

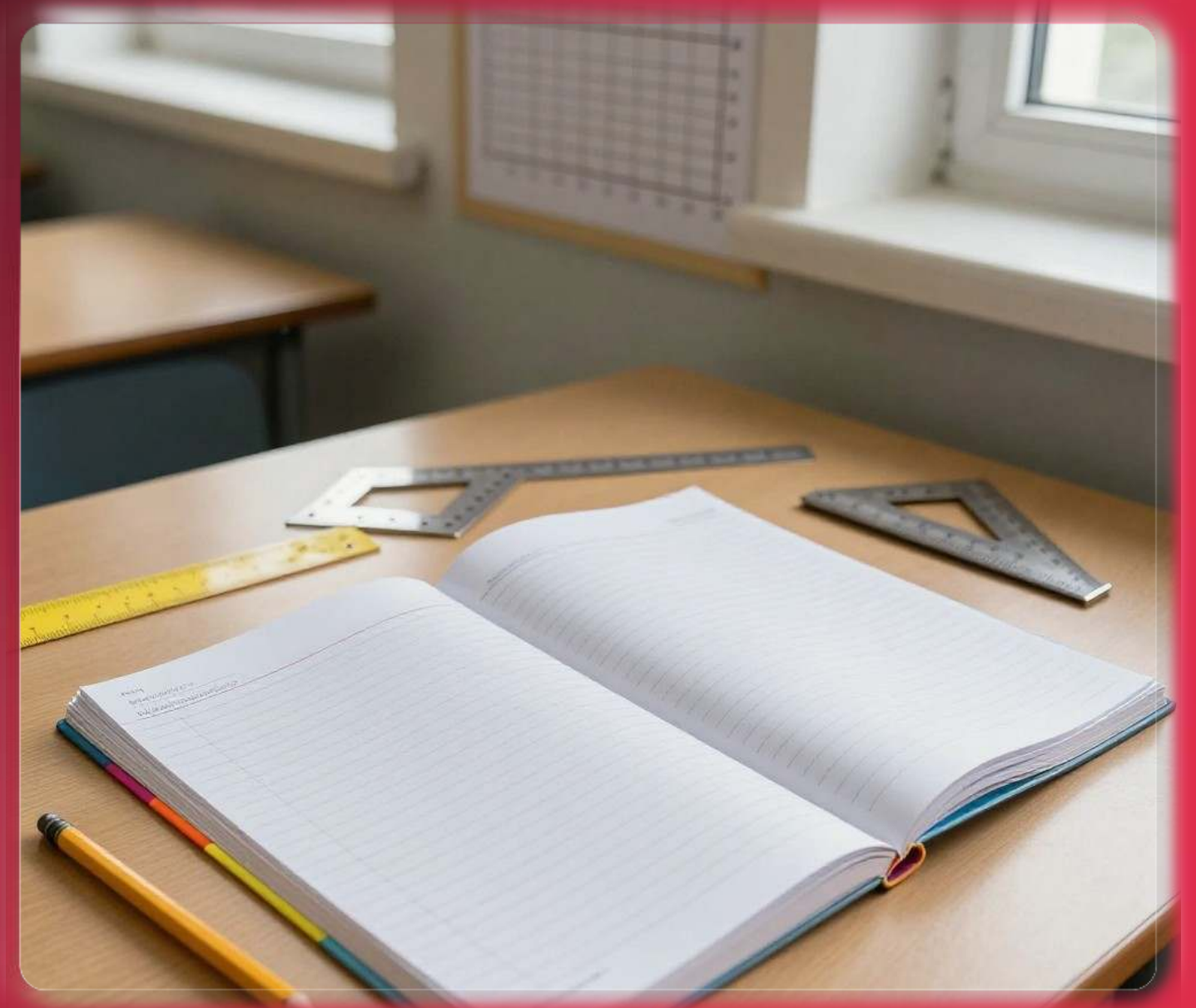
Формулы для вычисления координат точки

Главные формулы, которые помогают
точно находить координаты точки
на плоскости.



