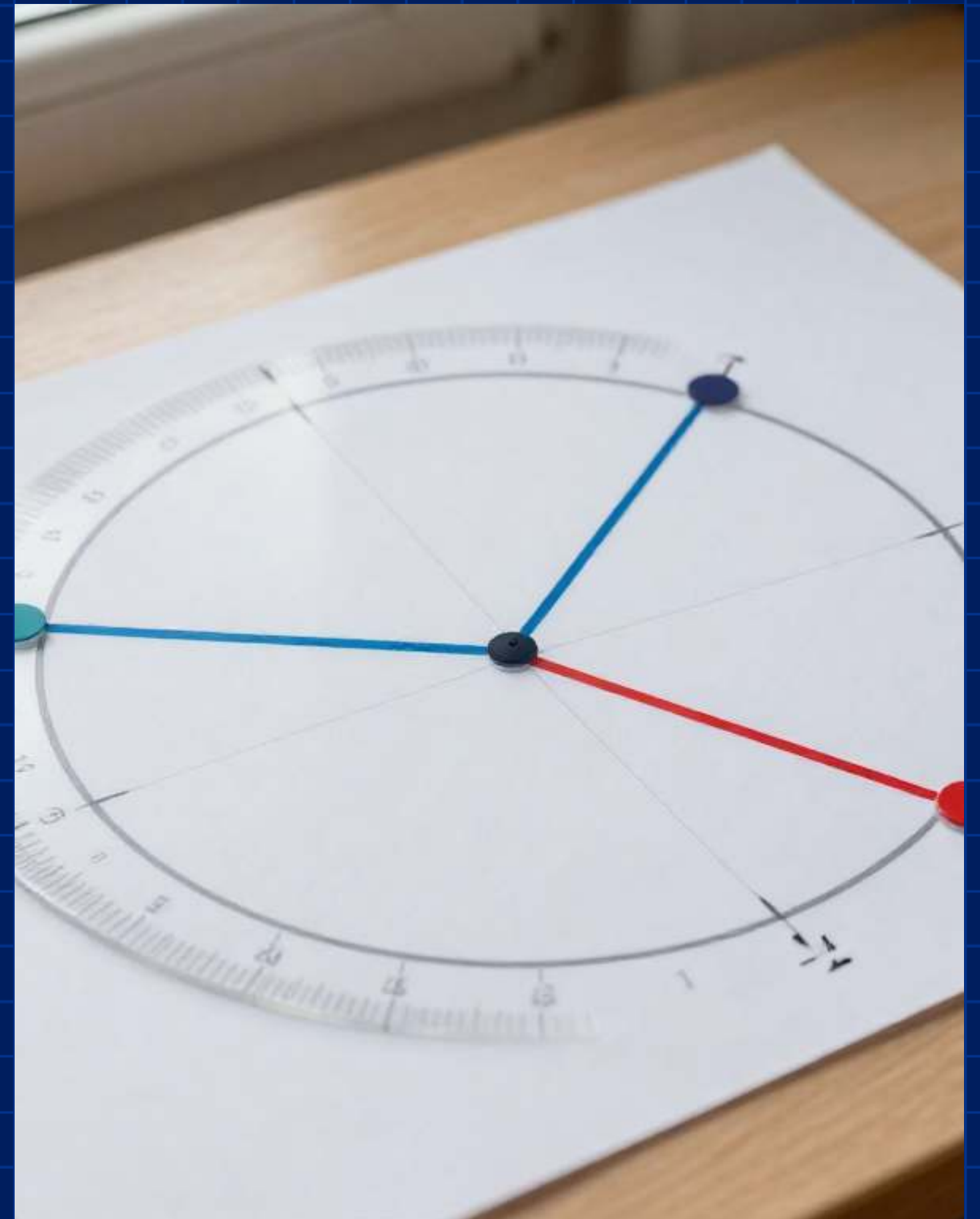
Точка $(3/5; 4/5)$

Если точка на единичной окружности имеет координаты $(3/5; 4/5)$, то $\cos \alpha = 3/5$, $\sin \alpha = 4/5$. Тогда $\tan \alpha = (4/5) : (3/5) = 4/3$.

