



Свойства последовательностей

Порядок чисел раскрывает закономерности и правила изменения.

Как устроена тема последовательностей



Последовательности помогают сравнивать числа по порядку, находить правила и видеть, как меняются члены. На уроке разбираем задания, формулы, прогрессии, суммы и простые рекурсии.

1

показывает, с какого члена начинается запись
последовательности.

Первый член задаёт начало последовательности и помогает отслеживать весь её порядок.

Определение последовательности

n

обозначает номер члена последовательности
в общем виде.

Индекс указывает, какой по счёту член записан, поэтому порядок становится однозначным.

Принятые обозначения последовательностей

Как задают последовательности

Способы задания последовательности на простом примере 2, 4, 6, 8.

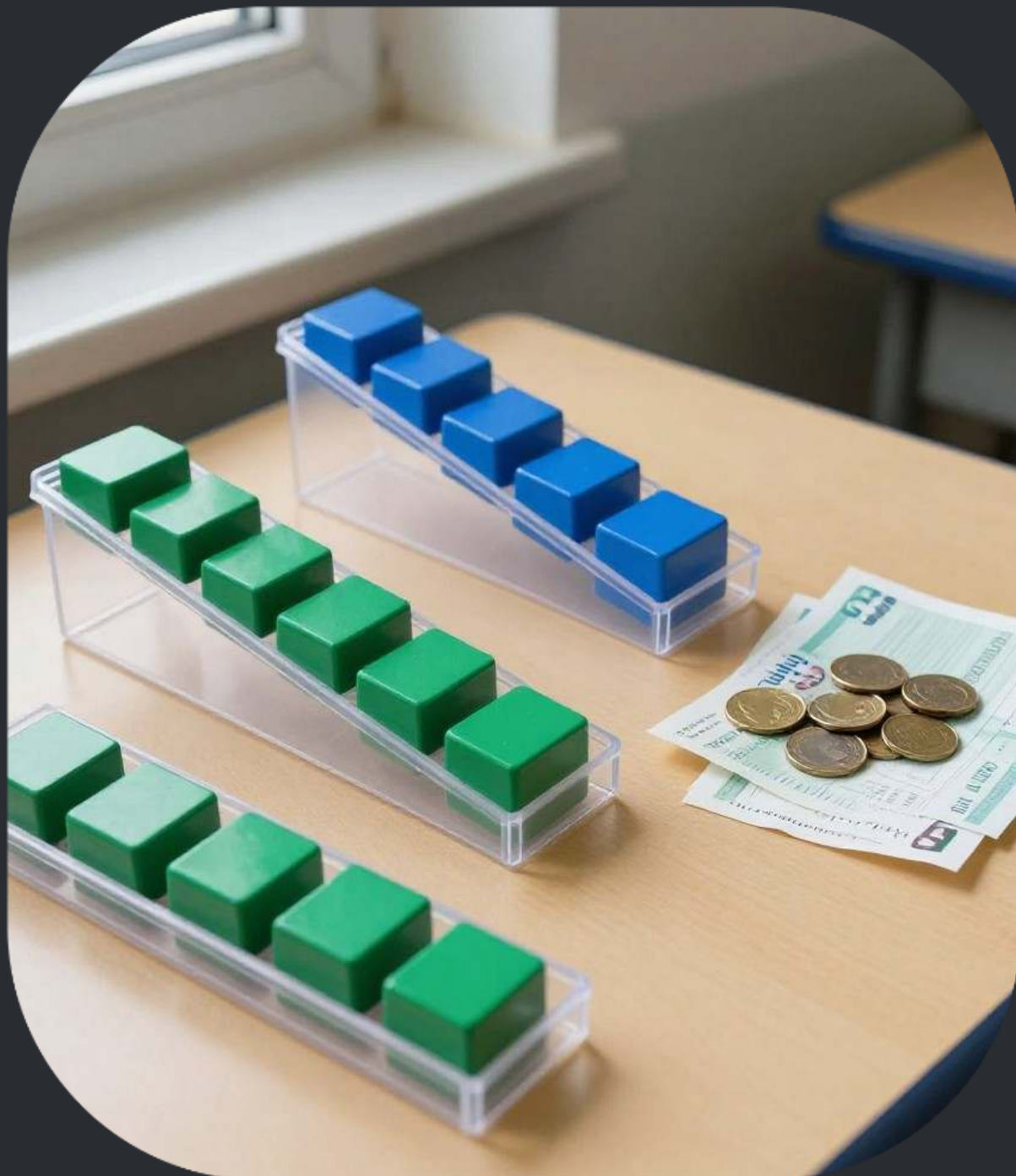
Одна и та же последовательность может быть задана разными способами, если они задают одинаковые члены.



Минипример
последовательности 2, 4, 6, 8

Способ	Запись	Пример
Таблица	по номерам	2, 4, 6, 8
Формула	$a_n = 2n$	$a_3 = 6$
Рекурсия	$a_{n+1} = a_n + 2$	$a_1 = 2$
График	точки	(1; 2), (2; 4)

Примеры из чисел и жизни



Чётные числа

Чётные числа сразу образуют понятную последовательность: каждый следующий член больше предыдущего на 2. По такой записи легко заметить повторяющееся правило и продолжить ряд без ошибки.



Кратные трём

Числа, кратные 3, удобно рассматривать как последовательность с постоянным шагом. Она помогает тренировать счёт, сравнивать члены и проверять, делится ли число на 3.



Квадраты чисел

Квадраты натуральных чисел меняются иначе: разности между соседними членами растут. Этот пример показывает, что не любая последовательность является прогрессией, но закономерность всё равно можно увидеть.



Жизненные примеры

В задачах из жизни последовательности описывают оплату по месяцам, рост на одинаковую величину или повторяющиеся измерения. Это делает абстрактные числа более понятными и наглядными.