С чего начать изучение

Координаты помогают описывать точку точно, а не «примерно». Чтобы не ошибиться, важно читать оси, понимать направление и проверять ответ по рисунку.



Запись точки и чтение координат

01

Порядок записи

Точку записывают в виде (x, y) : сначала называют абсциссу, потом ординату. Такой порядок нельзя менять, иначе получится совсем другая точка.

02

Что показывают оси

Ось x показывает движение вправо и влево, а ось y — вверх и вниз. Вместе они делят плоскость на четыре четверти.

03

Как читать положение

По координатам легко сравнить точки: где выше, ниже, левее или правее. Это помогает быстро понимать рисунок без дополнительных измерений.

04

Как описать движение

Если точка смещается, меняется одна или обе координаты. Поэтому координаты удобно использовать для описания движения на плоскости.

Координатная плоскость в примерах

Точка отсчёта

Начало координат O — это точка отсчёта, от которой измеряют положение всех других точек. От неё удобно начинать чтение любого рисунка.

Положительные координаты

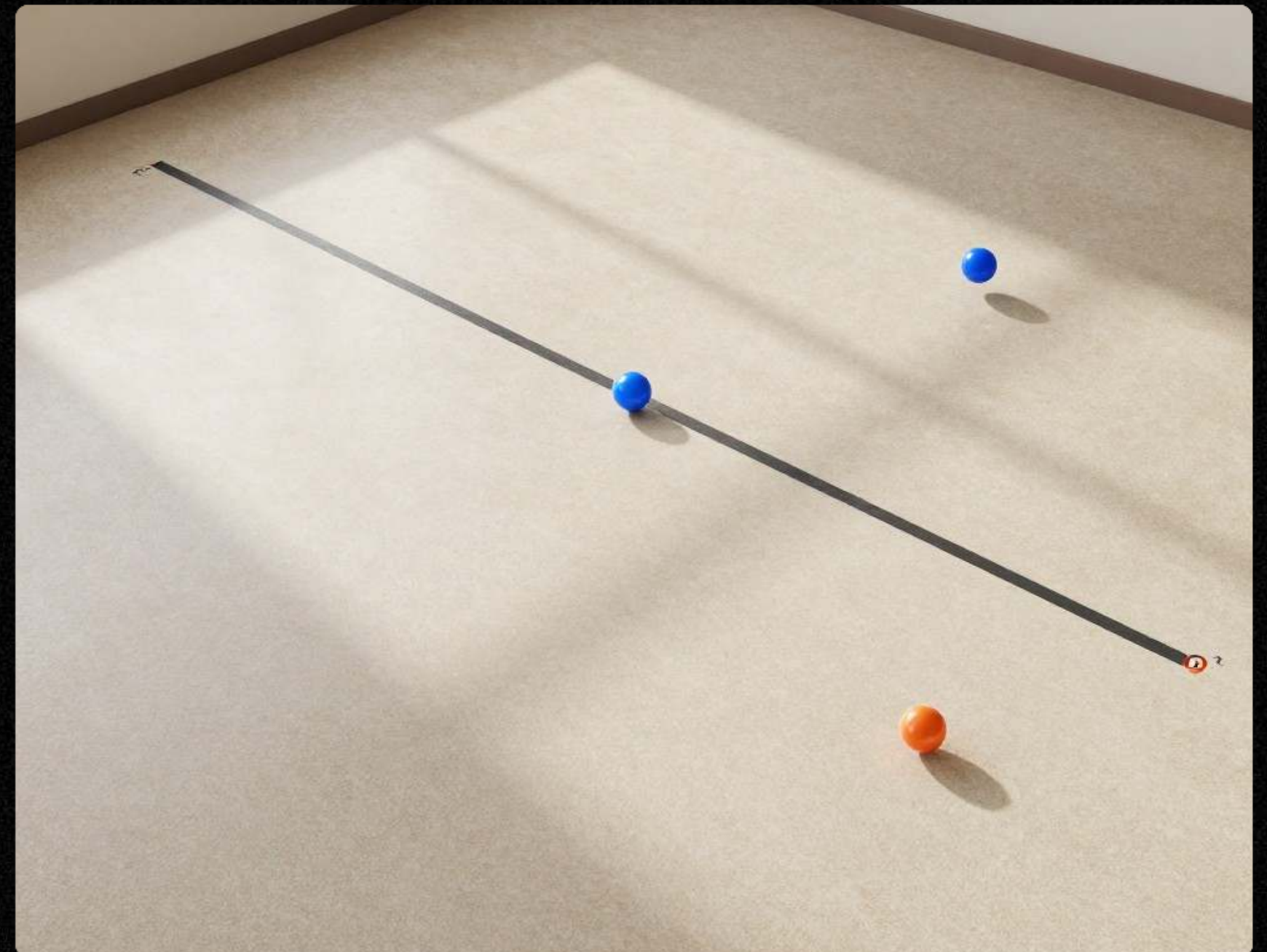
Точка $A(3,2)$ находится в первой четверти: обе координаты положительные. По ней видно, что движение идёт вправо и вверх от начала координат.

