

Относительная частота и закон больших чисел



Как случайные опыты становятся понятнее при больших сериях испытаний

Зачем эта тема нужна в 9 классе

Она соединяет алгебру, вероятность и статистику: помогает читать результаты опытов, понимать колебания данных и видеть, почему длинные серии дают более устойчивый итог.



Понятие относительной частоты

1. Что измеряет частота

Относительная частота показывает, какова доля появления события среди всех испытаний. Она помогает описывать не только случайные опыты, но и результаты наблюдений в учебных заданиях.

2. Формула записи

Для события A используют запись $W(A)=m/n$, где m — число его появлений, а n — общее число испытаний. Эта величина удобна для сравнения разных серий опытов.

3. Границы значения

Относительная частота всегда лежит между 0 и 1. Значение 0 означает отсутствие события, а 1 — его появление в каждом испытании серии.

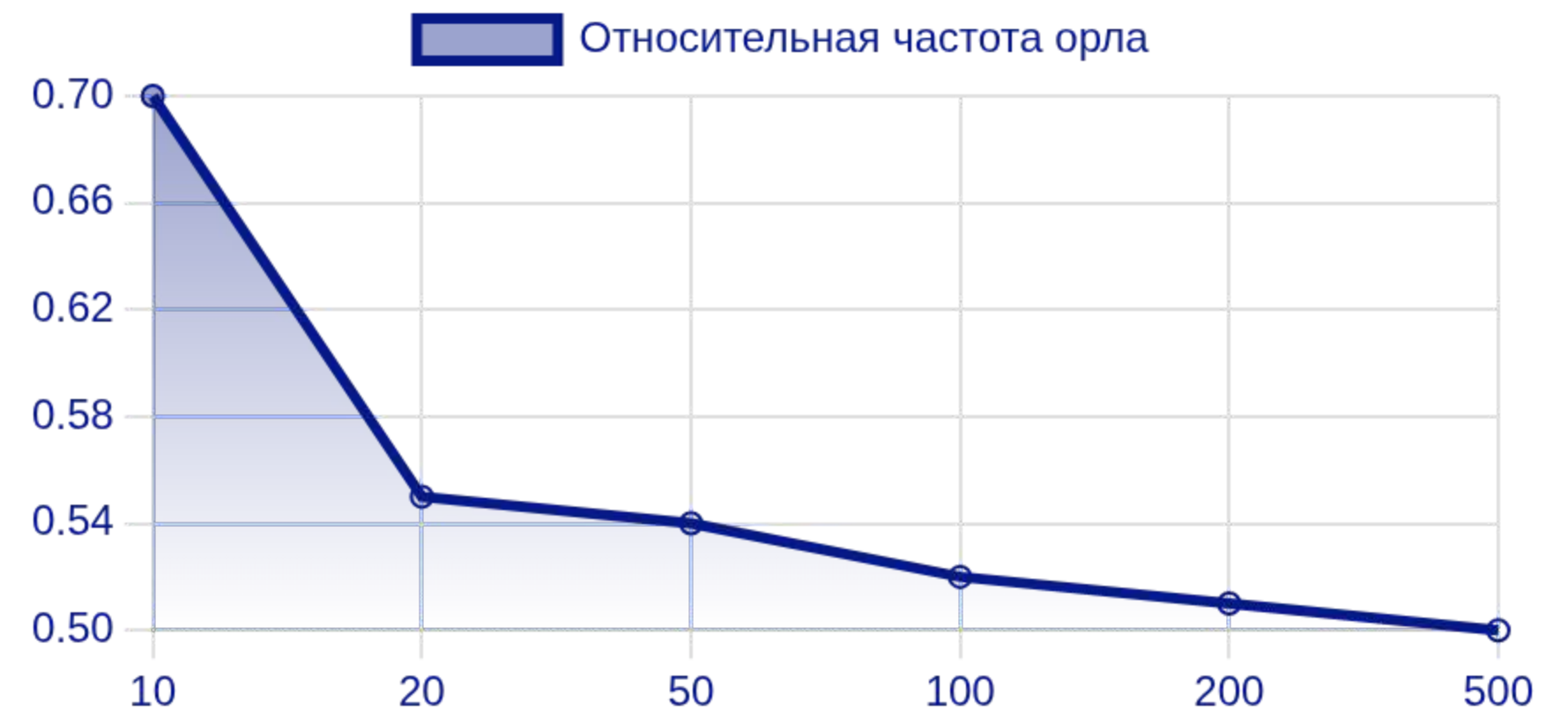
4. Простой пример

Если при 20 бросках монеты орёл выпал 12 раз, то $W=12/20=0,6$, то есть 60%. Такой расчёт легко выполнять после любого эксперимента.

