

Сферическая геометрия: геометрия на поверхности шара

Это геометрия дуг, углов и
треугольников на сфере, где
привычные правила меняются.



Почему эта тема важна для 11 класса

Сферическая геометрия продолжает планиметрию и стереометрию, показывая, как меняются свойства фигур на кривой поверхности. Она помогает связывать математику с координатами на Земле, маршрутами и небесной сферой, а также осваивать тригонометрию в новом контексте.



6371 км

Средний радиус Земли задаёт масштаб, по которому считают расстояния и углы на сфере.

Сфера определяется центром и радиусом: все точки поверхности одинаково удалены от центра. Её нельзя развернуть на плоскость без искажений, поэтому в задачах рассматривают именно поверхность как геометрическое пространство.

Оценка радиуса Земли как среднего значения: 6371 км (общепринятая справочная величина; используется в учебных задачах).

Большие окружности как сферические прямые



1

Что такое большая окружность

Большая окружность получается при пересечении сферы плоскостью, проходящей через её центр. Поскольку плоскость делит сферу симметрично, линия пересечения естественно играет роль «прямой» на кривой поверхности.

2

Почему именно она задаёт кратчайшие пути

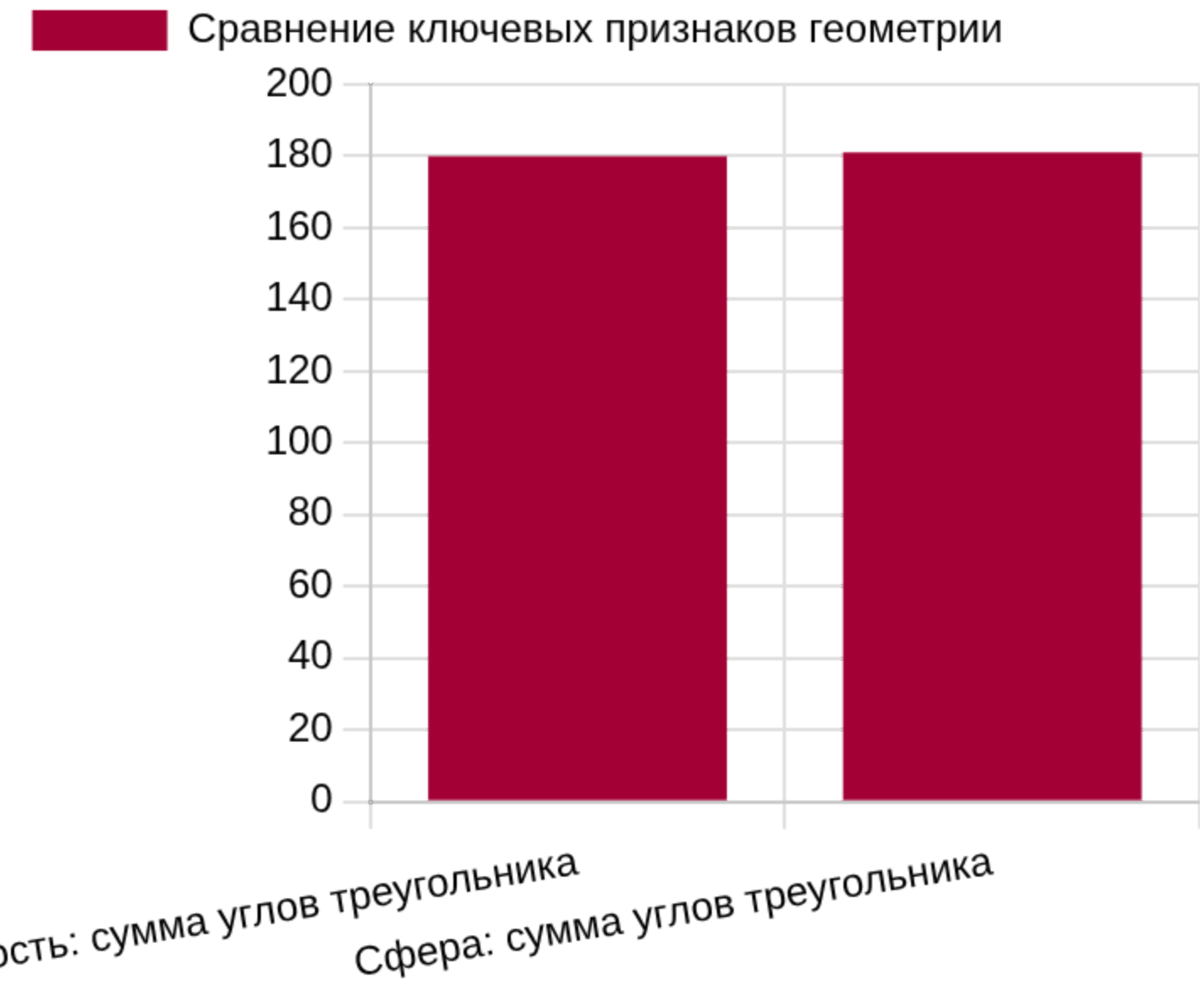
На Земле экватор и любой меридиан — примеры больших окружностей. Кратчайший путь между точками на сфере идёт по дуге большой окружности, а не по произвольной линии на поверхности.