Слева и выше

Точка $B(-2,4)$ лежит во второй четверти: x отрицательная, а y положительная. Значит, точка смещена влево, но остаётся выше оси x .

Справа и ниже

Точка $C(4, -1)$ показывает другой случай: x положительная, y отрицательная. Это значит, что точка находится справа от O и ниже оси x .



Середина отрезка

01

Формула середины

Чтобы найти середину отрезка, складывают соответствующие координаты его концов и делят пополам. Так получают точку, одинаково удалённую от A и B.

02

Вычисление по координатам

Для отрезка A(-2,4) и B(6,0) считаем отдельно по осям: $x_{\text{ср}} = 2$, $y_{\text{ср}} = 2$. Получаем M(2,2).

03

Как проверить ответ

Проверка проста: середина должна делить отрезок на две равные части и лежать между концами. На рисунке это видно сразу.

Расстояние между точками

01

Основная формула

Расстояние между точками находят по теореме Пифагора: сначала берут разности координат, затем возводят их в квадрат и извлекают корень. Это универсальная формула для плоскости.

02

Пример вычисления

Для $A(1,1)$ и $B(4,5)$ получаем $\sqrt{(4-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{9+16} = 5$. Значит, длина отрезка равна 5.

Когда известна только одна координата



Точка на оси ОУ

Если точка лежит на оси ОУ, её абсцисса равна нулю. При $y=5$ она расположена выше начала координат.

Точка на оси ОХ

Если точка лежит на оси ОХ, её ордината равна нулю. Например, при $x=-3$ точка находится слева от начала координат.

Как найти вторую координату

Когда известна только одна координата, вторую находят из уравнения прямой или из условия задачи. Тогда положение точки задаётся точно, без догадок.

Деление отрезка в заданном отношении

01

Идея формулы

Если точка делит отрезок внутренним образом, в формуле используются оба конца отрезка и отношение $m:n$. Так можно вычислить точные координаты без чертежа в масштабе.

02

Как понять отношение

Часть, которая стоит ближе к A , связана с коэффициентом n , а часть ближе к B — с коэффициентом m . Это помогает не перепутать порядок.

03

Что показывает результат

Если одна из долей больше, точка смещается дальше от соответствующего конца. Поэтому по формуле сразу видно, к какой стороне отрезка она ближе.

Уравнение прямой: две формы

Форма через точку и наклон

Уравнение $y - y_1 = k(x - x_1)$ удобно, когда известны две точки прямой. Коэффициент k показывает наклон линии и помогает строить её без лишних вычислений.