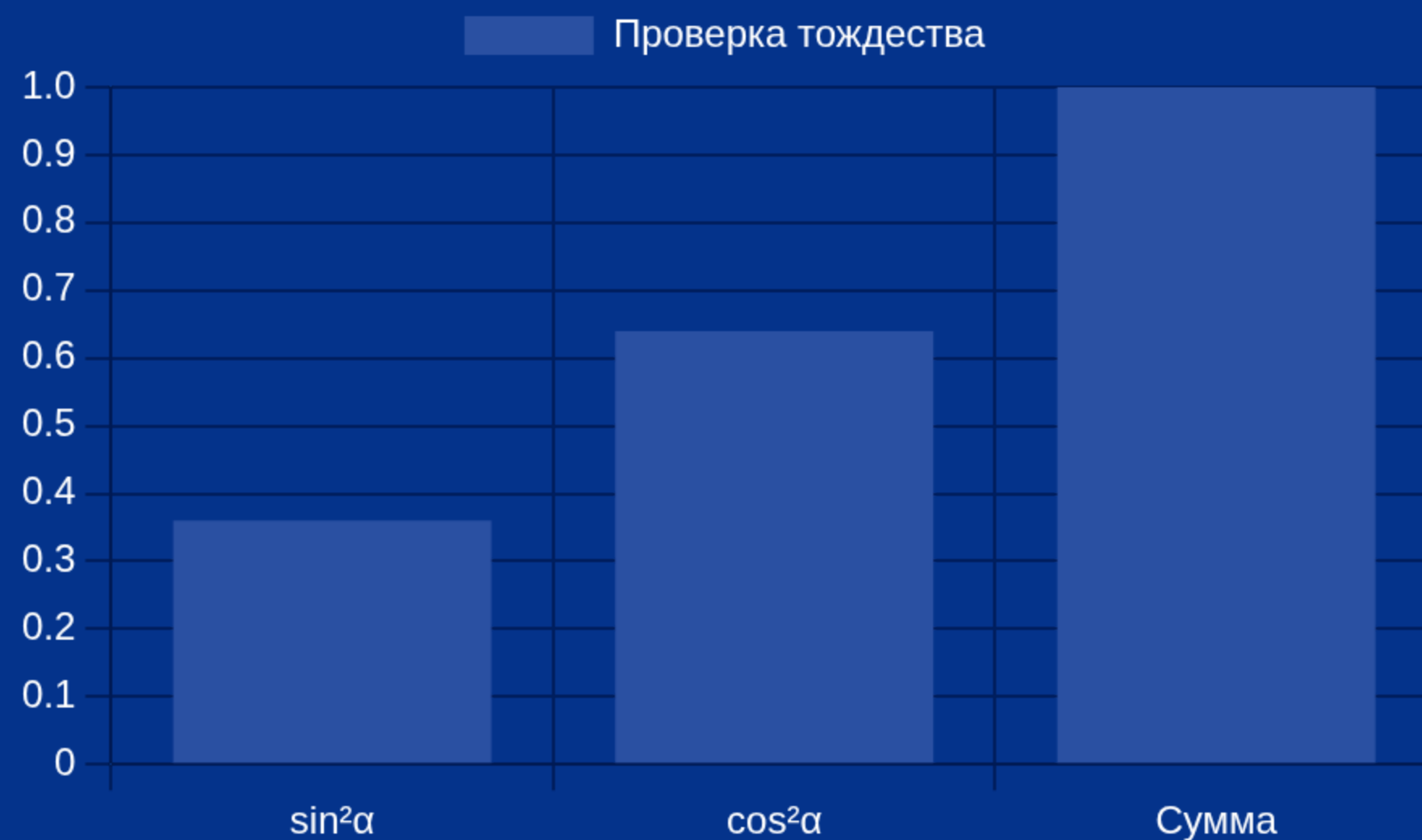
2

Точка $(-3/5; 4/5)$

Для точки $(-3/5; 4/5)$ синус остаётся равным $4/5$, а косинус становится отрицательным. По координатам сразу видно, в какой четверти расположен угол.



Проверка через основное тригонометрическое тождество



Пример: $\sin \alpha = 3/5$, $\cos \alpha = 4/5$

Тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ позволяет убедиться, что найденные значения согласуются с единичной окружностью и теоремой Пифагора.

Если сумма квадратов синуса и косинуса равна 1, значения выбраны верно; при ошибке равенство нарушится.

Что нужно помнить при определении функций центрального угла

Элемент	Правило	Пример
Единичная окружность	$r = 1$	$(0; 1)$
Координаты точки	$\cos = x, \sin = y$	$(x; y)$
Четверть	Знак по положению	II четверть
Особые случаи	Деление на 0 нельзя	$\tan$ не определён

Свойства единичной окружности и определения тригонометрических функций

Эти правила помогают не запутаться в вычислениях и быстро проверить, можно ли найти значение функции для данного угла.

Главное – всегда смотреть на координаты, четверть и возможное деление на ноль; тогда ответ будет и быстрее, и надёжнее.

Тригонометрия через окружность становится понятной

Единичная окружность объединяет углы, координаты и значения функций в одну систему. Она помогает находить синус, косинус, тангенс и котангенс, а также быстро проверять ответы.

sin

1

tg

ctg

cos

