

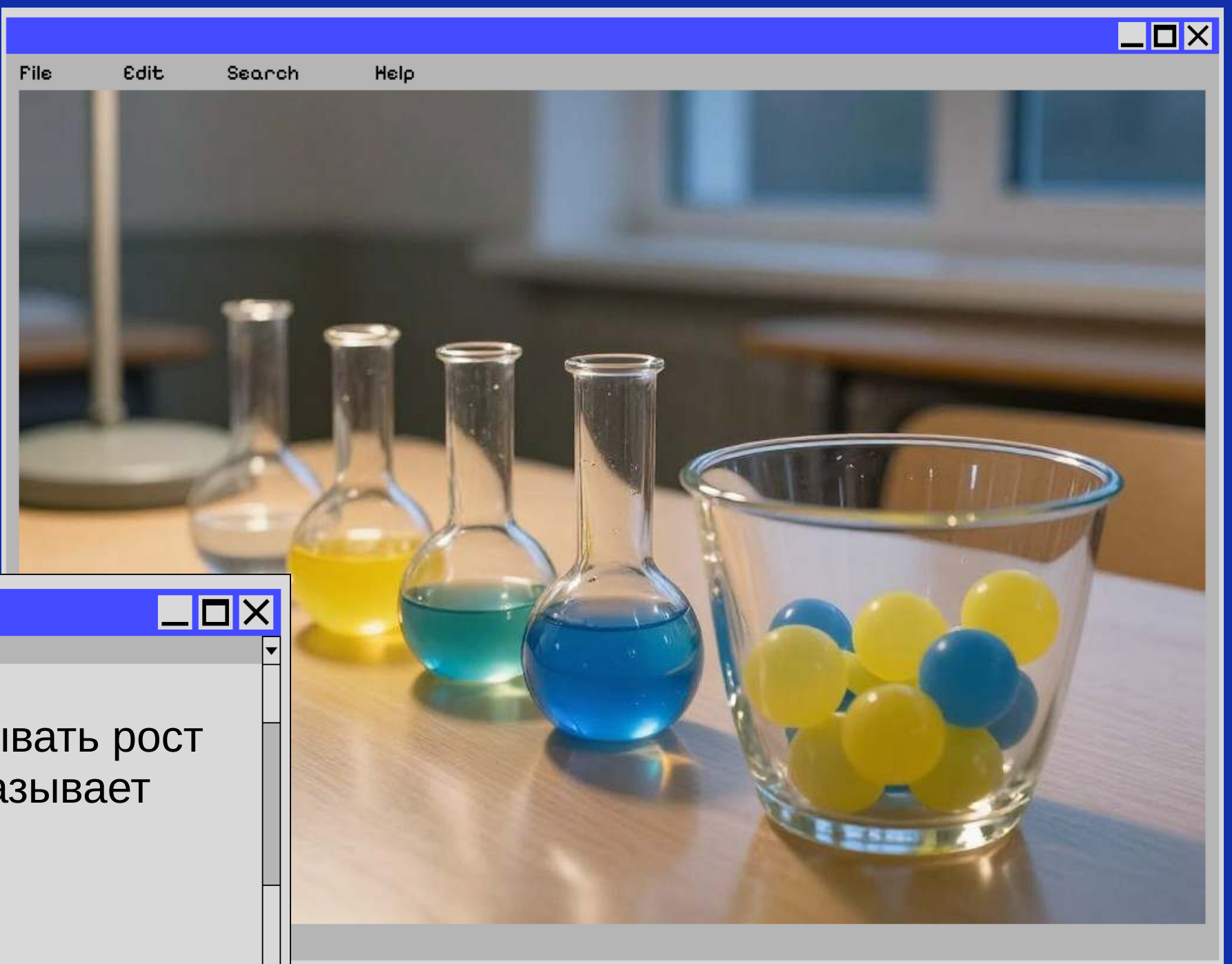
Сумма n первых членов геометрической прогрессии

Разберём формулу суммы и научимся решать задачи быстро и без ошибок.

Как считать общий итог последовательности

Ok

Геометрическая прогрессия помогает описывать рост и уменьшение, а сумма первых членов показывает общий результат за несколько шагов.



Общий вид прогрессии

1

Первый член и шаг

Геометрическая прогрессия начинается с первого члена a_1 , а каждый следующий элемент получается умножением предыдущего на одно и то же число q .

3

Обозначение суммы

Для суммы первых n членов используют обозначение S_n . Например, $S_3 = a_1 + a_1q + a_1q^2$, то есть складываются только первые три члена.

2

Общий вид записи

Последовательность можно записать так: $a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3$ и дальше по тому же правилу, без изменения способа построения.