Форма $y = kx + b$

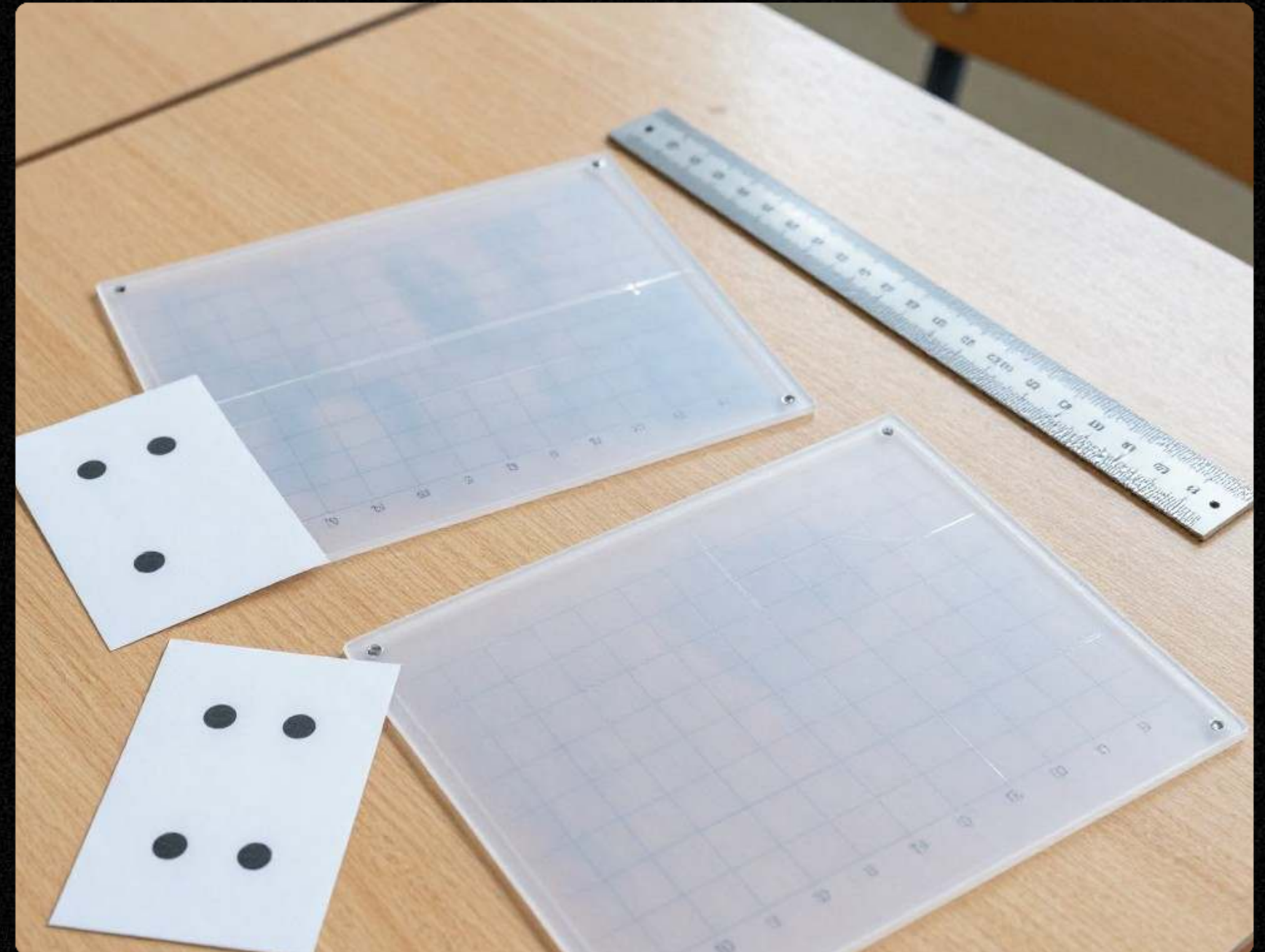
Если известны k и b , используют запись $y = kx + b$. Она сразу показывает, где прямая пересекает ось y , и упрощает поиск точек.