Арифметическая последовательность

1

Главная идея

Арифметическая последовательность строится с одинаковым приращением между соседними членами. Поэтому достаточно знать первый член и разность, чтобы восстановить весь ряд дальше.

3

Признак АП

Проверка очень проста: вычитают каждый член из следующего. Если все получившиеся числа одинаковы, перед нами арифметическая последовательность.

2

Рост и убывание

Если разность положительна, значения увеличиваются: например, 5, 8, 11, 14. При отрицательной разности последовательность убывает, как в ряду 20, 17, 14, 11.

4

Где встречается

Такой тип последовательностей часто используют в задачах на счёт, накопление и равномерное изменение величины. Это один из самых удобных и наглядных видов числовых рядов.

Свойства арифметической прогрессии

1/

Постоянная разность

Для арифметической прогрессии разность соседних членов постоянна. Это свойство записывают как $a_{n+1} - a_n = d$, и оно позволяет быстро проверять принадлежность ряда к АП.

2/

Формула общего члена

Общий член удобно находить по формуле $a_n = a_1 + (n-1)d$. Она показывает, насколько далеко от первого члена находится нужный элемент последовательности.

3/

Построение ряда

Если известны a_1 и d , можно сразу выписать несколько первых членов. Например, при $a_1 = 7$ и $d = 3$ получаем 7, 10, 13, 16.

4/

Как использовать

Формула работает и в обратную сторону: по известным членам можно найти разность. Это помогает решать задачи без полного перебора всех значений.

Преобразования арифметической прогрессии

1

Сдвиг на число

При прибавлении одного и того же числа к каждому члену арифметической прогрессии разность не меняется. Меняется только первый член, поэтому структура последовательности сохраняется.

3

Простой пример

Например, из последовательности 2, 5, 8 после прибавления 4 получаем 6, 9, 12. Шаг между членами остался тем же, значит это снова АП.

2

Умножение на число

При умножении всех членов на число s первый член и разность тоже умножаются на s . Такая операция сохраняет арифметический характер последовательности.

4

Зачем это нужно

Такие преобразования полезны, когда нужно быстро получить новый ряд из уже известного. Они помогают увидеть, какие свойства АП зависят от шага, а какие — от начального значения.

2

основные записи формулы суммы дают один и тот же результат.

В АП сумму удобно считать по двум эквивалентным формулам, подставляя известные значения.
Формулы суммы арифметической прогрессии

2

это видно уже по первым членам.

При $q = 2$ каждый следующий член удваивается, поэтому ряд быстро растёт и легко узнаётся по постоянному отношению соседних членов.

Пример из условия



-1

такой ряд чередует знаки.

При $q = -1$ члены по очереди меняют знак: положительный, отрицательный, снова положительный. Такой ряд удобно узнавать по чередованию.

5

отношение между членами сохраняется.

Умножение всех членов на одно число сохраняет отношение q . Например, при умножении на 5 последовательность 2, 6, 18 остаётся геометрической.

Пример из условия

5

сумма считается сразу по формуле.

Для первых пяти членов геометрической прогрессии сумму удобно находить по формуле: так не нужно складывать все элементы по отдельности.

Формула суммы геометрической прогрессии

1

после этого значения рост начинается.

Если d положительно, арифметическая последовательность возрастает. Если q больше 1, геометрическая тоже растёт; при отрицательных значениях знак может меняться.

$$1/2$$

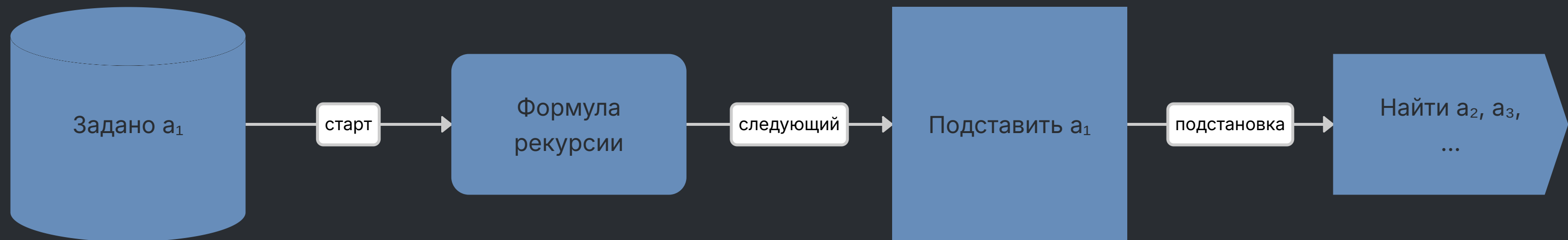
значения быстро уменьшаются.

При $q = 1/2$ каждый следующий член уменьшается вдвое: 10, 5, 2,5, 1,25. Это наглядный пример последовательного приближения к нулю.

Пример из условия

Как читать рекуррентную формулу

Рекуррентная запись показывает, как каждый новый член получается из предыдущего.



1

это отправная точка для расчётов.

Если известен первый член и параметр прогрессии, следующий шаг считать легко.
Для сравнения членов важны знак d или q и порядок соседних значений.

Как выбирать нужную формулу

Что известно	Что искать
a_1, d	a_n
a_1, q	S_n
S_n	n

Выбор формулы зависит от того, что уже известно: первый член, разность, отношение или сумма. От этого меняется и способ решения задачи.

Для разных данных нужны разные формулы: член, сумма или номер.

Формулы арифметической и геометрической прогрессий



Главное о последовательностях

Последовательности помогают замечать закономерности в числах и описывать их правилами. Для арифметической и геометрической прогрессий важны разность, отношение, суммы и рекурсия.