4

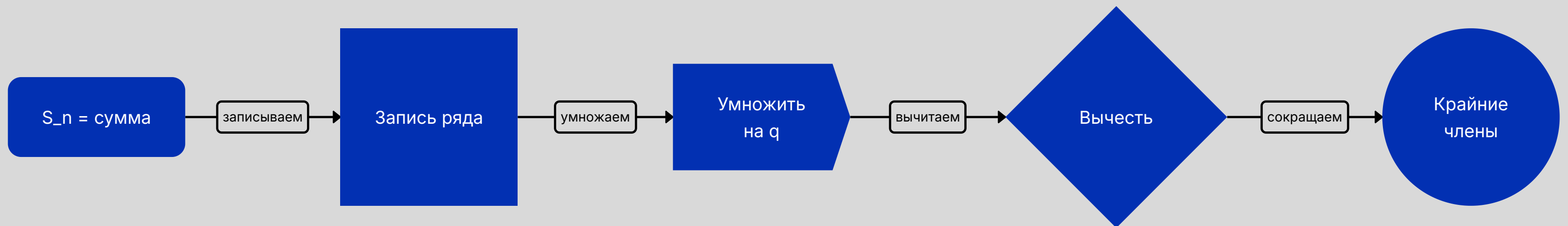
Зачем нужна сумма

Такой способ удобен, когда нужно найти общий итог нескольких значений, а не рассматривать каждый член отдельно. Именно поэтому сумма встречается в задачах часто.

Как получается формула суммы

Переход от суммы к удобной формуле через умножение на q и вычитание

Ok



Формула при $q \neq 1$

1 Основная запись

Если q не равно 1, после преобразований получается $S_n = a_1(q^n - 1)/(q - 1)$. Это основная формула для большинства задач.

2 Удобный вариант

Ту же формулу можно написать как $S_n = a_1(1 - q^n)/(1 - q)$. Она полностью равносильна первой записи и часто удобнее для вычислений.

3 Как не запутаться

Выбирайте ту форму, где меньше риск ошибиться со знаком. Для школьных задач особенно полезно сразу проверять, какой знаменатель записан в условии.

Проверка на маленьком n

Проверка для одного члена

Проверка при $n=1$ показывает, что формула даёт $S_1=a_1$. Это совпадает с очевидным ответом: сумма одного члена равна самому этому члену.

Проверка для двух членов

Для $n=2$ получаем $S_2=a_1+a_1q$. Такая запись полностью совпадает с прямым сложением двух первых членов, значит формула работает корректно.

Почему появляется $q-1$

Сокращение слагаемых

Когда мы вычитаем qS_n из S_n , одинаковые средние слагаемые исчезают. В итоге остаются только первые и последние члены, а в формуле появляется разность $1-q$.

Почему нужен знаменатель

После преобразования делим на $1-q$ или $q-1$. Это возможно только тогда, когда q не равен 1, иначе деление становится невозможным.

Отдельный случай

Именно поэтому случай $q=1$ разбирают отдельно. Там нет роста или убывания, а все члены последовательности одинаковы.

1

**Все члены последовательности
совпадают, поэтому сумма зависит
только от количества слагаемых.**

Во всех подобных задачах этот случай
означает отсутствие изменения между
членами прогрессии.

Ok

Почему нужен отдельный случай

1

Что происходит при $q=1$

Если $q=1$, каждый новый член равен предыдущему. Поэтому последовательность не растёт и не убывает, а формула для $q \neq 1$ теряет смысл из-за деления на ноль.

2

Как считать сумму

Тогда сумма состоит из одинаковых слагаемых: $a_1 + a_1 + \dots + a_1$.
Её удобно представить как произведение $n \cdot a_1$, где n показывает количество членов.

3

Почему это удобно

Такой случай не сложнее остальных, просто он требует другой записи. Если заметить $q=1$ сразу, решение становится очень коротким и понятным.

Пример с нахождением суммы

Подстановка данных

Дано: $a_1=3$, $q=2$, $n=5$. Подставляем в формулу для $q \neq 1$ и получаем $S_5=3(2^5-1)/(2-1)$.

Вычисление суммы

Считаем аккуратно: $2^5=32$, значит $S_5=3 \cdot 31=93$. Ответ получается сразу после вычисления степени.

Проверка результата

Проверяем по членам прогрессии: 3, 6, 12, 24, 48. Их сумма действительно равна 93, значит решение верно.

Пример с поиском q

1

Записываем уравнение

Подставляем известные значения в общую формулу и получаем уравнение для q . Здесь важно помнить, что сумма дана, а первый член и число членов уже известны.

2

Переходим к степеням

После упрощения выходит $q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 = 21$. Теперь нужно подобрать такое q , при котором левая часть действительно даёт нужное значение.