Как выбрать запись

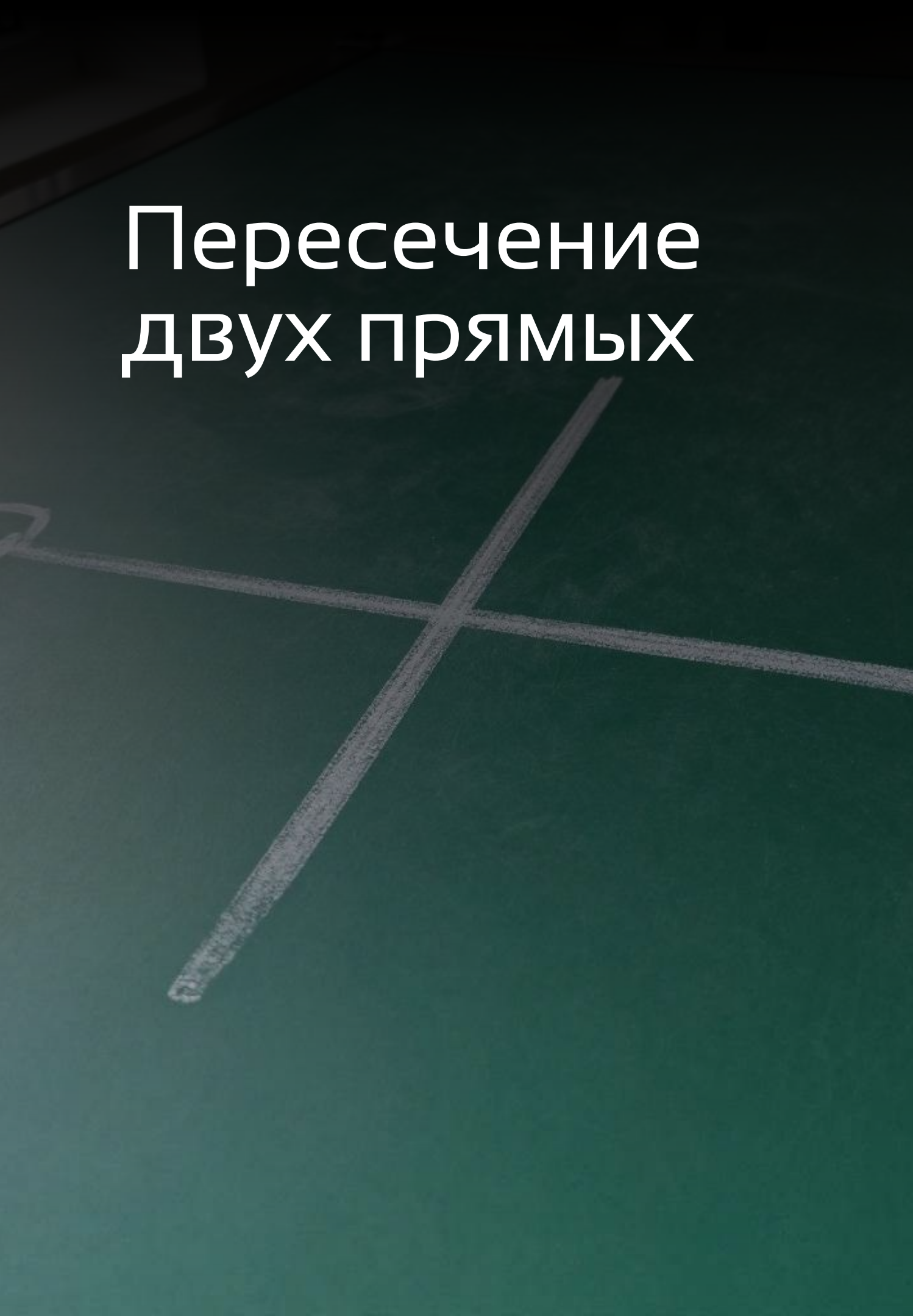
Обе записи описывают одну и ту же прямую, но подходят для разных данных в задаче. Выбор формулы зависит от того, что уже известно.

Проверка точки

По уравнению можно проверить, принадлежит ли точка прямой: достаточно подставить её координаты. Если равенство верно, точка лежит на линии.



Пересечение двух прямых



Связь графика и формулы

Такая задача показывает связь между графиком и алгеброй: одна точка одновременно принадлежит обеим прямым. Это удобно проверять и вычислением, и по рисунку.

Найти x и y

Приравниваем выражения для y :
 $2x-1 = -x+5$. Так получаем x ,
а затем подставляем его в любое
уравнение и находим y точки
пересечения.