Евклидова и сферическая геометрия: сравнение свойств

На сфере свойства треугольников меняются из-за кривизны: сумма углов становится больше 180° , а параллельность ведёт себя иначе.

График подчёркивает качественный сдвиг: евклидовы формулы недостаточны, и приходится использовать сферические определения и связи.

Смысл значений: плоскость даёт 180° , на сфере сумма всегда больше 180° (качественное сравнение; порог показан как 181°).



111 км

Эта прикидка упрощает оценку расстояний вдоль меридиана по углу.

Длину дуги большого круга связывают с центральным углом: $s = R \cdot \varphi$, где φ измеряется в радианах. Для Земли дуга в 1° по меридиану примерно соответствует 111 км — удобно для быстрых оценок.

Расчёт по радиусу Земли $R \approx 6371$ км: длина 1° дуги равна $(2\pi R)/360 \approx 111,2$ км (округлено до 111 км).

Основные элементы сферического треугольника

Элемент	Обозначение	Смысл
Стороны-дуги	a, b, c	Дуги больших окружностей между вершинами
Углы	A, B, C	Углы между касательными к дугам в вершинах
Доп. характеристика	E	$A + B + C - 180^\circ$

Сферический треугольник задаётся дугами больших окружностей и углами между ними. Вместо привычных «отрезков» здесь работают дуги на поверхности, а ключевой зависимостью становится угловой избыток.

Треугольник на сфере описывается не только «размерами дуг», но и тем, насколько велика кривизна, что отражается в угловом избытке E.

Структура обозначений и определение углового избытка соответствуют стандартным курсам сферической геометрии.

Сумма углов сферического треугольника

1

Для сферического треугольника сумма внутренних углов всегда больше 180° . Это уже не «погрешность», а устойчивое следствие положительной кривизны сферы.

2

Разность с 180° называют угловым избытком: $E = A + B + C - 180^\circ$. Именно он измеряет, насколько треугольник «отклоняется» от евклидова.