3

Отбрасываем лишний вариант

Проверка $q=2$ показывает: $1+2+4+8+16=31$, а не 21. Значит, это неподходящее значение, и требуется продолжить поиск.

4

Проверяем результат

Пример показывает, что в обратных задачах полезно проверять ответ не только подстановкой в формулу, но и прямым вычислением членов прогрессии.

Пример с поиском a_1

Найти первый член

Из формулы суммы выражаем первый член: если известны S_n , q и n , можно найти a_1 . Это часто встречается в задачах, где сумма дана сразу.

Подставляем значения

Подставляем числа:
 $120 = a_1(3^4 - 1)/(3 - 1)$. После вычисления степени и сокращения получаем $120 = a_1 \cdot 40$, значит первый член легко найти делением.

Делаем проверку

Ответ $a_1 = 3$ сразу подтверждается проверкой: $3 + 9 + 27 + 81 = 120$. Такая проверка помогает убедиться, что формула использована правильно и без ошибок в вычислениях.

Пример с дробным знаменателем

1

Работаем с дробью

При $q=\frac{1}{2}$ каждый следующий член вдвое меньше предыдущего. Поэтому степень удобно считать отдельно, не забывая ставить дробь в скобки.

2

Считаем по шагам

В формуле $S_5=16(1-(\frac{1}{2})^5)/(1-\frac{1}{2})$ сначала вычисляем степень, затем числитель и знаменатель. Так легче избежать путаницы с делением и скобками.

3

Получаем сумму

Получаем $S_5=31$. Пример показывает, что дробный знаменатель не меняет общий принцип решения, но требует особенно аккуратных вычислений.

Пример с отрицательным q

Чередование знаков

Если $q=-1$, знаки в последовательности меняются каждый раз: положительный, отрицательный, снова положительный. Такая прогрессия удобна для проверки понимания чередования.

Сокращение попарно

Для шести членов имеем $2, -2, 2, -2, 2, -2$. Пара соседних членов взаимно уничтожается, поэтому сумма оказывается равной нулю.

Следим за знаком

Этот пример показывает, что отрицательный знаменатель не мешает считать сумму, если внимательно следить за знаками и не пропускать ни один член.

Две формулы рядом

Сравнение двух случаев помогает сразу выбрать нужную формулу и не путать условия. В задачах обычно известны a_1 , q и n , либо требуется найти один из этих параметров.

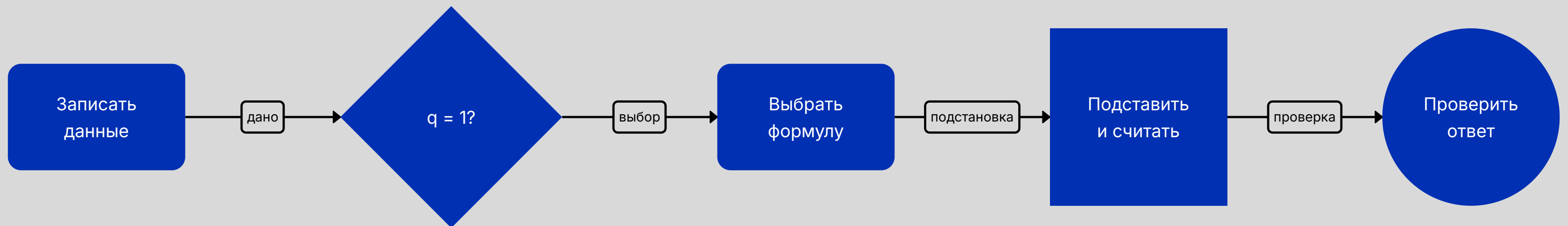
Главное отличие — поведение знаменателя. Если q равен 1, сумма находится умножением; если нет, используется формула геометрической прогрессии.

Формулы суммы n первых членов геометрической прогрессии		
Условие	Формула	Смысл
$q=1$	$S_n=n \cdot a_1$	Все члены равны
$q \neq 1$	$S_n=a_1(q^n-1)/(q-1)$	Есть рост или спад

Алгоритм решения

Последовательность действий при нахождении суммы или неизвестного параметра.