Как меняется частота при увеличении числа бросков

На первых шагах результат заметно «скачет», поэтому короткая серия не даёт надёжной картины.

Чем больше бросков, тем меньше колебания и тем ближе частота к 0,5.



Иллюстративные данные учебного примера

Пример вычислений для серии бросков монеты

Броски	Орлы	Частота
10	7	0,70
20	11	0,55
50	27	0,54
100	52	0,52

Иллюстративные данные учебного примера

Таблица показывает, как меняется относительная частота при росте числа испытаний.

При увеличении серии частота постепенно приближается к 0,5.

Случайные колебания в короткой серии

Малое число испытаний

В короткой серии один и тот же исход может повторяться несколько раз подряд. Из-за этого результат выглядит необычным, хотя он остаётся обычным проявлением случайности.

Сильные отклонения

Если бросков всего 5–10, относительная частота легко уходит далеко от ожидаемого значения. Такая разница не является ошибкой, а показывает влияние малой выборки.

Наблюдение за серией

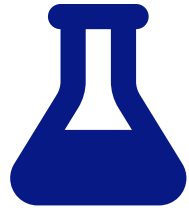
Когда мы смотрим на последовательность испытаний, важно не один случайный бросок, а весь ряд результатов. Тогда можно заметить, как колебания постепенно уменьшаются.

Почему нужен повтор

Повторение опыта помогает понять, что именно случайно, а что устойчиво. Поэтому выводы по одной короткой серии всегда следует считать предварительными.

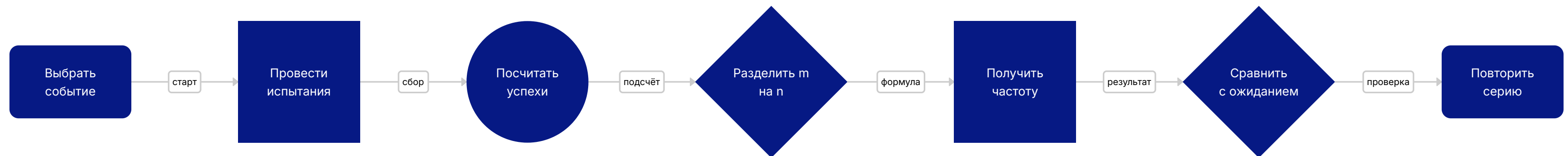


Чем вероятность отличается от относительной частоты

	Вероятность заранее Вероятность описывает событие до опыта. Она показывает, насколько возможно появление результата, и не зависит от того, сколько раз опыт уже проводили.
	Частота после опыта Относительная частота получается только после серии испытаний. Она отражает фактический итог наблюдений и может немного отличаться от теоретического значения.
	Одно и то же событие Для честной монеты вероятность орла равна $\frac{1}{2}$, но в конкретной серии частота может быть 0,4; 0,6 или 0,52.
	Сближение при росте серии Чем больше испытаний, тем обычно меньше случайные отклонения. Поэтому частота всё чаще приближается к вероятности и лучше описывает устойчивый результат.

Как находят относительную частоту в опыте

Последовательность действий в простом случайном эксперименте



Закон больших чисел простыми математическими словами

Длинная серия

Если испытаний очень много, случайные колебания начинают взаимно ослабевать. Поэтому относительная частота обычно становится ближе к вероятности события.

Не мгновенное исправление

Закон больших чисел не обещает, что следующий опыт сразу выровняет результат. Он описывает общую тенденцию длинной серии, а не отдельный бросок.

Короткая серия ненадёжна

Для одного или нескольких испытаний заметные отклонения совершенно естественны. По такой серии нельзя уверенно судить о вероятности события.

Устойчивость результата

Чем больше повторений, тем надёжнее оценка. Именно поэтому большие серии в математике, статистике и наблюдениях дают более убедительные выводы.

Сближение частоты и вероятности на одном графике

Горизонтальная линия показывает эталон, а кривая частоты — путь к нему в серии бросков.

В начале отклонения велики, но при росте числа испытаний частота подходит к вероятности.



Иллюстративные данные учебного примера

Почему большие серии дают более надёжный результат

1. Случайность уравнивается

В длинной серии удачные и неудачные исходы встречаются многократно и частично компенсируют друг друга. Поэтому общий результат меньше зависит от единичного необычного случая и выглядит устойчивее.

2. Меньше влияния удачи

Если испытаний мало, один случайный всплеск сильно меняет долю события. Когда опыт повторяется много раз, влияние такого отклонения ослабевает, а итоговая частота становится спокойнее и ближе к ожидаемой.

3. Польза для проверок

На уроках математики это важно при опытах, наблюдениях и проверке предположений. Большая серия не отменяет случайность, но помогает отличить действительно устойчивую картину от временного совпадения.