Решённый пример: середина отрезка

01

Записываем данные

Для начала выпишем координаты концов: $A(-4, 2)$ и $B(8, 6)$. Формула середины берёт среднее арифметическое по каждой оси, поэтому точка делит отрезок пополам.

02

Считаем координаты

По оси x получаем $(-4+8)/2=2$, а по оси y — $(2+6)/2=4$. Значит, координаты середины равны $M(2, 4)$.

03

Понимаем смысл

Эта точка находится ровно между A и B , потому что её абсцисса и ордината одинаково удалены от соответствующих координат концов отрезка.

04

Проверяем ответ

Проверка на рисунке подтверждает результат: M лежит на отрезке и визуально делит его на две равные части по обеим осям.

Решённый пример: деление в отношении

01

Читаем отношение

Если точка делит отрезок АВ в отношении 1:2, значит, отрезок у одной стороны вдвое меньше, чем у другой. Это важно учесть при подстановке в формулу.

02

Подставляем значения

Для А(0,0) и В(9,6) используем внутреннее деление: $x=(2\cdot0+1\cdot9)/3$, $y=(2\cdot0+1\cdot6)/3$. Здесь больший вес получает точка В.

03

Находим точку

Получаем $x=3$ и $y=2$, значит искомая точка имеет координаты Р(3,2). Она лежит на отрезке между А и В.

04

Сравниваем положение

Проверка показывает, что точка ближе к А, потому что отношение 1:2 означает меньшую часть со стороны А и большую — со стороны В.

Параметрическая запись точки

01

Идея записи

Параметрическая запись удобна, когда точка движется по прямой. Координаты задают через начальную точку и приращение: $x=x_0+at$, $y=y_0+bt$.

02

Значение параметра

Параметр t показывает, насколько далеко сделан шаг. При $t=0$ получаем исходную точку, а при $t=1$ — точку после одного полного шага.

03

Для отрезка

Если нужно описать отрезок, параметр берут от 0 до 1. Тогда получаются все точки между началом и концом, без выхода за границы.

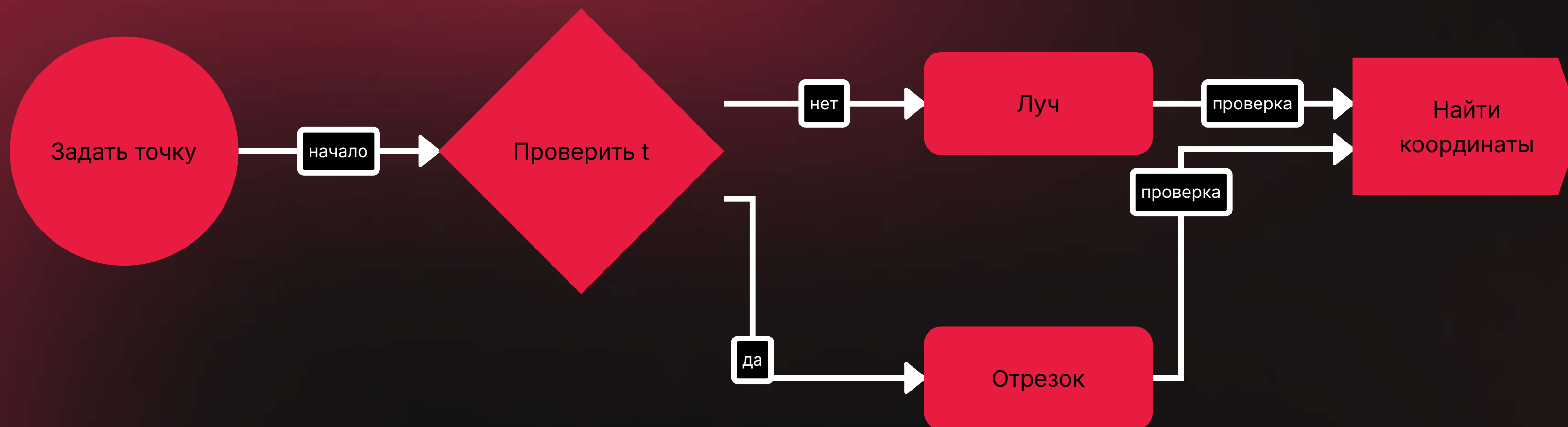
04

Для луча

Для луча ограничение слабее: t начинается с нуля и может расти дальше. Так описывается движение в одном направлении без конечной точки.