3

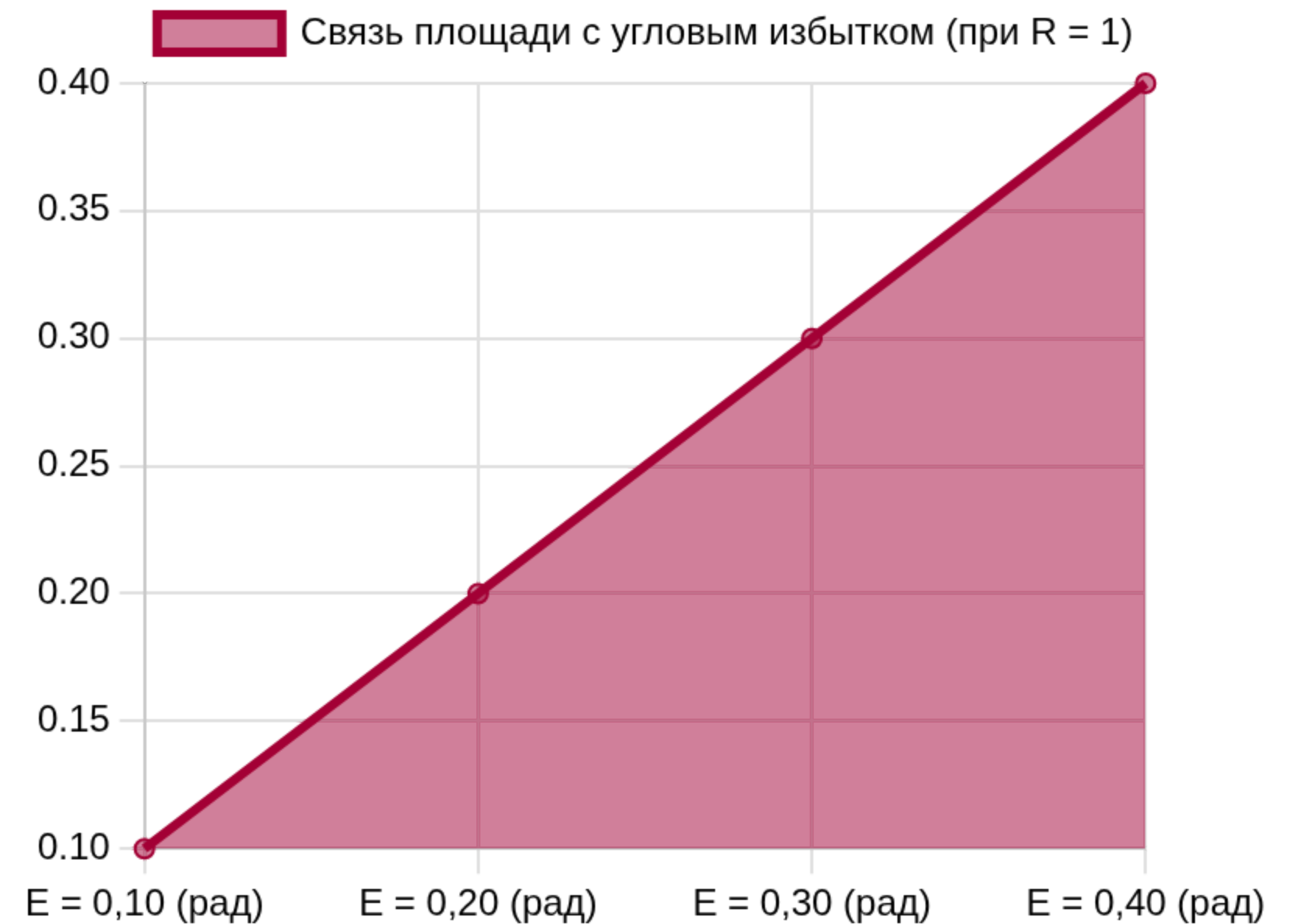
Когда треугольник мал, избыток E невелик, и геометрия похожа на плоскую. Для больших фигур избыток становится заметным и меняет поведение углов и площадей.

Угловой избыток и площадь сферического треугольника

При фиксированном радиусе сферы площадь растёт пропорционально E : больше угловой «добавки» — больше площадь на сфере.

Линия показывает прямую зависимость: усиление эффекта кривизны приводит к пропорциональному увеличению площади треугольника.

Формула площади сферического треугольника $S = R^2 \cdot E$ при E в радианах (стандартный результат сферической геометрии; демонстрация на примере $R=1$).



Сферическая тригонометрия в школьных формулах

1

Для сферических треугольников существуют аналоги теорем синусов и косинусов: вместо плоских отношений используются тригонометрические функции сторон и углов.