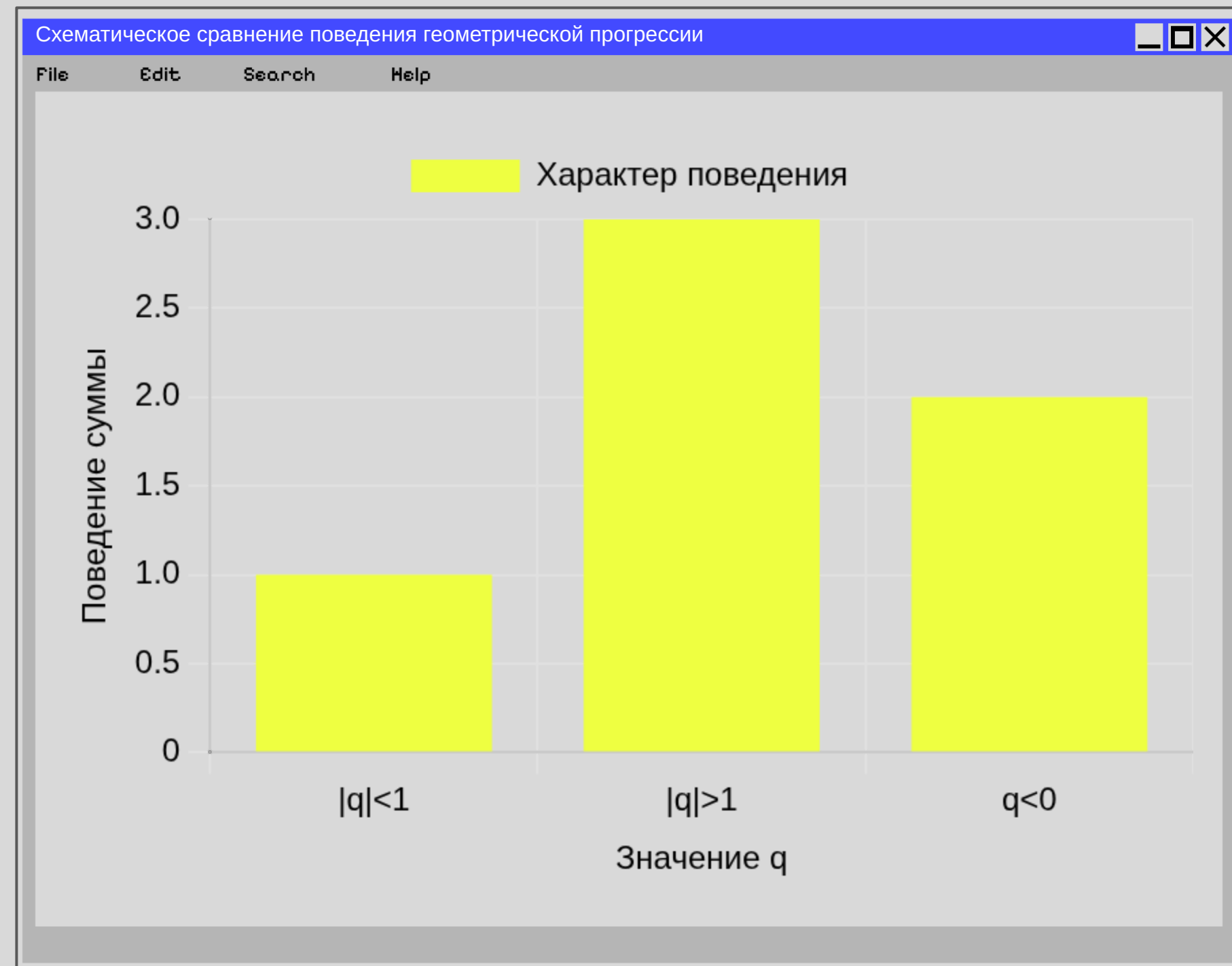
Ok



Как ведёт себя сумма

График помогает увидеть, что поведение суммы зависит от знаменателя. Чем дальше q от 1 по модулю, тем заметнее изменение величины на каждом шаге.

Если модуль q меньше 1, сумма стабилизируется; если больше 1, растёт быстрее; при отрицательном q появляется чередование знаков.



Частые ошибки

Ошибка	Как избежать
Путают q и r	Смотреть на условие
Не тот случай	Проверять $q=1$
Теряют знак	Ставить скобки

Ошибки чаще всего связаны не с самой формулой, а с невнимательностью при подстановке, выборе случая и вычислении степеней. Таблица напоминает, что проверка обязательна.

Если сразу определить знаменатель, аккуратно записать степень и проверить знак, большинство ошибок можно предотвратить ещё до ответа.

Короткая практика

Попробуйте решить задания самостоятельно, а затем сравните с ответами. Важно не только получить число, но и понять, почему оно получилось именно таким.

Все три задания проверяют разные случаи: обычную формулу, случай $q=1$ и дробный знаменатель. Это хороший короткий тренажёр для закрепления темы.

Тренировочные задания по теме урока		
File Edit Search Help		
№	Дано	Ответ
1	5; 2; 4	75
2	12; 1; 7	84
3	81; 1/3; 3	117

Что важно запомнить

Ok

Сегодня мы научились находить сумму первых n членов геометрической прогрессии в двух случаях, выбирать подходящую формулу и проверять себя. Главное правило — внимательно смотреть на q и не ошибаться со знаком.