Отрезок, луч и параметр t

Сначала подставляют значение t , затем проверяют, подходит ли оно для отрезка или луча.



Сдвиг и симметрия точки

01

Сдвиг на вектор

Сдвиг точки на вектор (a, b) означает прибавление этих чисел к координатам. Новая точка получается по формуле $(x+a, y+b)$, без изменения порядка координат.

02

Отражение относительно осей

При симметрии относительно оси OX меняется знак ординаты, а абсцисса остаётся прежней. Отражение относительно оси OY работает наоборот: меняется знак x .

03

Относительно начала

Симметрия относительно начала координат меняет знак обеих координат сразу. Это удобно запоминать как переход в противоположную точку на плоскости.

04

Растяжение по оси x

Растяжение вдоль оси x изменяет только абсциссу: x умножают на коэффициент. Ордината при этом не меняется, если сдвиг по y не задан.

Решённый пример: сдвиг точки

01

Исходные данные

Для точки $A(2, -3)$ прибавляем координаты вектора $(-5, 4)$. Это означает движение на пять клеток влево и на четыре клетки вверх.

02

Вычисляем координаты

Считаем новую абсциссу: $2 + (-5) = -3$. Теперь ордината: $-3 + 4 = 1$. Так получаем образ точки после переноса.

03

Получаем ответ

Итог записывается как $A'(-3, 1)$. Важно не перепутать знак векторных координат: отрицательное число означает движение влево или вниз.

04

Проверяем на плоскости

Проверка по рисунку подтверждает результат: от исходной точки действительно нужно пройти влево на 5 и вверх на 4 клетки.

Решённый пример: симметрия относительно осей

01

Отражение к ОХ

При симметрии относительно оси ОХ точка $B(-2, 5)$ переходит в $B'(-2, -5)$. Абсцисса остаётся той же, а знак ординаты меняется.

02

Отражение к ОУ

При симметрии относительно оси ОУ получаем $B'(2, 5)$. Здесь уже меняется знак абсциссы, потому что точка отражается через вертикальную ось.

03

Отражение к началу

Если отражение идёт относительно начала координат, обе координаты меняют знаки сразу. Поэтому $B(-2, 5)$ превращается в $B'(2, -5)$.

04

Общее правило

Эти правила помогают быстро находить образ точки и сразу проверять ответ на рисунке: отражение должно давать точку на равном расстоянии от оси или начала.

Типичные ошибки и как они выглядят

Ошибка	Как исправить	Что проверять
Путают x и y	Читать по порядку	Положение точки
Ставят неверный знак	Сверять оси	Направление движения
Неверное отношение	Сравнить части	Ближе к какой точке

В таблице собраны самые частые промахи при работе с координатами и формулами. Они приводят к неправильному ответу и смещают точку на чертеже.

Главная защита от ошибок — аккуратная запись координат и быстрый контроль результата по рисунку.

Материал презентации по формулам вычисления координат точки

Короткие упражнения для проверки

01

Середина отрезка

Сначала найдите средние значения по обеим координатам: для точек $A(1,7)$ и $B(5, -1)$ это хорошая тренировка формулы середины отрезка.

02

Точка на ОХ

Точка на оси ОХ всегда имеет ординату, равную нулю. Если задано $x=-4$, запишите координаты в полном виде и проверьте расположение.

03

Симметрия

При симметрии относительно ОУ меняется только знак абсциссы. Для точки $(3,2)$ образ легко найти, если помнить правило отражения.

04

Проверка на прямой

Проверьте подстановку в уравнение прямой $y=x+1$. Подставьте координаты точки $(2,3)$ и решите, выполняется ли равенство без ошибок.

Формулы, которые работают на плоскости

Теперь у вас есть удобная шпаргалка по координатам точки: от середины и деления отрезка до прямой, параметра и преобразований. Главное — выбирать нужную формулу и внимательно проверять ответ.