2

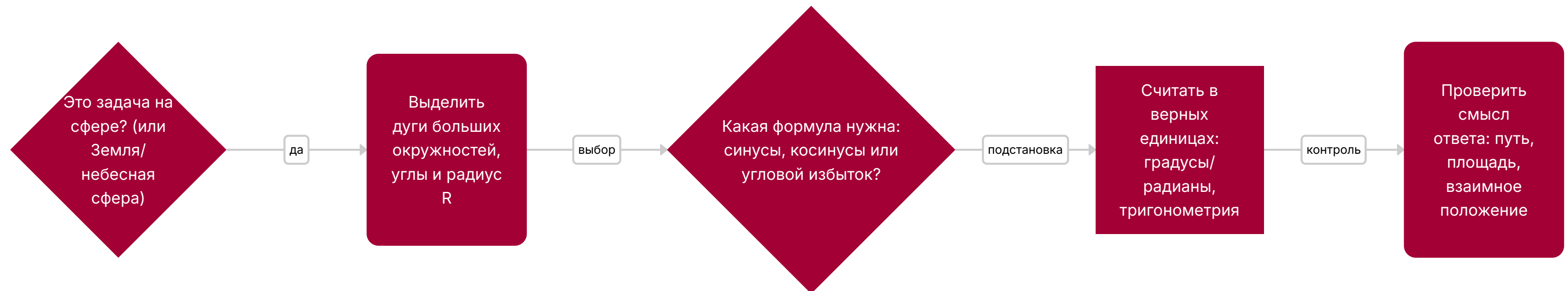
В частном случае прямоугольного сферического треугольника работает соотношение $\cos c = \cos a \cdot \cos b$, где c и a — соответствующие стороны-дуги.

3

Более общая связь записывается, например, в виде $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$. Эти формулы и делают сферическую тригонометрию главным инструментом задач.

Алгоритм решения задач на сферической поверхности

Логика решения основана на выборе модели (сфера/земная аппроксимация), выделении дуг больших окружностей и применении подходящей связи между длинами и углами.



Широта, долгота и географические маршруты

■ Положение точки на Земле задаётся географической широтой и долготой: широта отсчитывается от экватора, а долгота — от нулевого меридиана, проходящего через Гринвич. Эти координаты помогают точно описывать местоположение.

■ Маршрут самолёта между удалёнными городами часто идёт по дуге большого круга, а не по параллели. Такая дуга короче, поэтому модель сферической геометрии объясняет, почему «прямее» не всегда означает «по прямой» на карте.



Картографические проекции и искажения

Проекция	Что сохраняет	Ключевое искажение
Меркатора	Углы	Площади увеличиваются у полюсов
Равноплощадная	Площади	Искажаются углы
Азимутальная	Окрестность точки	Форма и расстояния искажаются дальше

Сравните, как разные проекции переносят сферическую поверхность на плоскость: углы, формы или площади сохраняются лишь частично, а значит, искажений избежать нельзя.

Любая плоская карта неизбежно искажает сферическую поверхность: нельзя одновременно сохранить все свойства шара — приходится выбирать, что важнее для задачи.

Обобщённые свойства проекций, используемые в школьной картографии и учебных материалах.

Сферическая геометрия в астрономии

1

В астрономии вводят понятие небесной сферы — воображаемой сферы, на которую проецируются звёзды, Солнце и планеты. Это упрощает описание сложного движения светил.

3

Сферические углы применяют, чтобы находить высоту светила над горизонтом и оценивать взаимное положение объектов на небе. Геометрия помогает понимать, когда и где мы наблюдаем небесные тела.

2

Положение объектов задают координатами, похожими на географические: склонением и прямым восхождением. Тогда задачу «как расположено светило» можно свести к работе со сферическими углами.

4

Исторически такая модель поддерживала навигацию и наблюдения до распространения современных приборов. Даже сейчас она служит базой для многих вычислений в астрономии и практической астрометрии.

Где применяется сферическая геометрия

Роль сферической геометрии особенно заметна, когда объекты движутся или рассматриваются на поверхности Земли и небесной сферы, а «кратчайшие» пути определяются дугами больших окружностей.

Распределение показывает, что геометрия нужна не только для теории: от маршрутов и координат до обработки данных и построения изображений в моделях мира.

Собранные по учебным примерам и прикладным задачам качественные категории (точные доли в процентах не устанавливались).