4. Точнее выводы

Чем больше данных собрано, тем увереннее можно сравнивать результат с теоретической вероятностью. Поэтому длинная серия делает выводы не идеальными, а просто более надёжными и полезными для анализа.

Теоретические вероятности для простых событий

Объект	Событие	Вероятность
Монета	Орёл	$\frac{1}{2}$
Кубик	6	$\frac{1}{6}$
36 карт	Туз	$\frac{4}{36}$
10 шаров, 3 красных	Красный шар	$\frac{3}{10}$

Школьные модели случайных событий: честная монета, игральный кубик, стандартная колода из 36 карт и простой набор шариков.

Таблица показывает эталонные вероятности для знакомых случайных объектов. Эти значения удобно сравнивать с относительной частотой, полученной в опытах и наблюдениях.

Во всех примерах вероятность задаёт ожидаемую долю события заранее и служит ориентиром для сравнения с результатами серии испытаний.

Пример из спорта и повседневной статистики

Броски в корзину

Тренер считает не только очки, но и долю точных бросков. Если баскетболист попал 6 раз из 10, это ещё не полный портрет его игры. В следующей серии 14 попаданий из 20 уже дают более устойчивое представление о точности.

Пенальти и серии попыток

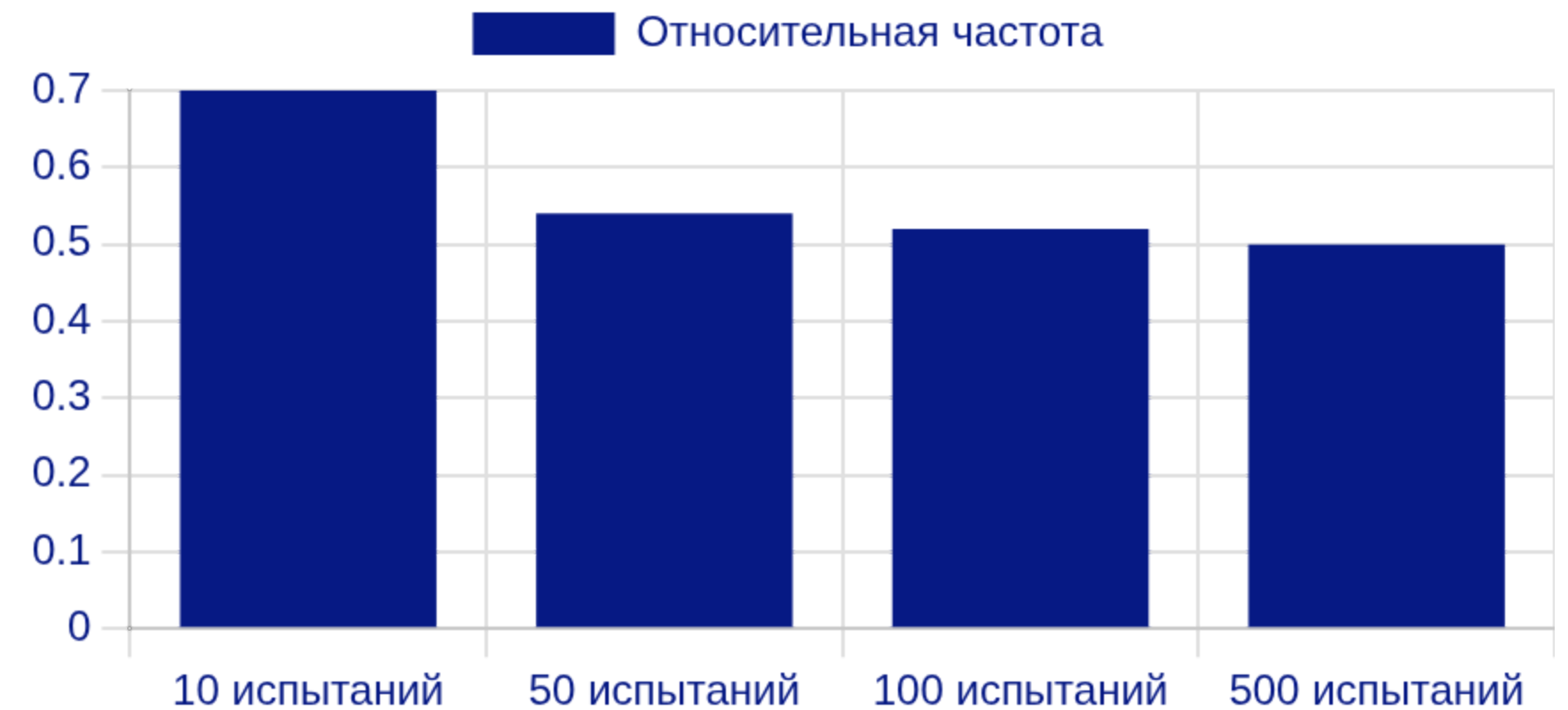
В футболе один удачный или неудачный пенальти почти ничего не говорит о мастерстве игрока. Гораздо важнее посмотреть на несколько серий ударов подряд и сравнить, как меняется процент успеха. Так видно, что короткий отрезок может ввести в заблуждение.



Сравнение относительных частот в разных сериях

На диаграмме видно, как меняется доля одного и того же события при росте числа испытаний в серии.

Чем длиннее серия, тем меньше разброс и тем ближе результат к устойчивому значению.



Учебный пример серии бросков монеты: 10, 50, 100 и 500 испытаний.

Типичные ошибки при работе с относительной частотой

1. Считать её постоянной

Относительная частота не является раз и навсегда закреплённым числом. Она зависит от конкретной серии испытаний и может заметно меняться, если добавить новые наблюдения.

2. Ждать точного совпадения

В одном отдельном опыте частота редко совпадает с вероятностью полностью. Небольшие отличия естественны, поэтому важно смотреть на длинную серию, а не на один результат.

3. Делать выводы слишком рано

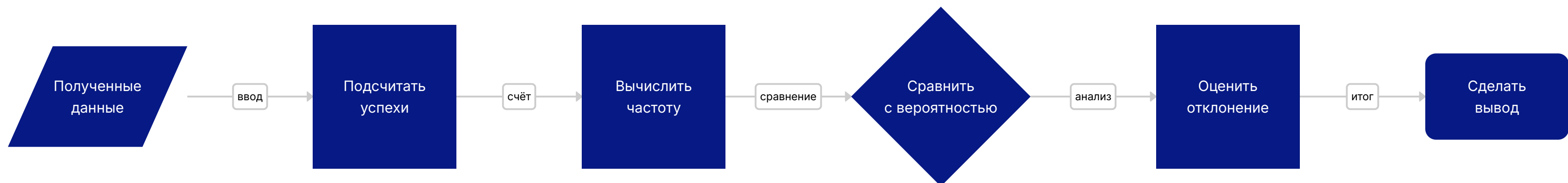
Если испытаний мало, случайный разброс может создать ложное впечатление. По нескольким броскам или попыткам нельзя уверенно судить о свойствах события, потому что данных ещё недостаточно.

4. Путать случайность и правило

Не всякое отклонение означает закономерность. Иногда необычный результат возникает просто из-за удачи или неудачи, и только повторение серии помогает понять, есть ли реальный устойчивый эффект.

Как сделать вывод по результатам серии опытов

Последовательность анализа данных в простом случайном эксперименте.



Связь темы с выборкой и статистикой



Выборка вместо всей группы

В статистике часто изучают не всех людей или объекты, а только часть. Такая выборка помогает быстрее получить представление о целом, если она достаточно большой и разнообразной.



Ближе к реальной картине

Большая выборка обычно даёт результат, который лучше отражает общую ситуацию. Это связано с тем, что случайные отклонения в ней заметны меньше, чем в маленькой.



Применение в данных

Этот принцип используют в опросах, проверке качества продукции и обработке результатов наблюдений. Он помогает не делать выводы по слишком узкому набору данных.



Почему это надёжнее

Закон больших чисел объясняет, почему при увеличении числа наблюдений оценки становятся устойчивее. Поэтому в статистике ценят не только сам результат, но и размер выборки.

Компьютерные эксперименты

Тысячи бросков за минуту

Компьютер может быстро смоделировать множество бросков монеты и сразу показать, как меняется относительная частота орла. На графике видно, что после коротких колебаний линия постепенно выравнивается. Такой опыт удобно повторять с разными числами испытаний.



Кубик и таблица результатов

Для игрального кубика программа строит таблицу и отмечает, сколько раз выпала каждая грань. В короткой серии распределение может быть неровным, но при большом числе испытаний оно становится более ровным и понятным для сравнения.



Краткая памятка по теме

Понятие	Смысл	Пример
Относительная частота	Доля появления	8 из 20 = 0,4
Вероятность	Ожидаемая доля	Честная монета: 0,5
Закон больших чисел	Частота приближается к вероятности	Длинная серия бросков

Основные определения и примеры из школьного курса вероятности.

Эта таблица помогает быстро вспомнить, что означает каждый ключевой термин и как он связан с опытом.

Термины образуют одну цепочку: опыт даёт частоту, теория задаёт вероятность, а закон больших чисел связывает их при большом числе испытаний.

Частота, вероятность и длинная серия

Относительная частота показывает результат опыта, вероятность — ожидаемую долю события, а закон больших чисел объясняет, почему при многих повторениях случайные колебания становятся меньше и выводы надёжнее.