Навигация Картография Астрономия
Геодезия Связь и вычислительная визуализация



Типичные задачи по сферической геометрии

1

В школьной практике встречаются задачи на расстояние между точками на сфере, углы между меридианами, длины дуг больших окружностей и площади сферических треугольников. Часто требуется перейти от углов к длинам через радиус.

2

Нередко в расчётах используют радиус Земли 6371 км или близкие округления, чтобы числа были удобнее. При этом важно уверенно работать с тригонометрией и не путать определения дуги и отрезка.

3

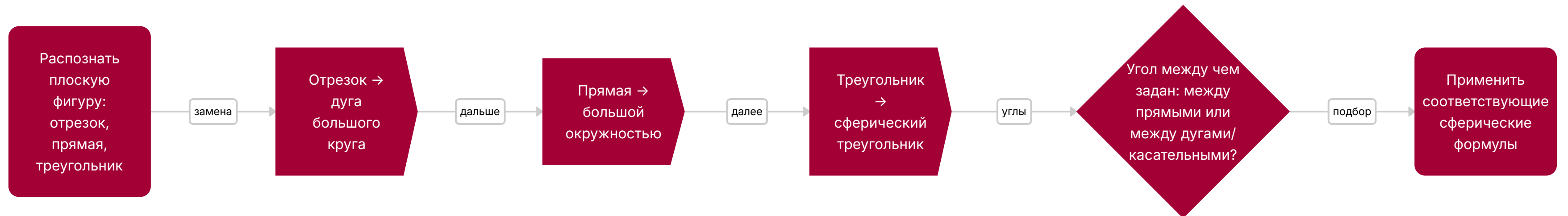
От ученика требуется навык обращения с радианами и градусами: формулы устроены так, что подстановка в неправильных единицах быстро даёт неверный ответ. Полезно заранее отмечать, что именно нужно переводить.

4

Многие задания имеют геометрический смысл: ответ интерпретируется как путь по поверхности, площадь «сферического участка» или величина угла между направлениями. Поэтому полезна проверка результата по здравому смыслу.

Переход от плоскости к сфере

Механизм перехода основан на замене плоских «прямых» объектов сферическими аналогами и на корректировке формул длины, углов и площадей.



Ограничения и частые ошибки

1

Самая распространённая ошибка — переносить плоские формулы на сферу без проверки условий. На сфере другие «геометрические роли» у объектов, поэтому прежние равенства могут перестать быть верными уже на уровне смыслов.

2

Нельзя путать дугу большой окружности с хордой: это разные отрезки по месту расположения. Хорда соединяет точки внутри сферы, а дуга лежит на её поверхности и задаёт расстояние по кратчайшему пути.

3

Ещё одна трудность — единицы измерения: забыв учесть радиус или перепутав градусы и радианы, легко получить ответ, не согласующийся с геометрическим смыслом. Также нельзя считать сумму углов сферического треугольника равной 180° .

Современное значение сферической геометрии



Навигация и маршруты

В GPS и близких навигационных системах координаты объектов и направлений корректно описываются с учётом сферической формы Земли, а кратчайшие пути зависят от дуг больших окружностей.



Спутниковая связь

Сферическая геометрия помогает моделировать распространение сигналов и ориентирование устройств, поскольку антенны и приёмники взаимодействуют с объектами на поверхности и в околоземном пространстве.



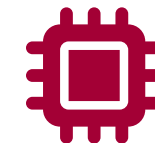
Моделирование и геоданные

В геоинформационных системах и климатологии сферическая модель используют, чтобы описывать большие участки планеты согласованно по всей поверхности, а не локально «по частям».



Компьютерная графика и VR

При построении изображений и виртуальных сред нужны корректные геометрические представления: от ориентации обзора до построения куполов и сферических объектов.



Прикладные вычисления

Современные вычислительные методы делают сферические формулы практичными: их применяют в задачах обработки данных о Земле и в моделировании движения по поверхности.

Итоги: что показывает сферическая геометрия

Сферическая геометрия показывает, что свойства фигур определяются поверхностью, на которой их рассматривают. На сфере действуют собственные правила: большие окружности вместо прямых, сумма углов больше 180° , а площадь связана с угловым избытком.